BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ÉMILE PICARD

# Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique, et sur une classe d'équations différentielles

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série*, tome 4, nº 1 (1880), p. 416-432

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_416_0>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# MÉLANGES.

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE LIÉES PAR UNE RELATION ALGÉBRIQUE, ET SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Désignons par $u$ et $v$ deux fonctions uniformes d'une variable $z$, liées par la relation algébrique irréductible de degré $m$

$$F(u, v) = 0. \tag{1}$$

Je me propose de montrer, dans ce travail, comment on peut trouver les formes possibles des deux fonctions $u$ et $v$, et il résultera tout naturellement de cette recherche que le nombre caractéristique, ordinairement désigné par $p$, relatif à l'équation (1) ne peut être que zéro ou l'unité. Tel est l'objet de la première Partie de cette étude, auquel on peut encore donner la forme géométrique suivante.

Une courbe étant définie par une relation telle que (1) entre les coordonnées $u$ et $v$ d'un quelconque de ses points, deux cas particulièrement intéressants et bien connus sont ceux où le genre $p$ de la courbe est égal à zéro ou à l'unité. On sait que dans le premier cas $u$ et $v$ peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide d'un paramètre, et dans le second cas on peut les regarder comme des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes d'un paramètre $z$. On peut donc, dans ces deux cas, mettre $u$ et $v$ sous la forme

$$u = P(z), \quad v = Q(z),$$

P et Q étant des fonctions uniformes de $z$ n'ayant d'autres points singuliers que des pôles. On est amené tout naturellement à se poser alors la question suivante : Existe-t-il d'autres courbes algébriques que celles du genre 0 et 1, dont les coordonnées soient susceptibles de s'exprimer par des fonctions uniformes d'un paramètre à discontinuités exclusivement polaires? L'étude analytique dont j'ai annoncé plus haut le résultat montre qu'il n'existe pas d'autres courbes algébriques que celles du genre o ou 1, jouissant de cette propriété.

La seconde Partie de ce travail est consacrée à quelques applications des résultats précédemment obtenus. Je fais notamment une étude détaillée de l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0,$$

où F est un polynôme, en me proposant de reconnaître si cette équation admet ou non des intégrales uniformes.

## I.

**1.** Examinons d'abord le cas où la courbe représentée par l'équation (1) serait unicursale. On peut alors exprimer rationnellement $u$ et $v$ au moyen d'un paramètre, et cela de telle manière qu'à un système de valeurs de $u$ et $v$ ne corresponde qu'une seule valeur de ce paramètre (pour ce dernier point, *voir* Lüroth, *Math. Ann.*, t. IX).

Soient, par exemple,

$$u = \varphi(\lambda), \quad v = \varphi_1(\lambda),$$

et l'on pourra tirer de ces deux équations $\lambda = f(u, v)$, $f$ étant une fonction rationnelle de $u$ et $v$. Or, si $u$ et $v$ sont des fonctions uniformes à discontinuités exclusivement polaires, $\lambda$ sera une fonction de même nature, que nous désignerons par R($z$), et l'on aura, par suite,

$$u = \varphi\,[R(z)],$$
$$v = \varphi_1[R(z)].$$

Telle est donc la forme des fonctions $u$ et $v$ dans le cas où le nombre $p$, relatif à l'équation (1), a la valeur zéro.

**2.** Abordons maintenant le cas général. Nous supposerons, comme on le fait dans la théorie des fonctions abéliennes, que l'équation (1) contienne un terme de degré $m$ par rapport à $v$ et que le rapport $\frac{v}{u}$ ait $m$ valeurs finies et distinctes pour $u = \infty$.

Soit

$$(2)\qquad \int \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)}$$

une intégrale abélienne de première espèce relative à l'équation (1), $f(u, v)$ désignant un polynôme convenable de degré $m-3$. J'envisage l'expression

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)},$$

qui est manifestement, comme $u$ et $v$, une fonction uniforme de $z$; mais je veux montrer de plus que cette fonction est une fonction entière, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de pôles.

