Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Compositions données aux examens de licence dans les différentes facultés de France, en 1880

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 5, nº 1 (1881), p. 295-312

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_295_1>

COMPOSITIONS DONNÉES AUX EXAMENS DE LICENCE DANS LES DIFFÉRENTES FACULTÉS DE FRANCE, EN 1880.

SESSION DE JUILLET.

Marseille.

Composition d'Analyse. — La tangente MT menée d'un point quelconque M d'une surface à une sphère donnée de rayon a est dans un rapport constant $\frac{1}{\lambda}$ avec la moyenne proportionnelle entre la distance OP du centre O de cette sphère au plan tangent à la surface au point M et la longueur MN de la normale en ce point à la surface, cette normale étant terminée par sa trace N sur un plan diamétral fixe de la sphère. On demande :

1° De trouver l'équation générale de la surface ;

2° De trouver l'équation de la surface : 1° lorsque le rayon a de la sphère est nul ; 2° lorsque le rapport $\frac{1}{\lambda}$ est égal à l'unité ;

3° De discuter ces divers résultats.

Composition de Mécanique. — Deux points M, M' mobiles dans un plan sans frottement sont reliés par un fil flexible, inextensible et sans masse qui passe sans frottement dans un anneau très petit situé dans le plan. Le point M' étant astreint à décrire une droite AB du plan et le fil étant tendu, la vitesse initiale du point M étant perpendiculaire au rayon OM, on demande d'étudier le mouvement du système dans le cas général et dans celui où la droite AB passe par le point O.

Il n'y a pas de forces appliquées.

Épreuve pratique. — Étant données la latitude géographique φ d'un lieu, l'ascension droite α et la déclinaison δ d'un astre, calculer l'azimut et la distance zénithale de cet astre au temps sidéral t.

Besançon.

Composition d'Analyse. — Déterminer une courbe telle que, menant par un point quelconque la tangente MT et la normale MN, les diagonales du quadrilatère formé pour ces deux droites et les deux axes Ox et Oy fassent un angle donné θ.

Composition de Mécanique. — Déterminer la figure d'équilibre d'un fil fixé en deux de ses points et attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de la distance.

Épreuve pratique. — On donne la distance zénithale d'un astre, sa distance polaire et la latitude du lieu. Calculer l'angle horaire du plan méridien qui contient l'astre.

Bordeaux.

Composition d'Analyse. — On a deux plans dont l'un se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse constante, tandis que l'autre tourne aussi avec une vitesse constante autour d'une droite fixe A perpendiculaire à la direction du premier. La droite d'intersection rencontre dans chacune de ses positions une surface de révolution ayant pour axe l'axe de rotation du second plan.

Étudier la courbe tracée par ces rencontres sur la surface de révolution. On considérera plus spécialement le cas où la surface de révolution est un cône. Calculer alors les angles de contingence et de torsion de la courbe.

Examiner, si le temps le permet, le cas d'une sphère.

Composition de Mécanique. — Première question (lemme). — Une figure plane A, située dans le plan xy, tourne avec ce plan autour de l'axe des y; la vitesse angulaire ω est constante. On demande les expressions simplifiées de la résultante R des forces centrifuges nées du mouvement et du couple G, qu'on obtiendrait en transportant cette résultante parallèlement à elle-même au centre de gravité de la figure.

Seconde question (application). — Une tige pesante homogène a ses extrémités A et B obligées de rester l'une sur la verticale Oy, l'autre sur l'horizontale Ox, le plan xy tourne avec la vitesse constante ω autour de Oy. On néglige le frottement. On demande :

1° La position d'équilibre de la tige AB pour une vitesse angulaire donnée ω (détermination de l'angle θ qu'elle fait avec l'horizontale) ;

2° Les pressions exercées par la tige sur les axes Ox, Oy ;

3° Les équations différentielles du mouvement dans le cas général ;

4° La détermination complète du mouvement lorsque la tige est très légèrement écartée de sa position d'équilibre.

Épreuve pratique. — Calculer de 2^m en 2^m, et pour des angles horaires variant de 4^h à $4^h 10^m$, la hauteur au-dessus de l'horizon d'une étoile dont la déclinaison est $1°21'14'',32$. La latitude est de $44°50'19'',0$. On vérifiera l'exactitude des calculs par la méthode des différences.

Grenoble.

Composition de Mécanique. — Étudier le mouvement d'un point matériel dans un plan, en supposant qu'il soit attiré par un point fixe de ce plan, en raison inverse de la cinquième puissance de la distance.

