Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Sur le contact des courbes et des surfaces

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 348-384

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_348_1>

SUR LE CONTACT DES COURBES ET DES SURFACES;

PAR M. G. DARBOUX.

M. Kummer a démontré que les surfaces du quatrième ordre douées d'une conique double peuvent être engendrées de dix manières différentes par le mouvement d'une conique variable assujettie à rencontrer en deux points la conique double.

Dans le cas où ces surfaces sont des cyclides générales, c'est-à-dire où la ligne double devient le cercle imaginaire de l'infini, les coniques deviennent des cercles, et il passe, par conséquent, dix cercles réels ou imaginaires par chaque point de la surface. Cette propriété des cyclides m'a toujours paru des plus remarquables; les nombreuses recherches des géomètres sur les surfaces du troisième, du quatrième et du cinquième ordre nous ont fait connaître des surfaces admettant plusieurs séries de coniques; mais aucune d'elles ne contient un aussi grand nombre de séries de sections circulaires que les cyclides. Il m'a semblé qu'il y aurait intérêt à démontrer rigoureusement qu'une surface ne peut admettre plus de dix séries de sections circulaires et que les cyclides sont les seules surfaces dans lesquelles ce nombre maximum de dix séries soit effectivement atteint. On verra, dans la suite de ce travail, que la démonstration de cette proposition se déduit assez facilement des théorèmes généraux que l'on peut établir relativement aux contacts de différents ordres que peut avoir en un point donné un cercle avec une surface.

J'ai aussi étudié le contact d'une conique quelconque avec une surface. Je ne connais sur ce sujet que deux Mémoires de M. Transon, l'un publié en 1841 dans le *Journal de Mathématiques de M. Liouville,* l'autre en 1870 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques.* Ces Mémoires intéressants contiennent surtout des résultats relatifs à l'élément introduit par M. Transon sous le nom de *déviation.* J'ai retrouvé ces résultats et d'autres qui me paraissent nouveaux (¹).

(¹) Ces recherches ont été communiquées à l'Académie dans la séance du 13 décembre 1880. Dans la séance suivante, M. Moutard a présenté une réclamation qui nous paraît fondée, et à laquelle nous faisons droit en reproduisant ici une partie de la Note de ce savant géomètre, insérée à la page 1055 du tome XCI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

« La question du contact des coniques et des surfaces, examinée par M. Darboux dans une Note insérée au dernier numéro des *Comptes rendus* (13 décembre 1880), a fait l'objet de deux Communications verbales que j'ai présentées à la Société philomathique vers 1865. Dans la première, j'énonçais, à côté d'autres résultats, ceux qui, dans la Note de M. Darboux, sont relatifs à des coniques quelconques, en exceptant toutefois le théorème, non le moins important, qui concerne les surfaces sur lesquelles il passe, en chaque point, une infinité de coniques; dans la seconde, je représentais, à l'aide d'une cubique gauche, la loi de distribution des cercles qui surosculent une surface en un même point, sous une forme assez simple pour permettre d'en déduire, non seulement les propositions de M. Darboux sur ce sujet, mais aussi, dans une certaine mesure, les constructions correspondantes.

» De cette dernière Communication, il n'existe aucune trace imprimée, et je n'ai par conséquent aucune réclamation de priorité à faire de ce chef. Il n'en est pas de même de la première; j'en ai consigné les points principaux dans une lettre adressée en 1863 au général Poncelet, lettre dont l'illustre géomètre m'a fait l'honneur de publier un extrait dans le Tome II des *Applications d'Analyse et de Géométrie* (p. 363 et 364). (M. Chasles en a reproduit une partie, en 1870, dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie,* p. 304.)