Examinons d'abord ce qu'elle devient pour un pôle $z=\alpha$ de $u$. Dans le voisinage de $u$ infini, on aura, puisque l'intégrale considérée est de première espèce,

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)}=\frac{P\left(\dfrac{1}{u}\right)}{u^m},$$

$P\left(\dfrac{1}{u}\right)$ représentant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\dfrac{1}{u}$ et prenant une valeur différente de zéro pour $u=\infty$, et $m$ étant un entier égal ou supérieur à 2. Désignons par $n$ le degré de multiplicité du pôle $\alpha$; on aura

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)}=(z-\alpha)^{mn}P(z-\alpha),$$

$P(z-\alpha)$ représentant d'une manière générale une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z-\alpha$, et par suite

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)}=(z-\alpha)^{(m-1)n-1}P(z-\alpha).$$

Or on a certainement

$$(m-1)n \geqq 1,$$

puisque $n$ n'est pas nul et que l'entier $m$ est égal ou supérieur à 2; par suite, l'expression (2) garde une valeur finie pour $z=\alpha$.

Soit, maintenant, $z_0$ une valeur de $z$ telle que la valeur correspondante $u_0$ de $u$ soit un point critique de la fonction algébrique de $u$, définie par l'équation (1), et désignons par $v_0$ la valeur de $v$ pour $z = z_0$. A une valeur de $z$ voisine de $z_0$ correspondent une valeur de $u$ et une valeur de $v$. Supposons que cette dernière fasse partie d'un certain système circulaire de racines de l'équation (1), relatif au point critique $u_0$, et soit $p$ le degré de ce système circulaire. Je suppose que ce degré soit réduit autant que possible, c'est-à-dire que ce ne puisse être qu'après un nombre de tours égal à un multiple de $p$ de la variable $u$ autour de $u_0$, que la fonction algébrique $v$ reprenne la même valeur. Il est facile de voir que dans ces conditions $z = z_0$ devra être une racine de l'équation $u = u_0$, avec un degré de multiplicité égal à $p$ ou à un multiple $\lambda p$ de $p$. En effet, soit $q$ ce degré de multiplicité; $z$ ayant tourné une fois autour de $z_0$, $u$ a tourné $q$ fois autour de $u_0$ et $v$ a nécessairement repris la même valeur; donc $q$ doit être un multiple de $p$.

On a nécessairement d'ailleurs, dans le voisinage de $u = u_0$,

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)} = \frac{M(u)}{(u-u_0)^{\frac{q}{p}}},$$

$M(u)$ prenant une valeur finie et différente de zéro pour $u = u_0$, et l'entier positif ou négatif $q$ satisfaisant à l'inégalité $q < p$. Cela résulte immédiatement de ce que l'intégrale

$$\int^u \frac{f(u,v)\,du}{F'_u(u,v)} = \int^u \frac{M(u)\,du}{(u-u_0)^{\frac{q}{p}}}$$

doit rester finie quand $u$ tend vers zéro.

$u - u_0$ contenant d'autre part en facteur $(z-z_0)^{\lambda p}$, et, par suite, $\dfrac{du}{dz}$ contenant le facteur $(z-z_0)^{\lambda p-1}$, on aura manifestement

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)} = (z-z_0)^{\lambda(p-q)-1}\,P,$$

P prenant une valeur finie et différente de zéro pour $z = z_0$. Mais on a

$$\lambda(p-q) \geqq 1,$$

puisque $p-q>0$ et que l'entier $\lambda$ est au moins égal à 1.

Par suite, l'expression (2) garde une valeur finie pour $z=z_0$.

