BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

JOSEPH PEROTT

Sur la sommation des nombres φ

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 37-40
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_37_0>

SUR LA SOMMATION DES NOMBRES φ;

PAR M. JOSEPH PEROTT.

Soit h un nombre entier quelconque; on désigne par $\varphi(h)$ le nombre qui indique combien il y a de nombres premiers à h et non supérieurs à h. Si l'on donne à h les valeurs successives

(1) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \ldots, N, \ldots,$

on obtient les nombres φ correspondants

(2) $1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 8, 8, \ldots \varphi(N), \ldots.$

On voit que la série (2) est des plus irrégulières. Si cependant, au lieu de considérer chaque terme de la série isolément, on prend la somme des N premiers termes, le rapport de cette somme à celle des termes correspondants de la série (1) tend de plus en plus vers une limite constante à mesure qu'on fait croître le nombre N. La démonstration de cette propriété des nombres φ fait l'objet du présent travail.

Un terme quelconque $\varphi(h)$ de la série (2) pouvant être considéré comme indiquant le nombre de fractions irréductibles de dénominateur h, la somme des N premiers termes de la série donnera le nombre de toutes les fractions dont les dénominateurs ne surpassent pas N. Or il est clair qu'on pourra aussi arriver à la connaissance du nombre de ces fractions en partant de la considération de leurs numérateurs. Le nombre de fractions de numérateur k sera évidemment

$$\varphi(N, k) - \varphi(k-1, k),$$

$\varphi(N, k)$ désignant la quantité de nombres non supérieurs à N et premiers à k.

On aura, par conséquent,

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N, k) - \sum_{k=2}^{k=N} \varphi(k) = \Phi(N);$$

donc

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N, k).$$

Mais nous avons

$$\varphi(\mathrm{N}, k) = \mathrm{N} - \sum \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l}\right) + \sum \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l p_m}\right) - \ldots,$$

la sommation s'étendant à tous les facteurs premiers de k.

Par conséquent,

$$(3)\quad \sum_{h=1}^{h=\mathrm{N}} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\mathrm{N}^2 - \sum \left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l}\right)\right]^2 + \sum \left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l p_m}\right)\right]^2 - \ldots\right\};$$

car chaque terme $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{N}}{p_l p_m p_n \ldots}\right)$ figure juste autant de fois dans la somme $\sum\limits_{k=1}^{k=\mathrm{N}} \varphi(\mathrm{N}, k)$ qu'il y a de nombres non supérieurs à N et divisibles par $p_l p_m p_n \ldots$. Les symboles E de Legendre s'annulant, du reste, toutes les fois que l'argument devient moindre que l'unité, la série (3) s'arrêtera d'elle-même.

Divisons maintenant les deux membres de la formule (3) par N^2; nous aurons

$$\frac{\sum\limits_{h=1}^{h=\mathrm{N}} \varphi(h)}{\mathrm{N}^2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mathrm{N}^2} + 1 - \frac{\sum \left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l}\right)\right]^2}{\mathrm{N}^2} + \frac{\sum \left[\left(\frac{\mathrm{N}}{p_l p_m}\right)\right]^2}{\mathrm{N}^2} - \ldots\right\}$$