» Après avoir énoncé et démontré à l'aide des principes de Poncelet un théorème général sur le contact de deux surfaces en un point, j'ajoute :

» Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de ce théorème général, en y joignant quelques autres considérations, je me bornerai à citer les suivants :

» *Si autour d'une tangente quelconque menée à une surface, en un point* A, *on fait tourner un plan, et que dans chacune de ses positions on construise la conique qui a en* A *avec la surface un contact du quatrième ordre, il existera en général deux positions du plan sécant pour lesquelles le contact montera au cinquième ordre. L'ensemble de toutes ces coniques forme d'ailleurs une surface du deuxième ordre, en général simplement osculatrice à la proposée.*

» *Par chaque point d'une surface continue il est, en général, possible de mener vingt-sept coniques ayant avec la surface, en ce point, un contact du sixième ordre.*

» Dans le cas particulier où la surface donnée est du troisième degré, les positions singulières du plan sécant mené par une tangente quelconque pour lesquelles le contact avec une conique peut monter au cinquième ordre sont celles qui contiennent les asymptotes de l'indicatrice relative au point où la tangente considérée perce

Pour simplifier les calculs relatifs à l'étude de cette dernière question, j'ai cherché quelle est la forme la plus réduite à laquelle on puisse ramener l'équation de la surface dans le voisinage d'un point simple, en employant la transformation homographique la plus générale. La solution de cette dernière question m'a permis d'énoncer quelques propositions relativement au contact le plus intime que peut avoir en un point une surface du second degré avec une surface donnée.

I.

Considérons une surface quelconque (S) et un point simple O de cette surface. Si l'on choisit pour plan des xy le plan tangent en O, on pourra développer le z d'un point de la surface suffisamment voisin du point O suivant les puissances entières de x et de y, ce qui donnera une série de la forme suivante,

$$z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots, \tag{1}$$

où φ_2, φ_3, ... sont des fonctions homogènes de x et de y d'un degré égal à leur indice. J'examinerai d'abord une question intéressante dont la solution nous sera utile dans la suite de ce travail : *Quelle est la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener le développement* (1) *en remplaçant la surface par sa transformée homographique la plus générale, ou, ce qui est la même chose, en rapportant la surface donnée, non plus à des coordonnées homogènes ordinaires, mais à des coordonnées tétraédriques quelconques?*

Analytiquement, ce double problème se formule de la manière suivante :

Quelle est la forme la plus simple à laquelle on puisse ramener

---

de nouveau la surface. On peut ajouter que le plan tangent en ce dernier point contient la courbe d'intersection de la surface osculatrice formée par toutes ces coniques avec la polaire du deuxième degré du point A par rapport à la surface du troisième ordre donnée.

» Ces derniers énoncés ont besoin de quelques modifications pour s'étendre aux surfaces algébriques de degré quelconque, mais ce n'est pas le lieu d'insister sur ce point. »

le développement (1) *en employant la substitution*

$$(2)\quad \begin{cases} z = \dfrac{Z}{1 + aX + bY + cZ}, \\[2mm] x = \dfrac{a'X + b'Y + c'Z}{1 + aX + bY + cZ}, \\[2mm] y = \dfrac{a''X + b''Y + c''Z}{1 + aX + bY + cZ}, \end{cases}$$

dans laquelle figurent quatre fonctions linéaires dont le déterminant $(a'b'' - b'a'')$ *doit être différent de zéro?*

Si, au lieu de prendre d'abord les variables X, Y, on choisit leurs combinaisons linéaires $a'X + b'X$, $a''Y + b''Y$, on voit que la substitution (2) peut être remplacée par la suivante,

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{X + hZ}{1 + u_1 + u_0 Z}, \\[2mm] y = \dfrac{Y + kZ}{1 + u_1 + u_0 Z}, \\[2mm] z = \dfrac{Z}{1 + u_1 + u_0 Z}, \end{cases}$$

u_1 désignant une fonction linéaire de X, Y, et u_0 une constante, cette substitution pouvant être suivie d'une autre substitution linéaire effectuée sur les seules variables X, Y.