Il peut arriver que $F'_v(u,v)$ s'annule pour un système de valeurs $u_0$, $v_0$ et que, dans le voisinage de $u_0$, la racine considérée $v$ soit une fonction holomorphe de $u$. Il est évident que dans ce cas le quotient

$$\frac{f(u,v)}{F'_v(u,v)}$$

est holomorphe dans le voisinage de $u_0$, et la conclusion précédente subsiste.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{f(u,v)\dfrac{du}{dz}}{F'_v(u,v)} = G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière. On en déduit par l'intégration, en désignant par $u_0$ la valeur de $u$ correspondant à une valeur $z_0$ de $z$,

$$(3) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = \int_{z}^{z} G(z)\,dz = G_1(z),$$

$G_1(z)$ étant, comme $G(z)$, une fonction entière.

Nous allons montrer que la relation entre les deux fonctions uniformes $u$ et $G_1$ est impossible si le nombre $p$ relatif à l'équation $F(u,v)=0$ est supérieur à l'unité. Supposons, en effet, qu'il en soit ainsi. Dans ce cas, nous pouvons supposer que l'intégrale

$$(4) \qquad \int_{u_0}^{u} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)}$$

a au moins trois périodes distinctes. Une intégrale déterminée de première espèce, relative à une fonction algébrique d'un genre $p$ supérieur à l'unité, peut bien avoir moins de trois périodes; mais on sait que la même chose ne peut arriver pour une intégrale quelconque, comme l'est l'intégrale (4). Cela posé, revenons à la relation (3); elle montre qu'à une valeur donnée de $u$ correspondent deux valeurs de $G_1(z)$ différant d'aussi peu qu'on voudra, puisqu'on peut ajouter à l'intégrale une somme des multiples des périodes, et, celles-ci étant en nombre au moins égal à trois, on sait que cette somme peut être rendue moindre que toute quantité donnée; mais à deux valeurs très voisines de $G_1(z)$ correspondent évidemment deux valeurs de $z$, elles-mêmes très voisines, et nous arrivons, par suite, à cette conclusion inadmissible, qu'à une valeur de $u$ correspondent deux valeurs de $z$ dont la différence a un module aussi petit qu'on voudra. La seule hypothèse que nous puissions faire est donc que $p = 1$.

Dans ce cas, la relation (3) montre de suite que $u$ est une fonction doublement périodique $F[G_1(z)]$ de la fonction entière $G_1(z)$.

A cause de la relation

$$F'_u\,du + F'_v\,dv = 0$$

ou

$$\frac{du}{F'_v(u,v)} = -\frac{dv}{F'_u(u,v)},$$

on aura

$$\int_{v_0}^{v'} \frac{f(u,v)\,dv}{F'_u(u,v)} = -\int_{u_0}^{u'} \frac{f(u,v)\,du}{F'_v(u,v)} = -G_1(z),$$

et, par suite, $v$ sera, comme $u$, une fonction doublement périodique aux mêmes périodes de $G_1(z)$.

Ainsi, en résumé, le genre de la relation algébrique

$$F(u,v) = 0$$

doit être égal à zéro ou à l'unité. Dans le premier cas, on a

$$u = \varphi[R(z)], \quad v = \varphi_1[R(z)],$$

$\varphi$ et $\varphi_1$ étant des fonctions rationnelles de $R(z)$, qui est une fonction uniforme, quelconque d'ailleurs, à discontinuités exclusivement polaires, et l'on a dans le second

$$u = F[G_1(z)], \quad v = F_1[G_1(z)],$$

$F$ et $F_1$ étant des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes, et $G_1(z)$ une fonction entière, qui peut d'ailleurs être quelconque.

## II.

Je me propose d'indiquer maintenant quelques applications de la proposition précédente, et j'ai surtout en vue l'intégration d'une classe d'équations différentielles.