Indiquer les différentes formes de la trajectoire au moyen de son équation différentielle. Dans quel cas peut-on effectuer complètement l'intégration?

Épreuve pratique. — Déterminer l'azimut du centre du Soleil à $3^h 10^m$ de l'après-midi (temps moyen) avec les données suivantes :

Latitude du lieu	$45°11'12''$
Déclinaison australe du Soleil	$17°8'53''$
Équation du temps	$13^m 48^s$.

Lyon.

Composition d'Analyse. — Déterminer en coordonnées curvilignes (u, v) le rayon de courbure d'une section normale à une surface.

Faire voir que ce rayon passe par un maximum et un minimum, quand on fait varier le rapport $\frac{du}{dv}$.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point matériel soustrait à l'action de toute force extérieure et assujetti seulement à se mouvoir sur un ellipsoïde donné.

Épreuve pratique. — Le 17 juillet 1880, à midi moyen de Paris, la planète Mars a pour coordonnées héliocentriques

Longitude héliocentrique	$167°5'26'',3$
Latitude	$1°37'37'',8$
Logarithme du rayon vecteur	0,2204213

Au même instant la longitude du Soleil est $115°12'9'',2$. On a longitude du rayon vecteur de la Terre $= 0,0069929$. Déterminer la longitude et la latitude géocentriques de la planète à l'instant considéré.

Montpellier.

Composition d'Analyse. — Intégration de l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants : 1° lorsqu'elle est privée de second membre ; 2° lorsqu'elle possède un second membre fonction de x.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point matériel pesant assujetti à se trouver constamment dans un plan qui tourne uniformément autour d'un axe vertical situé dans ce plan. Le mobile éprouve en outre la résistance d'un milieu supposée proportionnelle à la vitesse.

Épreuve pratique. — Les hauteurs apparentes de deux étoiles sont respectivement égales à $48°0'49''$ et $70°34'9''$. Leur distance apparente est $58°8'48''$:

1° Calculer les éléments nécessaires pour déterminer la distance vraie de ces étoiles ;

2° Former avec ces éléments le tableau des calculs à effectuer pour arriver à son expression numérique.

Nancy.

Composition d'Analyse. — 1° Intégrer l'équation aux différentielles partielles

$$\frac{x}{y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+(a-yz)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+(b-yu)\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0.$$

2° Trouver la valeur de l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ et en conclure les valeurs des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx,\quad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx.$$

Composition de Mécanique. — 1° En un point O de la surface de la Terre, situé à la latitude λ, on considère un plan poli P, supposé vertical et perpendiculaire au plan méridien. Un mobile pesant assujetti à demeurer dans le plan P est lancé du point O avec une vitesse initiale donnée.

Étudier le mouvement du mobile dans le plan P, en tenant compte de la rotation de la Terre. Calculer la réaction du plan.

2° Un corps solide dont deux points sont fixes est en équilibre sous l'action de forces données. Rechercher les pressions supportées par les deux points fixes.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Poitiers.

Composition d'Analyse. — Trouver les courbes telles que, si par le point N où une normale quelconque MN rencontre l'axe Ox on mène une parallèle à la tangente en M, cette droite passe par un point A donné sur l'axe Oy.

Trouver les trajectoires orthogonales de ces courbes.

Composition de Mécanique. — Un point matériel, non pesant, est lancé avec une vitesse v_0, parallèlement à une droite fixe vers laquelle il est attiré avec une force proportionnelle à la distance et dont la valeur est μ à l'unité de distance; il éprouve en outre, de la part du milieu dans lequel il se meut, une résistance proportionnelle à sa vitesse et dont la valeur est $2k$ pour une vitesse égale à l'unité.

Étudier les divers cas que peut présenter le mouvement de ce point suivant les grandeurs relatives de $\sqrt{\mu}$ et de K.

Épreuve pratique. — Quels seront, le 18 juillet 1880, l'azimut et la distance zénithale d'Arcturus, l'heure sidérale étant 18^h.

Latitude Poitiers	$46^\circ 34' 55''$
Ascension droite Arcturus	$14^h 10^m 13^s,97$
Déclinaison boréale	$19^\circ 48' 21'',7$

Toulouse.

Composition d'Analyse. — 1° On considère la surface représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$zx^2 = ay^2,$$

a étant une constante. Trouver ses lignes asymptotiques.

