BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

PAUL TANNERY

# Sur le problème des boeufs d'archimède

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 5, nº 1 (1881), p. 25-30

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_25_1>

## MÉLANGES.

### SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS D'ARCHIMÈDE;

PAR M. PAUL TANNERY.

En 1773, Lessing fit connaître, d'après un manuscrit de la bi-

([1]) *Aperçu historique*, p. 530 (edit. allemande, p. 642).
([2]) CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 640.

bliothèque de Wolfenbüttel, une épigramme grecque donnant, en quarante-quatre vers, l'énoncé d'un problème d'Analyse indéterminée qu'Archimède aurait, dans une Lettre à Ératosthènes, proposé aux géomètres alexandrins.

Il s'agit de calculer le nombre des bœufs du Soleil, distingués en quatre troupeaux, de couleurs blanche, noire, rousse et mêlée. D'après les notations modernes, les nombres $\lambda$, $\varkappa$, $\xi$, $\mu$ des taureaux de ces quatre troupeaux et ceux $\lambda'$, $\varkappa'$, $\xi'$, $\mu'$ des vaches doivent satisfaire aux neuf équations suivantes, qui contiennent deux autres indéterminées, $p$ et $q$ :

$$(1)\quad \lambda = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\varkappa + \xi, \qquad (4)\quad \lambda' = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(\varkappa+\varkappa'),$$

$$(2)\quad \varkappa = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\mu + \xi, \qquad (5)\quad \varkappa' = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(\mu+\mu'),$$

$$(3)\quad \mu = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\lambda + \xi, \qquad (6)\quad \mu' = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(\xi+\xi'),$$

$$(7)\quad \xi' = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(\lambda+\lambda'),$$

$$(8)\quad \lambda+\varkappa = p^2, \qquad (9)\quad \mu\varkappa+\xi = \frac{q(q+1)}{2}.$$

La solution du système formé par les sept premières conditions n'offre aucune difficulté ; elle donne les huit inconnues comme multiples d'une même indéterminée $x$, par des coefficients qui ont d'ailleurs de huit à neuf chiffres. Cette indéterminée est supposée égale à 80 dans les nombres donnés par une scolie qui accompagnait l'épigramme dans le manuscrit et que Lessing a également publiée.

Mais ces nombres ne satisfont à aucune des deux dernières équations, qui conduisent à une équation de Pell dont la solution numérique est matériellement impossible, eu égard à la longueur des calculs qu'elle entraînerait.

L'examen du problème « des bœufs », et la question de son authenticité, en tant qu'il est attribué à Archimède, ont fait, en Allemagne, l'objet d'assez nombreux travaux (Leiste, Struve, Klügel, Hermann, Wurm, Nesselmann, Heiberg) : Gauss lui-même paraît l'avoir traité à fond, mais il n'a rien publié à ce sujet. En France, il n'y a guère que Vincent (*Nouvelles Annales de Mathéma-*

*tiques*, t. XIV, XV) qui s'en soit occupé; mais il ne considère comme authentiques que les trois premières conditions, et rejette toutes les autres, comme ajoutées par des mains relativement modernes.

Le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* vient de publier (t. XXV, 1880, *Historisch-literarische Abtheilung*, p. 121-136 et 153-171), de B. Krumbiegel pour la partie philologique, de A. Amthor pour la partie mathématique, une nouvelle étude sur le *Das Problema bovinum des Archimedes*. On doit, à notre sens, la considérer comme définitive.

Sur la question de l'authenticité, les conclusions de cette étude représentent exactement l'opinion que nous avons déjà eu l'occasion d'émettre ailleurs (1), à savoir que, dans sa forme actuelle, l'épigramme est probablement postérieure à Archimède, mais que, quant au problème lui-même, il est non seulement très possible, mais encore très vraisemblable qu'il est réellement dû au célèbre géomètre de Syracuse.

Sans répéter l'argumentation très serrée du Dr Krumbiegel, je me contenterai d'y ajouter les deux remarques que j'ai faites sur cette question.

L'une est que le passage du Scoliaste de Platon sur le Charmide, qu'Hermann a signalé le premier comme parlant de *ce qu'Archimède a appelé le problème des bœufs*, paraît copié d'un Ouvrage de Geminus, mathématicien vivant au 1er siècle avant notre ère; on le reconnaît en comparant les extraits de Geminus, faits par Proclus dans ses *Commentaires sur le premier Livre des Éléments d'Euclide*, avec ceux qu'a recueillis l'anonyme de la Collection héronienne (éd. Hultsch, p. 248), et où se retrouve le passage en question.

Notre seconde remarque est que la proposition d'un problème impossible comme celui des bœufs concorde, comme trait de caractère chez Archimède, avec l'énoncé qu'il se vante (Préface du Traité des *Spirales*) d'avoir fait de théorèmes faux dans une Lettre à Conon, dans le but de convaincre de mensonge les géomètres qui auraient prétendu en avoir trouvé les démonstrations.

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III, 2e série, dans notre essai sur *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus*.