1. Nous allons déduire immédiatement du théorème précédent la démonstration de la proposition suivante. On ne peut satisfaire à l'équation de Fermat,

$$X^n + Y^n + Z^n = 0,$$

en prenant pour X, Y et Z des fonctions uniformes à discontinuités uniquement polaires, que si l'entier $n$ est au plus égal à 3. Si l'on pose, en effet, $\frac{X}{Z} = u$ et $\frac{Y}{Z} = v$, on a la relation

$$u^n + v^n + 1 = 0,$$

et, si $n$ n'est pas égal à 1, 2 ou 3, le nombre $p$ relatif à cette équation est supérieur à l'unité. Si $n = 3$, on a $p = 1$ et $u$ et $v$ sont alors des fonctions doublement périodiques d'une fonction entière.

2. Considérons encore, avant d'aborder la classe d'équations qui fait le principal objet de cette étude, les équations

$$(1) \qquad F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0,$$

en se proposant de chercher dans quels cas on peut y satisfaire par des fonctions uniformes de $z$. C'est le problème que se sont posé MM. Briot et Bouquet dans leur mémorable travail sur l'intégration de certaines équations différentielles, au moyen des fonctions elliptiques.

Tout d'abord le genre de la relation algébrique (1) doit être égal à zéro ou à l'unité. Cela posé, étant donnée la relation

$$F(u, v) = 0,$$

dont le genre est, par hypothèse, zéro ou l'unité, on peut, dans le premier cas, exprimer rationnellement $u$ et $v$ au moyen d'un paramètre $\lambda$,

$$u = \varphi(\lambda), \quad v = \varphi_1(\lambda);$$

dans le second, exprimer $u$ et $v$ par des fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes de $\lambda$, pour lesquelles nous garderons les mêmes notations, et nous pouvons regarder dans l'un et l'autre cas les fonctions $\varphi$ et $\varphi_1$ comme déterminées.

Soit d'abord $p = 0$; on devra avoir alors

$$u = \varphi[R(z)], \quad \frac{du}{dz} = \varphi_1[R(z)],$$

$R(z)$ étant une fonction uniforme.

On en conclut que

$$(2) \qquad \varphi'(R)R' = \varphi_1(R)$$

ou

$$\frac{dR}{dz} = \psi(R),$$

$\psi$ étant une fonction rationnelle de R.

Mais il est bien aisé de voir qu'une pareille équation ne peut avoir d'intégrale uniforme que si $\psi(R)$ se réduit à un polynôme du second degré $AR^2 + BR + C$.

On doit donc avoir

$$\varphi_1(R) = \varphi'(R)(AR^2 + BR + C),$$

A, B et C étant trois constantes.

Si $p$ est égal à 1, on voit que l'équation (2) ne pourra avoir d'intégrales uniformes que si $\varphi_1$ et $\varphi'$ sont dans un rapport constant, et dans ce cas $R(z)$ se réduit à $Az + B$, A et B étant deux constantes.

3. J'envisage maintenant les équations différentielles de la forme

$$F\left(u, \frac{d^2u}{dz^2}\right) = 0,$$

F étant un polynôme, en me proposant de rechercher dans quels cas elle admettra des intégrales uniformes. Le genre de la relation précédente doit être tout d'abord égal à zéro ou à l'unité; plaçonsnous d'abord dans la première hypothèse, et nous pouvons écrire

$$u = \varphi[R(z)], \quad \frac{d^2u}{dz^2} = \varphi_1[R(z)],$$

$\varphi$ et $\varphi_1$ étant des fonctions rationnelles que l'on peut considérer comme données. Or la première égalité donne de suite

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \varphi''(R)R'^2 + \varphi'(R)R'';$$

donc on a

$$\varphi_1(R) = \varphi''(R)R'^2 + \varphi'(R)R'',$$

et nous avons à chercher si l'on peut satisfaire à cette équation par des fonctions uniformes R. Or posons $R' = p$; cette équation s'écrira

$$\varphi_1(R) = \varphi''(R)p^2 + \varphi'(R)p\frac{dp}{dR},$$

et enfin, en posant $p^2 = P$,

$$2\varphi_1(R) = 2\varphi''(R)P + \varphi'(R)\frac{dP}{dR},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\text{(I)} \qquad P \quad \text{ou} \quad \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int\varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR}{[\varphi'(R)]^2}.$$

Nous sommes donc amenés à rechercher dans quels cas une pareille relation différentielle pourra être satisfaite par une fonction uniforme R.