Si l'on porte les valeurs de x, y, z tirées des formules (3) dans le développement (1), on aura

$$Z = \frac{\varphi_2(X + hZ, Y + kZ)}{1 + u_1 + u_0 Z} + \frac{\varphi_3(X + hZ, Y + kZ)}{(1 + u_1 + u_0 Z)^2} + \ldots.$$

Désignons par le symbole Δ l'opération

$$h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y};$$

posons, pour abréger,

$$\varphi_2(h, k) = \varphi_0,$$

et développons les différents termes en nous arrêtant au quatrième ordre. Le développement de Z suivant les puissances de X, Y sera évidemment de la forme

$$Z = \varphi_2(X, Y) + U_3 + U_4 + \ldots,$$

et l'on devra avoir

$$\begin{aligned} U_3 + U_4 + \ldots = {} & \varphi_2(X, Y)(-u_1 - u_0 Z + u_1^2) + (-u_1) Z \Delta\varphi_2 + \varphi_0 Z^2 \\ & + \varphi_3(X, Y)(1 - 2u_1) + Z\Delta\varphi_3 + \varphi_4(X, Y) + \ldots. \end{aligned}$$

En remplaçant Z par son développement et égalant dans les deux membres les termes du même degré, on aura

$$\begin{aligned} U_3 &= -u_1\varphi_2 + \varphi_2\Delta\varphi_2 + \varphi_3, \\ U_4 &= (\varphi_0 - u_0)\varphi_2^2 + u_1^2\varphi_2 + U_3\Delta\varphi_2 - u_1\varphi_2\Delta\varphi_2 - 2u_1\varphi_3 + \varphi_2\Delta\varphi_3 + \varphi_4, \end{aligned}$$

ou plus simplement, si l'on pose

$$(4) \qquad \begin{cases} \Delta\varphi_2 - u_1 = v_1, \\ \varphi_0 - u_0 = v_0, \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} U_3 = \varphi_3 + v_1\varphi_2, \\ U_4 = \varphi_4 + 2v_1\varphi_3 + \varphi_2^2 v_1^2 + \varphi_2\Delta\varphi_3 - \varphi_3\Delta\varphi_2 + \varphi_0\varphi_2^2. \end{cases}$$

Les formules (4) montrent que la fonction linéaire v_1 et la constante v_0 sont absolument arbitraires. En ajoutant h et k, on voit que l'on a cinq constantes dont on peut disposer pour donner une forme simple aux nouveaux termes du troisième et du quatrième ordre.

Supposons d'abord que le point O de la surface (S) ne soit pas un point à indicatrice parabolique. On peut admettre alors que $\varphi_2(x, y)$ a d'abord été ramené à la forme

$$\varphi_2(x, y) = xy,$$

et l'on pourra disposer des deux constantes contenues dans v_1 pour faire disparaître dans U_3 les termes en X^2Y, XY^2, et ramener par conséquent U_3 à la forme

$$U_3 = AX^3 + DY^3.$$

Tant que $\varphi_2(x, y)$ et $\varphi_3(x, y)$ n'auront pas de diviseur commun, c'est-à-dire tant qu'aucune des tangentes asymptotiques ne coupera la surface en quatre points confondus en O, les constantes A et D seront différentes de zéro.

Cela posé, et pour faciliter la discussion suivante, supposons que l'on ait fait une première transformation homographique dans laquelle on se soit contenté d'amener U_3 à la forme précédente. On aura donc

$$\varphi_2 = xy, \quad \varphi_3 = Ax^3 + Dy^3,$$

et, si l'on applique la substitution (3), il faudra que, pour maintenir à U_3 la valeur

$$U_3 = AX^3 + DY^3,$$

on fasse $\varphi_1 = 0$. Alors l'expression de U_4 sera

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_4 = {} & \varphi_4(X, Y) + XY(3AX^2h + 3DY^2k) \\ & - (AX^3 + DY^3)(Xk + Yh) + \varphi_0 X^2Y^2. \end{aligned} \right.$$

