Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Hermite

Sur quelques points de la théorie des fonctions

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 312-320

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_312_1>

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS (¹);

PAR M. HERMITE.

L'importante Communication de M. Hermite que nous analysons comprend deux Parties bien distinctes : la première se rapporte à la théorie des fonctions analytiques uniformes, la seconde à la notion de *coupure*.

I. Il s'agit principalement du théorème de M. Mittag-Leffler :

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *une suite indéfinie de fonctions rationnelles, telles que* $f_\nu(x)$ *ne devienne infinie que pour* $x = a_\nu$, *et supposons que, les modules de la suite indéfinie* $a_1, a_2, \ldots$ *allant en croissant, on ait la condition* $\lim a_\nu = \infty$. *On peut alors toujours former une fonction analytique uniforme* $F(x)$, *avec le seul point singulier* ∞, *n'ayant d'autres pôles que* a_1, a_2, ..., *et telle que la différence* $F(x) - f_\nu(x)$ *soit finie pour* $x = a_\nu$.

Considérant d'abord le cas où les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... seraient de la forme $\frac{1}{x - a_1}$, $\frac{1}{x - a_2}$, ..., comme les fractions auxquelles donne naissance la considération de la dérivée logarithmique d'une fonction $\Phi(x)$ holomorphe dans tout le plan, M. Hermite distingue deux circonstances :

1° Il existe un entier positif n tel que la série des quantités

$$\frac{1}{|a_1|^{n+1}} + \frac{1}{|a_2|^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{|a_\nu|^{n+1}} + \cdots \qquad (^2)$$

soit convergente.

(¹) Helsingfors, 1881; in-4°, 28 p. Extrait d'une Lettre à M. Mittag-Leffler (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XII).

(²) Le symbole $|a|$ désigne le module de a.

Posant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{a_\nu^n},$$

on a

$$\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^n}{a_\nu^n(a_\nu - x)},$$

et la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^n}{a_\nu^n(a_\nu - x)}$$

convergera uniformément et inconditionnellement dans le domaine de tout point autre que les points $a_1, a_2, \dots$, comme on le voit tout de suite en considérant la série des modules ; cette série représente une fonction $F(x)$ qui satisfait manifestement aux conditions de l'énoncé.

2° Mais l'hypothèse d'où a été déduite la construction de la fonction $F(x)$ ne peut pas toujours être réalisée, et l'on est alors amené à retrancher de la fraction $\frac{1}{a_\nu - x}$ un polynôme $P_\nu(x)$ dont le degré ne reste pas fini comme précédemment ; posant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \dots + \frac{x^{\nu-1}}{a_\nu^\nu},$$

on a

$$\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu - x)},$$

et l'on considère la série

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu - x)},$$

déjà utilisée par M. Weierstrass et qui converge pour toute valeur de la variable autre que les points $a_1, a_2, \dots$, ainsi que la série des modules, puisque la racine $\nu^{\text{ième}}$ du module du terme de rang ν a pour limite zéro, lorsqu'on suppose ν infini ; elle représente encore une fonction analytique $F(x)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Le théorème, ainsi démontré dans le cas de la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe $\Phi(x)$, conduit à la décomposition en facteurs primaires d'une telle fonction : en effet, l'expression

$$F(x)+\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)},$$

n'ayant plus de pôles, est, dans tout le plan, une fonction holomorphe qu'on peut représenter par $G'(x)$, et de la relation

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left[\frac{1}{a_\nu-x}-P_\nu(x)\right]+\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}=G'(x)$$

on conclut, en posant

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\int_0^x P_\nu(x)\,dx,$$

$$\Phi(x)=e^{G(x)}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathrm{P}_\nu(x)}\right].$$

Supposons maintenant que les fonctions rationnelles $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... soient de la forme $\frac{R_1}{x-a_1}$, $\frac{R_2}{x-a_2}$, ..., en sorte qu'on ait affaire à une fonction uniforme à infinis simples.

S'il arrive encore qu'il existe un nombre entier n tel que la série

$$\left|\frac{R_1}{a_1^{n+1}}\right|+\left|\frac{R_2}{a_2^{n+1}}\right|+\cdots+\left|\frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}}\right|+\cdots$$

soit convergente, on continuera de faire

$$P_\nu(x)=\frac{1}{a_\nu}+\frac{x}{a_\nu^2}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{a_\nu^n},$$

$$F(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}R_\nu\left[\frac{1}{a_\nu-x}-P_\nu(x)\right]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{R_\nu x^n}{a_\nu^n(a_\nu-x)}.$$

La série qui figure dans le second membre, ainsi que les séries des dérivées, convergent uniformément partout ailleurs qu'aux pôles; l'existence de la fonction $F(x)$ et celle de ses dérivées sont ainsi entièrement démontrées.