2° Intégrer l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2a^2\frac{d^2y}{dx^2} + a^4y = \cos ax,$$

où a est une constante.

Composition de Mécanique. — Soit un fil l, inextensible et sans poids, aux extrémités duquel sont attachées deux petites masses pesantes m, m'; l'une d'elles m' glisse sur un plan horizontal fixe PQ, tellement placé que le fil aABb s'enroule sur un cylindre droit par un quart de cercle AB, ce cylindre tournant autour d'un axe horizontal passant par le centre O de la circonférence AB. On demande la loi du mouvement de chacune des masses m, m' et du cylindre ainsi que les tensions des brins de fil aA, Bb.

On tiendra compte du frottement de glissement de la masse m' sur le plan PQ et de la résistance de l'air, résistance que l'on supposera proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation du cylindre.

Épreuve pratique. — Résoudre un triangle sphérique géodésique, connaissant deux côtés b, c et l'angle compris A.

Rennes.

Composition d'Analyse. — 1° Trouver une courbe telle que l'angle MOT sous lequel on voit d'un point donné O la portion MT de tangente à cette courbe comprise entre le point de contact M et une droite fixe DD′ soit constant.

2° C étant le point de rencontre du rayon vecteur OM avec la droite CC′ parallèle à DD′ et menée à égale distance du point O et de cette droite, trouver le lieu géométrique du point P conjugué harmonique du point C par rapport aux deux points O et M, et conclure de là une manière simple de déduire les points de la courbe en question d'une courbure connue, ainsi que la construction de la tangente.

Examiner spécialement le cas où l'angle MOT est égal à 90°.

Composition de Mécanique. — Définir le mouvement tautochrone. Un point sollicité par une force qui ne dépend que de la position ayant un mouvement rectiligne tautochrone, donner l'expression de cette force.

Expression de la composante tangentielle dans le mouvement tautochrone curviligne. Détermination de la courbe tautochrone dans le cas d'un point pesant, et étude de ce mouvement.

Épreuve pratique. — Épure : intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un plan.

Clermont.

Composition d'Analyse. — Donner une méthode pour avoir les courbes dans lesquelles le rayon de courbure ρ est une fonction donnée de l'angle α que la tangente à la courbe fait avec une direction fixe

$$\rho = f(\alpha).$$

Application aux cas où $f(\alpha) = a\cos\alpha$, $f(\alpha) = \dfrac{a}{\cos^2\alpha}$.

Composition de Mécanique. — Théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe. Cas où le corps se réduit à trois points de masses m, m', m'', situés sur une même perpendiculaire à cet axe.

Épreuve pratique. — En un lieu de la Terre, on observe l'azimut α d'une étoile à son lever et sa hauteur méridienne h. On demande la latitude du lieu et la déclinaison de l'étoile.

Dijon.

Composition d'Analyse. — Exposer une méthode permettant de déduire l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque de celle de la même équation privée de son second membre. Appliquer cette méthode à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 6\frac{du}{dx} + 9u = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}.$$

Composition de Mécanique. — Soient trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, l'axe des z étant vertical et dirigé vers le haut; on considère un paraboloïde de révolution ayant pour équation $z = \frac{x^2+y^2}{2a}$. Un point matériel pesant mobile sur la surface est repoussé par l'axe Oz proportionnellement à la distance. Étudier le mouvement du point, sachant que les coordonnées initiales du mobile sont

$$x_0 = a, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a}{2},$$

et les projections de la vitesse initiale

$$(v_x)_0 = 0, \quad (v_y)_0 = b, \quad (v_z)_0 = 0, \quad b > 0.$$

Former l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des xy, et discuter cette courbe dans les cas où elle a des branches infinies.

Épreuve pratique. — L'excentricité d'une planète étant supposée égale à $\frac{1}{4}$, calculer l'anomalie vraie et l'anomalie moyenne correspondant à une anomalie excentrique égale à

$$30^\circ 19' 24'', 54.$$

SESSION DE NOVEMBRE.

Marseille.

Composition d'Analyse. — 1° Recherche des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de la surface

$$z = mxy.$$

2° Angles sous lesquels les premières lignes sont coupées par les secondes.

3° Courbes suivant lesquelles ces deux sortes de lignes se projettent sur le plan des xy.

Composition de Mécanique. — Un point M non pesant est mobile dans un canal circulaire poli; ce point est sollicité par une force perpendiculaire à un diamètre fixe AB de ce cercle et proportionnelle à la distance du point M à ce diamètre. Trouver le mouvement du point M.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique, connaissant les trois côtés.