4. Supposons d'abord que l'intégrale $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ ne contienne pas de terme logarithmique; $\left(\frac{dR}{dz}\right)^2$ sera, dans ce cas, une fonction rationnelle de R. Nous devons donc voir dans quels cas l'équation

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R)$$

admettra une intégrale uniforme, F étant une fonction rationnelle de R.

Il résulte immédiatement des recherches de MM. Briot et Bouquet que $F(R)$ ne peut être qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à 4. Nous aurons donc à rechercher si l'on peut déterminer la constante entrant dans l'intégrale

$$\int \varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR$$

de manière que le quotient $\frac{2\int \varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2}$ soit un polynôme d'un degré inférieur ou au plus égal à 4. Il est manifeste que trois cas pourront se présenter : il pourra en être ainsi soit pour toute valeur de la constante, et alors toutes les intégrales de l'équation seront uniformes, soit pour une seule valeur de cette constante, et alors l'équation proposée aura une première intégrale uniforme, et par suite toutes celles qu'on obtient en remplaçant dans celle-ci $z$ par $z$ plus une constante; il pourra enfin arriver, et ce sera le cas général, que l'on ne puisse pas déterminer d'une manière convenable la constante d'intégration.

5. Abordons maintenant le cas où l'intégrale $\int \varphi_1\varphi'\,dR$ donnerait naissance à des termes logarithmiques. Soit $A\log(R-a)$ un pareil terme, $A$ étant nécessairement une constante. Montrons d'abord que l'équation $R(z)=a$ ne pourra avoir de racine. Supposons, en effet, que $R(z_0)=a$; on aura

$$R(z)-a=(z-z_0)^m\,P(z),$$

$P(z)$ désignant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $z-z_0$ et ne s'annulant pas pour $z=z_0$.

Donc $A\log(R-a)$ sera égal à $mA\log(z-z_0)+A\log P(z)$.

Si donc nous considérons l'égalité

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2=\frac{2\int \varphi_1\varphi'\,dR}{\varphi'^2},$$

on voit que le second membre n'est pas une fonction uniforme de $z$ autour de $z_0$, puisque par une rotation autour de ce point son numérateur augmente de $2mA\pi i$; le premier membre, au contraire, est une fonction uniforme de $z$, dans le voisinage de $z_0$; l'égalité précédente est donc impossible.

Nous pouvons maintenant établir que l'intégrale $\int \varphi_1\varphi'\,dR$ ne pourra pas, si l'intégrale de l'équation (I) est, comme nous le supposons, uniforme, contenir plus de deux termes logarithmiques. On sait, en effet, comme je l'ai montré dans mon Mémoire sur les fonctions entières (*Annales de l'École Normale*, 1880), qu'il ne peut y avoir plus de deux valeurs $a$ et $b$ pour lesquelles les équations $R(z) = a$ et $R(z) = b$ n'aient pas de racines, $R(z)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan à discontinuités exclusivement polaires.

6. Supposons d'abord qu'il n'y ait dans l'intégrale qu'un terme logarithmique. Notre équation (I) aura la forme

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R) + f(R) \log(R - a),$$

F et $f$ étant des fonctions rationnelles de R, et $f$ n'étant pas identiquement nul.

Je dis qu'une fonction uniforme intégrale de cette équation ne peut être qu'une fonction entière, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de pôles. Soit, en effet, $z_0$ un pôle de R; on aura dans le voisinage de ce point

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^m},$$

$P(z_0)$ étant différent de zéro, et l'on voit que le second membre de (I), contenant le terme non uniforme

$$- mf\left[\frac{P(z)}{(z - z_0)^m}\right] \log(z - z_0),$$

ne serait pas, comme le premier, uniforme dans le voisinage de $z_0$.