ou, en posant $\mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{N}}{p_l p_m p_n \ldots}\right) = \dfrac{\mathrm{N}}{p_l p_m p_n} - \theta_{l,m,n,\ldots}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{h=1}^{h=\mathrm{N}} \varphi(h)}{\mathrm{N}^2} = \frac{1}{2}\Bigg[& \frac{1}{\mathrm{N}^2} + 1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} \qquad (\text{les dén. } \mathrm{D} \leqq \mathrm{N}^2) \\
& + \frac{2}{\mathrm{N}}\left(\sum \frac{\theta_l}{p_l} - \sum \frac{\theta_{l,m,n}}{p_l p_m} + \sum \frac{\theta_{l,m,n}}{p_l p_m p_n} - \ldots\right) \qquad (\mathrm{D} \leqq \mathrm{N}) \\
& - \sum \frac{\theta_l^2}{\mathrm{N}^2} + \sum \frac{\theta_{l,m}}{\mathrm{N}^2} - \sum \frac{\theta_{l,m,n}^2}{\mathrm{N}^2} + \ldots \Bigg] \\
= \frac{1}{2} & \left(1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} + \ldots\right) \\
& + \frac{1}{2\mathrm{N}^2} + \frac{\xi}{\mathrm{N}}\left(1 + \sum \frac{1}{p_l} + \sum \frac{1}{p_l p_m} + \sum \frac{1}{p_l p_m p_n} + \ldots\right),
\end{aligned}$$

où ξ est un nombre moindre que l'unité en valeur absolue.

Mais l'on a toujours

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}<\left(\frac{N}{N-1}\right)^N \log N<\frac{N}{N-1}\,e\log N;$$

par conséquent,

$$\frac{\Phi(N)}{N^2}=\frac{1}{2}\left(1-\sum\frac{1}{p_l^2}+\sum\frac{1}{p_l^2p_m^2}-\sum\frac{N=1}{p_l^2p_m^2p_n^2}+\ldots\right)\qquad (D\leqq N^2)$$
$$+\frac{1}{2N^2}+\frac{\xi_1 e\log N}{N-1};$$

donc

$$\lim_{N=\infty}\frac{\Phi(N)}{N^2}=\lim_{N=\infty}\frac{\Phi(N)}{N(N+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{N=\infty} 1-\sum\frac{1}{p_l^2}+\sum\frac{1}{p_l^2p_m^2}\qquad (D\leqq N^2)$$
$$=\frac{3}{\pi^2}=0,30396\,35509\,27013\,31433.$$

Le Tableau suivant permettra de juger de l'approximation avec laquelle la fonction $\frac{3N^2}{\pi^2}$ représente les valeurs du symbole $\Phi(N)$ pour les cent premiers nombres naturels :

N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$	N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$
1	1	0	17	96	88
2	2	1	18	102	99
3	4	3	19	120	110
4	6	5	20	128	122
5	10	8	21	140	134
6	12	11	22	150	147
7	18	15	23	172	161
8	22	19	24	180	175
9	28	25	25	200	190
10	32	30	26	212	205
11	42	37	27	230	222
12	46	44	28	242	238
13	58	51	29	270	256
14	64	60	30	278	274
15	72	68	31	308	292
16	80	78	32	324	311

N	Φ(N)	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2}+\frac{1}{4}\left[1-(-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$
33	344	331
34	360	351
35	384	372
36	396	394
37	432	416
38	450	439
39	474	462
40	490	486
41	530	511
42	542	536
43	584	562
44	604	588
45	628	616
46	650	643
47	696	671
48	712	700
49	754	730
50	774	760
51	806	791
52	830	822
53	882	854
54	900	886
55	940	919
56	964	953
57	1000	988
58	1028	1023
59	1086	1058
60	1102	1094
61	1162	1131
62	1192	1168
63	1228	1206
64	1260	1245
65	1308	1284
66	1328	1324
67	1394	1364
68	1426	1406
69	1470	1447
70	1494	1489
71	1564	1532
72	1588	1576
73	1660	1620
74	1696	1666
75	1736	1710
76	1772	1756
77	1832	1802
78	1856	1849
79	1934	1897
80	1966	1945
81	2020	1994
82	2060	2044
83	2142	2094
84	2166	2145
85	2230	2196
86	2272	2248
87	2328	2301
88	2368	2354
89	2456	2408
90	2480	2462
91	2552	2517
92	2596	2573
93	2656	2629
94	2702	2686
95	2774	2743
96	2806	2801
97	2902	2860
98	2944	2919
99	3004	2979
100	3044	3039

Lisbonne, le 27 novembre 1880.