On voit donc que, au moins tant que A et D ne seront pas nuls, on pourra disposer des constantes h, k, φ_0 de manière à faire disparaître soit les termes en X^4, Y^4, X^2Y^2, soit les termes en X^3Y, X^2Y^2, XY^3. On pourra donc donner à U_4 l'une des deux formes

$$U_4 = XY(BX^2 + CY^2),$$
$$U_4 = BX^4 + CY^4.$$

Choisissons, par exemple, la première; nous obtenons, pour le développement de Z,

$$Z = XY + AX^3 + DY^3 + XY(BX^2 + CY^2) + \ldots.$$

Nous examinerons à part le cas d'exception où l'un des coefficients A, D serait nul [1].

---

[1] La même méthode s'applique à une fonction quelconque de n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Supposons, en effet, que l'on ait obtenu le développement de cette fonction sous la forme

$$y = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots,$$

φ_k désignant une fonction homogène d'ordre k des variables $x_1, \ldots, x_n$. En effectuant d'abord la substitution

$$y = \varphi_1 + z,$$

on aura

$$z = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots.$$

On peut maintenant remarquer que la substitution homographique la plus géné-

Mais auparavant nous allons montrer que, dans le cas où A et D ne sont pas nuls et où l'on n'a pas à se préoccuper d'introduire des irrationnelles, on peut ramener A et D à être égaux à l'unité.

---

rale peut se ramener à la suivante,

$$z = \frac{Z}{1 + u_1 + u_0 Z},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$x_i = \frac{X_i + h_i Z}{1 + u_1 + u_0 Z},$$

où u_0 est une constante, u_1 une fonction linéaire et homogène des variables X_i, suivie d'une seule substitution linéaire effectuée sur les seules variables X_i. En cherchant le développement de Z suivant les puissances de $X_1, \dots, X_n$, on trouvera, comme dans le texte,

$$Z = \varphi_2(X_1, \dots, X_n) + U_3 + U_4 + \dots,$$

U_3, U_4 ayant les valeurs definies par les formules

$$U_3 = \varphi_3 + v_1 \varphi_2,$$
$$U_4 = \varphi_4 + 2 v_1 \varphi_3 + \varphi_2^2 v_1^2 + \varphi_2 \Delta\varphi_3 - \varphi_3 \Delta\varphi_2 + \varphi_0 \varphi_2^2,$$
$$v_1 = \Delta\varphi_2 - u_1,$$
$$\varphi_0 = \varphi_2(h_1, \dots, h_n) - u_0.$$

Voyons comment on pourra disposer des constantes contenues dans v_1, de $h_1, \dots, h_n$, φ_0 pour obtenir une forme reduite du développement.

Posons, suivant les notations de la théorie des formes,

$$\varphi_2 = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2,$$
$$U_3 = \alpha_x^3 = \beta_x^3,$$
$$U_4 = A_x^4.$$

On disposera des constantes contenues dans v_1 de manière à annuler le covariant linéaire

$$(\alpha a b)^2 \alpha_x,$$

puis des constantes $h_1, h_2, \dots, h_n, u_0$ de manière à annuler à la fois l'invariant

$$(A a b)^2 (A c d)^2$$

et le covariant linéaire

$$(A a b)^2 (A \alpha c)^2 \alpha_x.$$

Ces conditions ne sont pas impossibles, en géneral, et conduisent à un développement parfaitement défini. Il suffit maintenant de substituer aux variables n covariants linéaires des formes φ_2, U_3, U_4, ... pour obtenir un developpement dont tous les coefficients sont des invariants par rapport à toutes les substitutions homographiques auxquelles on peut soumettre les variables; ou bien, si l'on ne veut pas changer de variables, les invariants sont ceux du système de formes φ_2, U_3, U_4, ...