D'autre part, $\frac{dR}{dz}$ ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de R, car, en posant $\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \psi(R)$, on a de suite

$$z - z_0 = \int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{\psi(R)}},$$

et $z$ a une valeur déterminée $z_1$ quand R tend vers une valeur $\alpha$

rendant $\psi(\mathrm{R})$ infini; donc, pour une valeur $z_1$ de $z$, R prend une valeur $\alpha$ et $\frac{d\mathrm{R}}{dz}$ est infini, ce qui est impossible. Cela montre de suite que $\mathrm{F}(\mathrm{R})$ et $f(\mathrm{R})$ doivent être nécessairement des polynômes. On voit ensuite que l'expression

$$\mathrm{F}(\mathrm{R})+f(\mathrm{R})\log(\mathrm{R}-a)$$

doit s'annuler pour $\mathrm{R}=a$. Sinon, on pourrait certainement trouver une valeur finie de $z$ pour laquelle R serait égal à $a$, et nous savons que cela ne peut être. Les deux polynômes F et $f$ doivent donc s'annuler pour $\mathrm{R}=a$.

Montrons maintenant que leur degré ne peut surpasser le second. J'envisage, à cet effet, l'intégrale

$$\text{(II)} \qquad z-z_0=\int_{\mathrm{R}_0}^{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{F}(\mathrm{R})+f(\mathrm{R})\log(\mathrm{R}-a)}},$$

$\mathrm{R}_0$ désignant la valeur de R pour une valeur arbitraire $z_0$ de $z$.

Soient $m$ le degré de $\mathrm{F}(\mathrm{R})$ et $n$ celui de $f(\mathrm{R})$. Pour R infini, l'expression

$$\mathrm{F}(\mathrm{R})+f(\mathrm{R})\log(\mathrm{R}-a)$$

est comparable à $\mathrm{R}^m$ ou à $\mathrm{R}^n\log\mathrm{R}$, suivant que $m>n$ ou $m\leqq n$.

On voit de suite que, dans le premier cas, l'intégrale (II) tendra vers une limite quand R augmentera indéfiniment, si $m$ est supérieur à 2; $m$ et par suite $n$ ne peuvent donc dépasser 2.

Dans le second cas, l'intégrale est comparable à $\int_{\mathrm{R}_0}^{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^n\log\mathrm{R}}}$, intégrale qui, en posant $\mathrm{R}=z^{\frac{2}{2-n}}$, devient, à un facteur constant près, $\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\log z}}$, et, si $n$ est supérieur à 2, $z$ tend vers zéro quand R augmente indéfiniment; par suite, cette dernière intégrale a évidemment une limite. L'intégrale (II) tend donc encore vers une limite quand R augmente indéfiniment. On voit donc que, si les degrés de F et $f$ dépassent 2, la fonction R aura au moins un pôle, ce que nous savons être impossible.

Montrons enfin que $\mathrm{F}(\mathrm{R})$ et $f(\mathrm{R})$ contiendront $(\mathrm{R}-a)^2$ en facteur, car, dans le cas contraire, l'intégrale (II) serait comparable soit à $\int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{R-a}}$, soit à $\int_{R_0}^{R} \frac{dR}{\sqrt{(R-a)\log(R-a)}}$, qui ont toutes deux une limite, R tendant vers $a$.

Donc $F(R)$ et $f(R)$ doivent avoir la forme $A(R-a)^2$, $B(R-a)^2$, A et B étant deux constantes, et B étant différent de zéro. Ces cas sont les seuls où l'intégrale de l'équation

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R) + f(R)\log(R-a)$$

pourra être uniforme, $f(R)$ n'étant pas identiquement nul, et il est aisé de voir qu'effectivement dans ce cas l'intégrale est uniforme.