Besançon.

Composition d'Analyse. — On demande de calculer la surface détachée sur une des nappes d'un cône de révolution par un plan sécant donné.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un pendule dans un milieu résistant, en supposant la résistance proportionnelle à la vitesse. Cas des petites oscillations.

Épreuve pratique. — Épure de Géométrie descriptive.

Bordeaux.

Composition d'Analyse. — Équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par une équation contenant un paramètre variable.

Extension aux trajectoires obliquangles.

Application aux trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + a^2 = 0,$$

λ étant le paramètre variable.

Étendre, si le temps le permet, la recherche des trajectoires orthogonales ou obliquangles au cas des courbes représentées par des équations en coordonnées polaires.

Composition de Mécanique. — Un point matériel M assujetti à rester sur une droite CD est attiré vers le point O par une force qui varie en raison inverse du carré de la distance. Ce corps part sans vitesse d'un point A de la droite. On demande :

1° De déterminer la vitesse du point M à un instant donné (indiquer diverses méthodes);

2° De trouver la pression exercée par le point M sur la droite OA;

3° De résoudre complètement le problème en supposant les angles O et X, que font les droites OM, OA avec la perpendiculaire à CD, assez petits pour que l'on puisse poser $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}\cdot$ Exprimer en fonction de θ le temps t que le mobile met à atteindre une position M quelconque ;

4° De déterminer la longueur L du pendule simple OM′ qui, vu du point O, paraîtrait osciller dans le même temps que le point M (OM et OM′ doivent toujours former le même angle θ avec la perpendiculaire à CD, au degré d'approximation indiqué).

Épreuve pratique. — Le 12 mars 1880, on a observé α d'Orion vers l'Ouest, à $14^\circ 23' 15'',23$ au-dessus de l'horizon. On demande de calculer l'heure sidérale de l'observatoire et l'azimut de l'étoile à l'instant de l'observation. Les coordonnées de α d'Orion sont

$$\begin{aligned} Æ &= 5^h 48^m 42^s,21, \\ \delta &= 7^\circ 22' 57'',2. \end{aligned}$$

La latitude du point d'observation est $44^\circ 50' 19'',0$.

Caen.

Composition de Géométrie analytique. — Trouver le lieu des foyers d'une hyperbole dont on connaît un sommet et une asymptote.

Composition d'Analyse et de Mécanique. — 1° Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{c^2 \cos^2 x + d^2 \sin^2 x} dx.$$

2° Déterminer sur une surface gauche de révolution les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

3° Déterminer l'accélération totale d'un point, connaissant son mouvement relatif par rapport à certains axes et le mouvement de ces axes.

4° Une barre homogène et très mince, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, est choquée par une bille dont la vitesse est perpendiculaire à la barre; en supposant les deux corps parfaitement élastiques, on demande le mouvement qu'ils prendront après le choc.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Grenoble.

Composition d'Analyse. — Trouver une courbe plane telle que, si d'un point fixe pris dans son plan on mène des rayons vecteurs à ses différents points, le lieu de la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur correspondant soit une courbe symétrique de la proposée par rapport au point fixe.

On vérifiera que la courbe trouvée satisfait bien à la condition énoncée.

Composition de Mécanique. — On donne un cylindre vertical à base circulaire, et par un point B de sa surface on lance un point matériel pesant, assujetti à rester sur la surface de ce cylindre. La vitesse initiale est V_0; elle fait un angle α avec la génératrice du point B.

On demande de déterminer le mouvement du point. On demande en outre de déterminer à quelle hauteur maximum il s'élèvera.

Quelle doit être la vitesse initiale V_0 pour que le point, en atteignant cette hauteur maximum, se retrouve sur la génératrice du point de départ B?

Trouver la forme que prend la trajectoire du mobile lorsqu'on développe la surface cylindrique sur un plan.

Calculer la réaction du cylindre sur le point.

Épreuve pratique. — On a mesuré en un lieu de la Terre les hauteurs d'une étoile et du centre de la Lune au-dessus de l'horizon, ainsi que leur différence d'azimut, et l'on demande sous quel angle leur distance serait vue du centre de la Terre, en tenant compte de la réfraction.

Données.

Hauteur de l'étoile...............	$27°,35'$
Hauteur du centre de la Lune.....	$35,20'$
Différence des azimuts............	$13,15'$
Parallaxe horizontale de la Lune..	$57',2''$

Réfraction $\theta = 60'',6 \tang z$, z étant la distance zénithale de l'astre.