Nous touchons ici à cette question des invariants differentiels, qui a ete l'objet des

Faisons la dernière substitution

$$Z = abz, \quad X = ax, \quad Y = by;$$

le développement deviendra

$$z = xy + \frac{Aa^2}{b}x^3 + \frac{Db^2}{a}y^3 + xy(B'x^2 + C'y^2) + \ldots.$$

Or, on peut déterminer a et b par les équations

$$Aa^2 = b, \quad Db^2 = a,$$

qui donnent

$$a^3 = \frac{1}{A^2D}, \quad b^3 = \frac{1}{AD^2}, \quad ab = \frac{1}{AD},$$

et l'on aura définitivement

$$(7) \qquad z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2) + \ldots.$$

Cette forme réduite est plus simple que la forme (6); mais elle n'est pas unique, car elle subsistera si l'on remplace x, y respectivement par θx, $\theta^2 y$, θ étant une racine cubique de l'unité.

Si l'une des tangentes asymptotiques coupe la surface en quatre points confondus, on peut supposer qu'une première transformation homographique ait ramené φ_3 à la forme Ax^3, ou plus simplement x^3. Alors on aura

$$U_4 = \varphi_4 + 3X^3Yh - X^3(Xk + Yh) + \varphi_0 X^2Y^2.$$

On pourra disposer de h, k, φ_0 de manière à réduire à zéro les coefficients de X^3Y, X^2Y^2, X^4. La forme réduite du développement sera donc

$$(8) \qquad Z = XY + X^3 + aY^3X + bY^4 + \ldots.$$

Si l'une des constantes a ou b n'est pas nulle, on pourra même la réduire à l'unité.

---

importantes recherches de M. Halphen, en ce qui concerne les courbes planes et gauches, et même les surfaces (voir *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, et *Thèse sur les invariants différentiels des courbes planes*); je me contenterai des développements donnes dans le texte, qui étaient indispensables pour la suite de ce travail.

Si en chaque point de la surface une tangente asymptotique coupe en quatre points confondus, la surface est réglée et la forme (8) convient pour chaque point de la surface. Mais alors elle est beaucoup trop générale. Si nous exprimons, en effet, que la valeur (8) de Z satisfait à l'équation aux dérivées partielles des surfaces gauches, qui est, comme on sait, en désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les dérivées du troisième ordre,

$$\begin{aligned}\delta^2 r^3 + \alpha^2 t^3 + 3t^2 r(3\beta^2 - 2\alpha\gamma) + 3tr^2(3\gamma^2 - 2\beta\delta)\\ + 6rst(\alpha\delta - 3\beta\gamma) + 12s^2 t\alpha\gamma + 12rs^2\beta\delta\\ - 6\alpha\beta st^2 - 6\gamma\delta sr^2 - 8s^3\alpha\delta = 0,\end{aligned}$$

nous verrons que tous les termes, sauf le dernier, sont au moins du troisième ordre, et, en égalant à zéro les termes de moindre degré, nous obtiendrons la forme réduite

$$(9)\qquad z = xy + x^3 + ax^5 + bx^4y + cx^3y^2,$$

où l'on néglige les termes du sixième ordre.

On verra de même que dans le cas d'un point parabolique ordinaire on est conduit à la forme suivante,

$$(10)\qquad z = x^2 + y^3 + ayx^3 + by^4,$$

et, si la surface a tous ses points paraboliques, c'est-à-dire est développable, on trouvera

$$(11)\qquad z = x^2 + yx^3 + u_6 + \ldots,$$

au moins tant qu'un invariant du quatrième ordre ne sera pas nul.

II.

On peut se servir des formules réduites précédentes pour résoudre différentes questions. J'examinerai les deux suivantes.