Revenons maintenant à l'équation

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int \varphi_1 \varphi' \, dR}{\varphi'^2};$$

on voit que l'on devra avoir

$$\frac{1}{\varphi'^2} = B(R-a)^2,$$

d'où

$$\varphi'(R) = \frac{M}{R-a},$$

M étant une constante. Mais il est manifestement impossible de trouver une fonction rationnelle $\varphi(R)$ satisfaisant à cette relation : il ne se peut donc que l'équation (I) admette une intégrale uniforme, l'intégrale $\int \varphi_1 \varphi' \, dR$ contenant un seul terme logarithmique.

7. Supposons maintenant que l'intégrale $\int \varphi_1 \varphi' \, dR$ contienne deux termes logarithmiques. On aura pour $\left(\frac{dR}{dz}\right)^2$ une expression de la forme

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R) + f_1(R)\log(R-a) + f_2(R)\log(R-b),$$

et nous pouvons, comme précédemment, nous proposer de trouver d'une manière générale dans quels cas cette équation admettra une intégrale uniforme, $f_1(\mathrm{R})$ et $f_2(\mathrm{R})$ ne pouvant ni l'un ni l'autre être identiquement nuls.

Une étude toute semblable à celle qui a été faite dans le n° 6 montre que F, $f_1$ et $f_2$ doivent être des polynômes, et que, de plus, ils doivent tous trois contenir en facteur $(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2$.

Cela posé, remarquons maintenant que la fonction $\mathrm{R}(z)$, ne pouvant, pour une valeur finie de $z$, devenir égale à $a$ et $b$, aura nécessairement des pôles, et de là on conclut immédiatement que

$$f_1(\mathrm{R})+f_2(\mathrm{R})=0,$$

condition nécessaire pour que $\mathrm{R}=\infty$ ne soit pas un point critique, de nature logarithmique, du second membre, et l'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)^2=\mathrm{F}(\mathrm{R})+f_1(\mathrm{R})\log\frac{\mathrm{R}-a}{\mathrm{R}-b};$$

la fonction $\dfrac{\mathrm{R}-a}{\mathrm{R}-b}$ sera une fonction entière, ne devenant jamais nulle. Désignons-la par $u$, d'où

$$\mathrm{R}=\frac{a-bu}{1-u},$$

et l'équation précédente devient

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2=\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}\mathrm{F}\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)+\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}f_1\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)\log u.$$

Cette dernière équation a la forme de celle qui a été étudiée dans le numéro précédent. En nous reportant aux résultats précédemment trouvés, on voit que l'on doit avoir, pour que l'intégrale $u$ puisse être uniforme,

$$\frac{(1-u)^4}{(a-b)^2}f_1\left(\frac{a-bu}{1-u}\right)=\mathrm{A}u^2,$$

A étant une constante, et cette relation montre immédiatement que le degré du polynôme $f_1$ ne peut dépasser le quatrième; il en est de même de F. Mais nous avons vu que F et $f_1$ devaient admettre le diviseur $(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2$. Il suit de là qu'on ne peut avoir que

$$\mathrm{F}=\mathrm{A}(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2,\quad f_1=\mathrm{B}(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2,$$

A et B étant deux constantes, et il est facile de voir qu'effectivement, dans ce cas, l'intégrale de l'équation

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)^2 = \mathrm{F}(\mathrm{R}) + f_1(\mathrm{R}) \log \frac{\mathrm{R}-a}{\mathrm{R}-b}$$

est uniforme.

Revenons maintenant à l'équation (I),

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)^2 = \frac{2\int \varphi_1 \varphi' d\mathrm{R}}{\varphi'^2(\mathrm{R})},$$

où l'intégrale, dans le second membre, est supposée conduire à deux termes logarithmiques $\log(\mathrm{R}-a)$ et $\log(\mathrm{R}-b)$.