Il ne reste plus, en supposant toujours que les infinis des diverses fonctions rationnelles sont simples, que le cas où les séries

$$\sum \left| \frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}} \right|$$

sont divergentes pour toute valeur de n. Faisant alors

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{\omega_\nu - 1}}{a_\nu^{\omega_\nu}},$$

il s'agit de déterminer les entiers ω_ν par la condition que la série

$$\sum \frac{R_\nu x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu}(a_\nu - x)}$$

soit convergente dans tout le plan.

En posant

$$|R_\nu| = |a_\nu|^{\rho_\nu},$$

la série des modules

$$\sum \left| \frac{R_\nu x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu}(a_\nu - x)} \right|$$

se décompose en deux parties qui répondent, l'une à l'hypothèse $\rho_\nu \leqq 0$, l'autre à l'hypothèse $\rho_\nu > 0$; on rend la première convergente en supposant que les quantités ω_ν satisfassent à la condition

$$\omega_\nu - \rho_\nu \geqq \nu;$$

quant à la seconde, on peut l'écrire

$$\sum \left| \frac{x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu - \rho_\nu}(a_\nu - x)} \right|,$$

et, en posant

$$|a_\nu| = |a_\nu - 1|^{\alpha} \quad (\alpha > 1),$$

le terme général devient

$$\frac{|x|^{\omega_\nu}}{|a_{\nu-1}|^{\alpha(\omega_\nu-\rho_\nu)}\,|a_\nu - x|}.$$

Si l'on fait maintenant

$$\alpha(\omega_\nu - \rho_\nu) = \omega_\nu + \varepsilon_\nu,$$

ε_ν étant une quantité positive telle que ω_ν soit un nombre entier non inférieur à ν, on s'assurera sans difficulté que la racine $\nu^{\text{ième}}$ du terme général qui précède a pour limite zéro quand ν augmente indéfiniment.

Enfin, le cas où les fonctions rationnelles $f_\nu(x)$ ont des infinis multiples se déduit du cas où elles n'ont que des infinis simples, cas où la proposition est entièrement démontrée.

II. Dans la seconde partie de sa Lettre, M. Hermite met en pleine lumière une propriété capitale de ces fonctions d'une variable imaginaire z qui tirent leur origine de la considération d'une intégrale définie telle que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t,z)}{G(t,z)}\,dt,$$

propriété relative aux *lignes de discontinuité* d'une telle fonction.

Supposant d'abord que la variable d'intégration t soit réelle et aille en croissant de t_0 à t_1, et que les fonctions $F(t,z)$, $G(t,z)$ soient holomorphes en t et en z, il est clair qu'une pareille intégrale a une valeur déterminée tant que la valeur de z est telle que l'équation en t

$$G(t,z) = 0$$

n'ait pas de racine réelle comprise entre t_1 et t_2. Si dans cette dernière équation on fait varier t de t_1 à t_2, le point dont l'affixe z est défini par cette équation décrira une ou plusieurs courbes, dont l'ensemble sera le lieu des points du plan pour lesquels la fonction cesse d'être définie par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt.$$

Or, en excluant les points de ces courbes pour lesquels l'une des quantités

$$P(t, z) = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad Q(t, z) = \frac{\partial G}{\partial z}$$

s'annulerait, l'auteur met en évidence ce fait capital, que la différence des valeurs que prend la fonction en deux points infiniment voisins de la courbe de discontinuité, situés de part et d'autre de cette courbe sur la normale en l'un de ses points, est finie, et il calcule la valeur de cette différence.

Soit, en effet, M un point de la courbe pour lequel $t = \theta$, $z = \zeta$; un calcul simple montre d'abord que l'affixe Z d'un point de la normale en ce point peut être mise sous la forme

$$Z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$

λ étant une quantité positive, et ε représentant l'unité affectée du même signe (ou d'un signe contraire) que la partie réelle de

$$\frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$

si l'on veut avoir affaire (ou non) à un point situé sur la partie supérieure de la normale.