Supposons d'abord que l'on veuille étudier les surfaces du second degré ayant en O le contact le plus intime avec la surface (S). Soit

$$(12)\qquad z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2) + \ldots$$

le développement de z. Toute surface du second degré (Q) ayant avec (S) un contact du second ordre sera représentée par une équation de la forme

$$z = xy + z(\alpha x + \beta y + \gamma z), \tag{13}$$

qui donne, pour le développement de z,

$$z = xy + xy(\alpha x + \beta y) + xy(\alpha x + \beta y)^2 + \gamma x^2 y^2 + \ldots. \tag{14}$$

La projection de la courbe d'intersection des surfaces (Q) et (S) sur le plan des xy a pour équation

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + y^3 - xy(\alpha x + \beta y) \\ &\quad + xy[ax^2 + by^2 - (\alpha x + \beta y)^2 - \gamma xy] + \ldots, \end{aligned}$$

et elle a un point triple à l'origine, quels que soient α et β.

On ne peut pas disposer des constantes α et β de manière à obtenir un contact complet du troisième ordre, mais on peut les choisir de telle manière que les tangentes au point triple soient confondues. On a alors les trois systèmes de solutions

$$\begin{aligned} \alpha &= -3, & \beta &= -3, \\ \alpha &= -3\theta, & \beta &= -3\theta^2, \\ \alpha &= -3\theta^2, & \beta &= -3\theta, \end{aligned}$$

auxquels correspondent les trois faisceaux de surfaces

$$\left\{ \begin{aligned} z &= xy - 3z(x + y) + \gamma z^2, \\ z &= xy - 3z(\theta x + \theta^2 y) + \gamma z^2, \\ z &= xy - 3z(\theta^2 x + \theta y) + \gamma z^2. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Il y a dans les résultats obtenus un fait qu'il importe de signaler : les surfaces (Q) ayant avec la surface (S) un contact du second ordre dépendent de trois constantes arbitraires α, β, γ. Il semblerait donc qu'on pourra disposer des constantes α, β, γ, non seulement de telle manière que les tangentes en O au point triple de la courbe d'intersection coïncident, mais encore qu'elles coïncident avec une tangente quelconque donnée à l'avance. Ces conditions, qui pourraient, en effet, être satisfaites si l'on avait au lieu d'une surface du second degré (Q) une surface quelconque à neuf paramètres, ne peuvent pas l'être dans le cas actuel. Quand les tangentes au point triple sont confondues, elles le sont nécessairement avec l'une des trois tangentes définies par l'équation

$$(16) \qquad x^3 + y^3 = 0,$$

et il y a une infinité de surfaces du second degré pour lesquelles les tangentes au point triple se confondent avec l'une de ces tangentes : ce sont les surfaces définies par les équations (15).

Ces trois directions jouent le même rôle que les directions principales relativement au contact d'une sphère et de la surface (S), et l'on voit que la théorie du contact des surfaces du second degré avec une surface quelconque (S) nous conduit aussi à un système de lignes courbes tracées sur la surface : ce sont celles dont la tangente en chaque point serait définie par l'équation (16). Nous pouvons appeler les tangentes *tangentes d'osculation quadrique* et les lignes correspondantes *lignes d'osculation quadrique*. Elles sont définies par une équation différentielle du troisième ordre, qu'il est aisé de former dans tous les cas.

On l'obtiendra en exprimant que la fonction de $\dfrac{dy}{dx}$,

$$\delta \frac{dy^3}{dx^3} + 3\gamma \frac{dy^2}{dx^2} + 3\beta \frac{dy}{dx} + \alpha + \left(m \frac{dy}{dx} + n\right)\left(r \frac{dy^2}{dx^2} + 2s \frac{dy}{dx} + t\right),$$

est un cube parfait, ce qui conduit aux trois équations

$$3(mr + \delta)\frac{dy}{dx} + 3\gamma + nr + 2ms = 0,$$

$$(3\gamma + nr + 2ms)\frac{dy}{dx} + 3\beta + mt + 2ns = 0,$$

$$(3\beta + mt + 2ns)\frac{dy}{dx} + 3(\alpha + nt) = 0,$$

entre lesquelles il y aura à éliminer m, n. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha\left[3r^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6rs\frac{dy}{dx} + 4s^2 - rt\right] \\ &+ \beta\left[3r^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 9rt\frac{dy}{dx} - 6st\right] \\ &+ \gamma\left[3t^2 - 9rt\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 6rs\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] \\ &+ \delta\left[(4s^2 - rt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6st\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3t^2\frac{dy}{dx}\right] = 0, \end{aligned} \right.$$

qui est identiquement vérifiée dans le cas des surfaces du second degré, comme cela était évident *a priori*.