Nous allons parler plus longuement des intéressants résultats obtenus par le Dr Amthor.

Soit $x$ l'indéterminée qui reste après la solution du système des sept premières équations; les deux dernières sont satisfaites en posant

$$x = 3.11.29.4657 y^2,$$
$$2q + 1 = t,$$
$$2.4657 y = u,$$

et en résolvant l'équation de Pell

$$(10) \qquad t^2 - 2.3.7.11.29.353 u^2 = 1,$$

de façon que

$$(11) \qquad u \equiv 0 \pmod{2.4657}.$$

M. Amthor commence par chercher la plus petite solution $(t_1, u_1)$ de l'équation (10); la racine du déterminant se développe en une fraction continue dont la période régulière a 91 termes; il calcule $t_1$, qui a 45 figures, et $u_1$, qui en a 41.

Ces calculs, quoique fastidieux, ne sont pas exorbitants. Dans un essai en cours d'impression sur la *Mesure du cercle d'Archimède* (1), j'ai exposé comme *pouvant* être connue du géomètre de Syracuse une méthode de calculs analogues à ceux qu'entraîne le développement en fractions continues. M'étant proposé, à cette occasion, de traiter l'équation (10), je suis arrivé à une période de 58 termes, et j'ai admis que le calcul de ces termes n'eût été qu'un jeu pour Archimède. Je ne puis croire, à la vérité, qu'il ait eu la patience de calculer $t_1$ et $u_1$, comme l'a fait M. Amthor; mais qui a lu l'*Arénaire* ne peut douter que, ayant les éléments de la période, Archimède ne fût en état de déterminer l'ordre (pour nous le nombre des figures) de ces inconnues avec une approximation suffisante pour son but probable, la composition d'un problème qui rebutât tout calculateur.

Quant à satisfaire à la condition (11), il ne me paraît guère supposable qu'Archimède se soit préoccupé de savoir quel surcroît de

---

(1) Il sera publié dans le tome IV (2e série) des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.

besogne elle eût imposé ; mais il n'en est pas moins intéressant de voir, avec M. Amthor, à quels nombres effrayants elle conduit.

Le persévérant calculateur allemand commence par établir quelques lemmes sur l'équation de Pell $t^2 - Du^2 = 1$.

1. Soit $(t_m, u_m)$ la solution dérivant du développement de la puissance $m$ de $t_1 + u_1\sqrt{D}$, en sorte que

$$t_m + u_m\sqrt{D} = (t_1 + u_1\sqrt{D})^m;$$

on a en général

$$t_{m+n} = t_m t_n + u_m u_n D,$$
$$u_{m+n} = t_n u_m + t_m u_n,$$

et en particulier

$$t_{2m} = t_m^2 + u_m^2 D,$$
$$u_{2m} = 2t_m u_m.$$

2. Si l'on cherche toutes les valeurs de $u$ satisfaisant à l'équation de Pell et divisibles par M, supposé premier, elles sont comprises sous la forme $u_{\alpha\rho}$, $u_\rho$ étant la plus petite d'entre elles, et $\alpha$ étant un nombre entier quelconque.

3. Si M ne divise pas D, ni $t_1$, ni $u_1$, on a

$$t_{M-1} \equiv 1, \quad u_{M-1} \equiv 0 \pmod{M},$$

ou

$$t_{M+1} \equiv 1, \quad u_{M+1} \equiv 0 \pmod{M},$$

suivant que D est ou non résidu quadratique par rapport au premier M.

4. Par conséquent, pour trouver $\rho$, $u_\rho$ étant la plus petite valeur de $u$ satisfaisant à l'équation de Pell et divisible par M, il suffit d'essayer les diviseurs de $M - 1$ ou ceux de $M + 1$, suivant le cas; les calculs sont facilités par l'emploi du lemme 1.

Pour satisfaire à la condition (11), il n'y a pas à s'inquiéter du facteur 2, car il divise déjà $u_1$; quant au premier 4657, $D = 4729494$ est non résidu quadratique par rapport à lui. Il faut donc essayer les diviseurs de

$$4658 = 2.17.137.$$

En calculant les résidus de $t$, $u$ par rapport au module 4657, on trouve que la plus petite solution satisfaisant à la condition (11) est

$$t_{2329},\quad u_{2329}.$$

M. Amthor se sert ensuite des logarithmes pour déterminer le nombre des chiffres et, par quelques remarques simples, établit que le nombre des bœufs du Soleil, d'après la solution minima, a 206545 figures.

Il suffit de remarquer qu'une page d'une Table de logarithmes de Callet ne contenant guère que 2500 chiffres, il faudrait, à ce format, un Volume de 744 pages pour imprimer les neuf nombres, partiels et total, demandés par l'épigramme.

Quant à l'énormité de pareils nombres, eu égard à nos moyens de mesure, elle dépasse absolument l'imagination; mais ils sont encore bien loin d'atteindre la limite de la *première* période de la numération proposée par Archimède dans l'*Arénaire*, soit $10^{800\,000\,000}$.