N et N' désignant deux points opposés sur cette normale, un calcul facile montre que, en négligeant sous le signe d'intégration des quantités qui n'influent pas sur la valeur limite de la différence

$$\Phi(N') - \Phi(N)$$

des valeurs que prend la fonction aux points N et N', on peut écrire

$$\Phi(N') - \Phi(N) \int_{t_0}^{t_1} \frac{2 i\varepsilon\lambda\, PQ[F(t, \zeta)\, Q(t, \zeta) - G(t, \zeta)\, R(t, \zeta)]}{Q^2 G^2(t, \zeta) + \lambda^2 P^2 Q^2(t, \zeta)} dt,$$

où P et Q ont été mis, pour abréger, à la place de $P(\theta, \zeta)$, $Q(\theta, \zeta)$. Sauf dans le cas, exclu de nos suppositions, où ζ serait un point double, l'équation en t

$$G(t, \zeta) = 0$$

n'a que la racine $t = \theta$ qui soit réelle et comprise entre t_0 et t_1. On voit donc que, si l'on fait tendre λ vers zéro, la partie de l'intégrale qui correspond à des valeurs de t qui ne sont pas voisines de θ a une limite nulle. D'après cela on voit aisément que cette intégrale a la même limite que

$$\frac{2i\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} \int_{\theta-\mu}^{\theta+\nu} \frac{\lambda \, dt}{(t-\theta)^2 + \lambda^2},$$

où μ et ν sont des quantités positives infiniment petites. Cette limite est donc

$$\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)}.$$

Il n'est pas utile d'insister sur le parti qu'on peut tirer de ce résultat. M. Hermite rapproche la notion si simple et en même temps si essentielle des lignes de discontinuité présentées par la fonction $\Phi(z)$ de la notion de *coupure* introduite par Riemann. Ce nom de *coupure* convient certainement à ces lignes de discontinuité; on peut toutefois remarquer que les *coupures* introduites par M. Hermite sont complètement déterminées et qu'il n'y a rien de pareil pour les coupures de Riemann.

M. Hermite donne ensuite quelques applications de sa formule.

Si, par exemple, $f(t)$ désigne une fonction uniforme, ne contenant pas z et ayant un nombre fini ou infini de pôles, les coupures relatives à la fonction

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t+z) \, dt$$

seront des segments de droite parallèles à l'axe des abscisses, correspondant à chaque pôle. Pour chacune de ces droites on trouve aisément que la différence $\Phi(N) - \Phi(N')$ est égale au produit par $-2i\pi$ du résidu relatif au pôle correspondant; ce résultat, immédiat pour les pôles simples, subsiste quel que soit l'ordre de multiplicité.

Si $f(t)$ est une fonction rationnelle dans laquelle le degré du numérateur est inférieur de deux unités au degré du dénominateur, l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

est une constante dans chaque intervalle compris entre deux coupures consécutives; la valeur de cette constante change quand on passe d'un intervalle à l'autre, et les résultats précédents permettent de calculer sans difficulté les valeurs de ces diverses constantes. On peut maintenant construire la fonction $f(t)$ de façon que dans chaque intervalle la constante représentée par la fonction $\Phi(z)$ soit donnée, et l'on déduira de là l'expression d'une fonction représentant dans chaque intervalle telle fonction que l'on voudra, résultat analogue à celui que M. Weierstrass a communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin en août 1880.

Des considérations analogues s'appliquent à l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{2\pi+z_0} f(t+z)\,dt,$$

où $f(t)$ est une expression rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$, sans partie entière; on est ainsi conduit à la formule donnée par l'auteur dans son *Cours d'Analyse* (p. 328) et d'où résulte immédiatement la décomposition de la fonction $f(t)$ en éléments simples.

De même encore la considération de l'intégrale

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_0+2K} f(t+z)\,dt,$$

où $f(t)$ est une fonction uniforme admettant les deux périodes $2K$ et $2iK'$, montre naturellement que dans l'intérieur du parallélogramme des périodes la somme des résidus de cette fonction est nulle, et conduit, par conséquent, à la formule de décomposition en éléments simples qui joue un rôle si capital dans la théorie des fonctions doublement périodiques.

Ces quelques applications montrent nettement la portée de la proposition fondamentale obtenue par M. Hermite dans le cas simple où il s'est placé. La question qu'il s'est posée en suggère d'autres plus générales, qui ne pouvaient assurément lui échapper : il en signale les plus importantes à la fin de sa Lettre à M. Mittag-Leffler; sans doute elles donneront lieu, dans l'avenir, à des développements d'un singulier intérêt.

J. T.