La deuxième application que j'aie à indiquer des formules réduites consiste dans la détermination de la surface de Steiner ayant en O un contact du quatrième ordre avec la surface (S). La surface de Steiner dépendant de quinze constantes, il y a au plus une surface de Steiner ayant en un point un contact du quatrième ordre avec une surface donnée. La question est seulement de savoir si cette surface existe effectivement.

A cet effet, je fais toujours usage du développement (12), et je vais démontrer que, si l'on prend la surface de Steiner définie par les formules

$$x = \frac{\alpha + v_2}{1 + u_2}, \quad y = \frac{\beta + w_2}{1 + u_2}, \quad z = \frac{\alpha\beta}{1 + u_2},$$

où u_2, v_2, w_2 sont des fonctions homogènes et du second degré des paramètres α, β, on peut disposer des constantes contenues dans u_2, v_2, w_2 de manière à obtenir le contact du quatrième ordre de cette surface avec la proposée. Pour cela je substitue les expressions précédentes dans la formule (12) et j'écris que tous les termes se détruisent jusqu'au quatrième degré. On obtient ainsi sans difficulté les valeurs

$$\begin{aligned} u_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta, \\ v_2 &= -\beta^2, \\ w_2 &= -\alpha^2, \end{aligned}$$

en sorte que la surface de Steiner cherchée est définie par les formules

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\alpha - \beta^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}, \\ y &= \frac{\beta - \alpha^2}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}, \\ z &= \frac{\alpha\beta}{1 + a\alpha^2 + b\beta^2 - 5\alpha\beta}. \end{aligned} \right.$$

III.

Nous allons maintenant commencer l'étude des différents problèmes relatifs au contact d'une conique et de la surface (S). Supposons que les axes des x et des y aient été choisis d'une manière quelconque et que la surface soit définie par le développement

$$(19) \qquad z = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots.$$

Coupons-la par le plan dont l'équation est

$$(20) \qquad mz + nx - y = 0.$$

On aura une courbe plane dont la projection sur le plan des xy aura pour équation

$$(21) \qquad y - nx = m\varphi_2(x, y) + m\varphi_3 + \ldots.$$

La formule de Lagrange permet d'obtenir très rapidement le développement de y suivant les puissances de x. Posons pour un instant $y = \lambda x$. La fonction $\varphi_i(x, y)$ se changera en $x^i\varphi_i(\lambda)$, et l'équation précédente deviendra

$$\lambda = n + mx\varphi_2(\lambda) + mx^2\varphi_3(\lambda) + \ldots.$$

Elle est, comme on voit, de la forme

$$\lambda = n + F(\lambda),$$

et elle donne, par conséquent,

$$\lambda = n + F(n) + \frac{1}{2}\frac{d}{dn}F^2(n) + \ldots.$$

Remplaçons $F(n)$ par sa valeur et ordonnons par rapport à x ; nous aurons le développement de λ d'où l'on pourra conclure celui de y et aussi celui de z. On obtient ainsi les formules

$$(23) \qquad \begin{cases} z = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots, \\ y - nx = ma_2x^2 + ma_3x^3 + \ldots, \end{cases}$$