Lyon.

Composition d'Analyse. — On demande d'intégrer l'équation

$$(y^3 + 2xy^2)\,dy - 2y^3\,dx + (x+y)(x\,dy - x\,dx) = 0.$$

On indiquera de plus la marche à suivre pour trouver un facteur d'intégrabilité homogène quand l'équation à intégrer présente cette forme.

Composition de Mécanique. — Un mobile libre non pesant est attiré vers deux centres fixes par deux forces proportionnelles à la distance et dont les intensités sont respectivement comme 1 à 3, à l'unité de distance.

On demande d'étudier le mouvement du mobile en supposant qu'il soit d'abord en repos et que le mouvement ait lieu, soit dans le vide, soit dans un milieu résistant. On admettra dans ce dernier cas que la résistance est proportionnelle à la vitesse et a un coefficient très faible.

Épreuve pratique. — En un lieu dont la latitude est égale à $48^\circ 50' 49''$, on trouve, à un moment donné, pour hauteur d'une étoile $13^\circ 57' 52''$ et pour déclinaison $8^\circ 25' 45'', 2$. On demande l'angle horaire de l'étoile au moment de l'observation.

Montpellier.

Composition d'Analyse. — Déterminer l'équation finie d'une courbe gauche d'après les conditions suivantes :

1° La courbe est située sur la surface du cône $x^2 + y^2 = k^2 z^2$;

2° Toutes les tangentes à cette courbe rencontrent le cercle

$$z = h, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Rectification de la courbe. Calcul de la surface du cône comprise entre l'arc et la courbe de deux génératrices fixes.

Composition de Mécanique. — Équations de l'équilibre d'un fil flexible. Application à la chaînette.

Épreuve pratique. — On a trouvé pour les distances zénithales de deux étoiles les valeurs

$$\begin{aligned} z &= 73^\circ 19' 26'', 5, \\ z' &= 40^\circ 53' 56'', 3, \end{aligned}$$

leurs déclinaisons étant d'ailleurs

$$\begin{aligned} D &= 69^\circ 55' 36', 4, \\ D' &= 81^\circ 34', \end{aligned}$$

et la différence $\text{Æ} - \text{Æ}'$ de leurs ascensions droites étant

$$78^\circ 49' 38'', 3.$$

On demande : 1° d'indiquer les opérations à effectuer pour trouver l'angle du vertical d'une de ces étoiles et de son plan horaire; 2° en supposant que cet angle ait été trouvé égal à 43° 29′ 8″,3, calculer la latitude du lieu et l'angle horaire correspondant à l'observation des deux astres faite simultanément par deux observateurs.

Nancy.

Composition d'Analyse. — 1° Soit une intégrale définie $\int_0^b f(x)\,dx$, dans laquelle $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = c$ comprise entre a et b; supposons qu'on puisse mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(c-x)^n}$$

n étant positif, et $\varphi(x)$ n'étant pas nul pour $x = c$ et restant fini entre $x = a$ et $x = b$.

On demande d'expliquer dans quel cas $\int_a^b f(x)dx$ sera fini, dans quel cas $\int_a^b f(x)\,dx$ sera infini.

Exemples à prendre:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^{\frac{1}{2}}}, \quad \int_0^\pi \cos^{-p} x \sin^{-q} x\,dx.$$

On demande de démontrer que $\int_a^b f(x)dx$ peut être indéterminé. Les candidats choisiront pour exemple $\int_1^{+1} \frac{dx}{x}$, et montreront comment cette intégrale pourra devenir déterminée si l'on fait varier x de -1 à $+1$ en le faisant passer par des valeurs imaginaires.

2° Prouver que l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

où n est un nombre entier positif, peut être satisfaite par un polynôme entier et comment on peut en conclure la solution générale.

Composition de Mécanique. — 1° Démontrer le principe de d'Alembert.

2° Étudier le mouvement du pendule cycloïdal dans un milieu qui résiste proportionnellement à la vitesse.

Épreuve pratique. — Résolution d'un triangle sphérique.

Toulouse.

Composition d'Analyse. — On considère la surface enveloppe de la sphère représentée par l'équation contenant deux paramètres arbitraires a et b,

$$(x-a)^2+(y-b)^2+[z-F(b)]^2=\varphi^2(a),$$

F et φ étant deux fonctions données quelconques. Trouver les lignes de courbure de cette surface. On montrera que les lignes de courbure sont des lignes planes et que les plans d'un des systèmes sont parallèles au plan des yz.