On devra nécessairement avoir

$$\frac{1}{\varphi'^2} = \mathrm{A}(\mathrm{R}-a)^2(\mathrm{R}-b)^2,$$

A étant une constante, ou

$$\frac{d\varphi}{d\mathrm{R}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \frac{1}{(\mathrm{R}-a)(\mathrm{R}-b)},$$

et il est manifeste que $\varphi$ ainsi défini ne peut être une fonction rationnelle de R.

8. Nous arrivons donc à cette conclusion : l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\mathrm{R}}{dz}\right)^2 = \frac{2\int \varphi_1(\mathrm{R}) \varphi'(\mathrm{R}) d\mathrm{R}}{\varphi'^2(\mathrm{R})}$$

ne peut admettre d'intégrale uniforme si l'expression $\int \varphi_1 \varphi' d\mathrm{R}$ contient des termes logarithmiques. A la vérité, j'ai seulement examiné, dans les numéros précédents, les cas où elle contiendrait un ou deux termes de cette nature; mais j'ai dit plus haut pourquoi il n'y avait pas lieu d'examiner les cas où il y aurait plus de deux logarithmes.

9. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le nombre $p$

relatif à l'équation différentielle

$$F\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0$$

était égal à zéro; supposons maintenant que l'on ait $p = 1$.

$u$ et $\frac{d^2 u}{dz^2}$ devront avoir cette fois les formes $\varphi(R)$ et $\varphi_1(R)$, $\varphi$ et $\varphi_1$ désignant deux fonctions doublement périodiques, et R une fonction uniforme entière de $z$. On voit, comme précédemment, que

$$\text{(I)} \qquad \left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = \frac{2\int\varphi_1(R)\varphi'(R)\,dR}{\varphi'^2(R)},$$

équation que nous avons maintenant à discuter, en supposant que $\varphi$ et $\varphi_1$ soient des fonctions doublement périodiques.

Si l'intégrale $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ est une fonction doublement périodique de R, on aura

$$\left(\frac{dR}{dz}\right)^2 = F(R),$$

F étant une fonction uniforme doublement périodique.

Si F ne se réduit pas à une constante, cette équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme, car, soit $R = a$ un pôle de $F(R)$, $\frac{dR}{dz}$ serait infini, R prenant une valeur finie $a$. Si donc on peut disposer de la constante d'intégration dans $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ de manière que F se réduise à une constante, l'équation admettra, et dans ce cas seulement, des intégrales uniformes. On aura alors

$$2\int\varphi_1\varphi'\,dR = A^2\varphi'^2,$$

d'où, en différentiant,

$$\varphi_1 = A^2\varphi''.$$

et R se réduit à $Az + B$, A et B étant des constantes.

Supposons, en second lieu, que l'intégrale $\int\varphi_1\varphi'\,dR$ soit uniforme, mais non doublement périodique; le second membre de l'équation (I) sera évidemment encore susceptible de devenir infini pour certaines valeurs de R, et, par suite, l'équation ne pourra admettre d'intégrale uniforme.

Enfin, si $\int \varphi_1 \varphi' d\text{R}$ contient des termes logarithmiques, la même conclusion subsiste encore.

En résumé, quand $p = 1$, le seul cas où il y ait des intégrales uniformes est celui où l'on a

$$\varphi_1 = \text{A}^2 \varphi'',$$

A étant une constante. Toutes les intégrales de l'équation proposée ne sont pas, dans ce cas, uniformes; il n'y a que celles que l'on peut déduire d'une première intégrale uniforme par le changement de $z$ en $z$ plus une constante.

Il résulte de toute cette étude que les équations

$$\text{F}\left(u, \frac{d^2 u}{dz^2}\right) = 0$$

ne peuvent admettre d'autres intégrales uniformes que des fonctions rationnelles de $z$, des fonctions rationnelles de $e^{az}$, où $a$ est une constante, et enfin des fonctions doublement périodiques. Nous avons montré comment on pourrait reconnaître s'il en est ainsi et trouvé en même temps la nature spéciale de ces intégrales uniformes.