Composition de Mécanique. — Une plaque pesante, homogène, infiniment mince, d'égale épaisseur et dont la forme est celle d'un triangle rectangle, peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe perpendiculaire à ce plan et passant par le sommet de l'angle droit. Déterminer :

1° L'angle que fait l'un des côtés de l'angle droit avec l'horizontale située dans le plan d'oscillation de la plaque et passant par le sommet de cet angle droit, quand la plaque est en équilibre;

2° L'amplitude des oscillations que la plaque exécute lorsqu'on l'abandonne à son poids après avoir amené le côté considéré dans une position horizontale.

Épreuve pratique. — Une étoile dont la déclinaison est $+15°$ passe au méridien d'un lieu à 2^h (temps sidéral). La latitude du lieu est 35°. A quelle heure sidérale l'étoile se couchera-t-elle ?

Rennes.

Composition d'Analyse. — Intégration de l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

dans laquelle x, y, z sont trois variables indépendantes et X, Y, Z trois fonctions données de ces variables. Prouver que, si l'expression est une différentielle exacte, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b \left(X + Y\frac{dy}{dx} + Z\frac{dz}{dx}\right) dx,$$

dans laquelle on regarde y et z comme des fonctions de x, est indépendante de ces fonctions, pourvu que leurs valeurs limites soient toujours les mêmes.

Composition de Mécanique. — Un mobile sollicité par une force dirigée vers un point fixe et fonction de sa distance à ce point est observé par une personne placée au centre d'action, perpendiculairement au plan qui contient ce centre, et la vitesse initiale du mobile est animée d'un mouvement de rotation sur elle-même. Le rayon vecteur qui joint l'observateur au mobile paraît tourner uniformément avec la vitesse angulaire ω'. Quelle est à chaque instant la vitesse angulaire ω de l'observateur et quelle sera la trajectoire apparente?

Si la force est proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance, que devra être l'exposant de cette puissance pour que les calculs puissent se ramener aux fonctions élémentaires? Examiner spécialement les cas $n = 1$, $n = -2$.

Épreuve pratique. — Épure : intersection d'une sphère et d'un cône.

Clermont.

Composition d'Analyse. — Trouver les aires des boucles formées par les courbes dont les équations suivent :

$$1^\circ \quad x^{2n+1} + y^{2n+1} = a(xy)^n,$$

$$2^\circ \quad x^{2n} + y^{2n} = a(xy)^{n-1}.$$

Dans les deux cas, n désigne un nombre entier positif.

Composition de Mécanique. — Mouvement d'un point pesant sur la courbe

$$ax + s - \frac{e^{ns} - 1}{n} = 0,$$

sachant qu'il y a une résistance proportionnelle au carré de la vitesse, cette résistance étant exprimée par la formule $R = nv^2$.

Épreuve pratique. — On donne la déclinaison et l'ascension droite d'une étoile. On demande de calculer la longitude et la latitude.

Lille.

Composition d'Analyse. — 1° Intégrer l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (y - x)^2.$$

2° Des lignes asymptotiques sur une surface à courbures opposées. Équation différentielle de ces lignes. Détermination de leur plan osculateur. Leur courbure peut-elle s'obtenir par l'emploi du théorème de Meusnier, relatif à la courbure des sections obliques d'une surface?

Composition de Mécanique. — 1° Établir les trois équations, dites *équations d'Euler,* qui déterminent le mouvement d'un corps solide autour d'un corps fixe sous l'action de forces données.

2° Un pendule composé est formé : 1° d'une tige OA pesante et homogène, de longueur connue $2a$ et de masse M; 2° d'un corps de forme quelconque, de masse μ, dont le centre de gravité B peut être fixé en un point variable de la tige OA. On connaît le rayon K de giration de ce corps par rapport à un axe mené par son centre de gravité, parallèle à l'axe de suspension horizontale Oz.

Comment varie la durée des oscillations infiniment petites de ce pendule avec la position du point B sur la tige? (On ne déplace le corps B le long de la tige que par un mouvement de translation.)

Épreuve pratique. — La longitude de Moscou étant $35°17'30''$ et sa colatitude $34°14'47''$, trouver l'azimut de Moscou sur l'horizon de Paris, azimut compté du Nord et sa distance sphérique à Paris. On sait que la colatitude de Paris est $41°9'8''$.