les valeurs de a_2, a_3,... étant données par les formules suivantes,

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
&a_2 = \varphi_2,\\
&a_3 = \varphi_3 + m\varphi_2\varphi_2',\\
&a_4 = \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)' + \frac{m^2}{6}(\varphi_2^3)'',\\
&a_5 = \varphi_5 + m\left(\varphi_2\varphi_4 + \frac{\varphi_3^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_3)'' + \frac{m^3}{24}(\varphi_2^4)''',\\
&a_6 = \varphi_6 + m(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_4 + \varphi_2\varphi_3^2)''\\
&\qquad + \frac{m^3}{6}(\varphi_2^3\varphi_3)''' + \frac{m^4}{120}(\varphi_2^5)^{\text{IV}},\\
&a_7 = \varphi_7 + m\left(\varphi_2\varphi_6 + \varphi_3\varphi_5 + \frac{\varphi_4^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{6}(3\varphi_2^2\varphi_5 + 6\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_3^3)''\\
&\qquad + \frac{m^3}{12}(2\varphi_2^3\varphi_4 + 3\varphi_2^2\varphi_3^2)''' + \frac{m^4}{24}(\varphi_2^4\varphi_3)^{\text{IV}} + \frac{m^5}{720}(\varphi_2^6)^{\text{V}},
\end{aligned}\right.$$

où φ_i désigne la fonction $\varphi_i(x, y)$, dans laquelle on a remplacé x par 1, y par n, et où les accents supérieurs indiquent des dérivations à effectuer. Au moyen de ces formules, auxquelles, on le voit, nous sommes conduits presque sans calcul, nous allons résoudre les questions que nous avons en vue.

Commençons par étudier les coniques osculatrices, c'est-à-dire les coniques ayant cinq points d'intersection avec la surface confondus au point O. Soit

$$(25)\qquad z = \varphi_2(x, y) + z(\alpha x + \beta y) + \gamma z^2$$

l'équation de l'une des surfaces du second degré qui sont osculatrices à (S) et qui contiennent cette conique. Le développement de la coordonnée z d'un point de cette surface nous donnera, en posant $\varphi_1 = \alpha x + \beta y$,

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
z = {}&\varphi_2(x, y) + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + \gamma\varphi_2^2 + \varphi_1^3\varphi_2 + 3\gamma\varphi_1\varphi_2^2\\
&+ \varphi_1^4\varphi_2 + 6\gamma\varphi_1^2\varphi_2 + 2\gamma^2\varphi_2^3,
\end{aligned}\right.$$

les termes négligés étant du septième ordre au moins. La conique section de cette surface par le plan (P),

$$mz + nx - y = 0,$$

aura pour projection sur le plan des xy la conique dont l'équation est

$$y - nx = mb_2 x^2 + mb_3 x^3 + \ldots,$$

et b_2, b_3, ... seront définis par les formules (24), où l'on remplacera φ_2, φ_3, ... par les valeurs qui conviennent à la surface du second degré, valeurs définies par le développement (26). Posons, pour abréger,

$$u_1 = \alpha + \beta n;$$

on aura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} b_2 &= \varphi_2,\\ b_3 &= u_1\varphi_2 + m\varphi_2\varphi_2',\\ b_4 &= u_1^2\varphi_2 + \gamma\varphi_2^2 + m(u_1\varphi_2^2)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^3)'',\\ b_5 &= u_1^3\varphi_2 + 3\gamma u_1\varphi_2^2 + m\left(\frac{3}{2}u_1^2\varphi_2^2 + \gamma\varphi_2^3\right)\\ &\quad + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^3 u_1)'' + \frac{m^3}{6}(\varphi_2^4)''',\\ b_6 &= u_1^4\varphi_2 + 6\gamma u_1^2\varphi_2 + 2\gamma^2\varphi_2^3 + m(2u_1^3\varphi_2^2 + 3\gamma u_1\varphi_2^3)'\\ &\quad + \frac{m^2}{2}(2u_1^2\varphi_2^3 + \gamma\varphi_2^4)'' + \frac{m^3}{6}(u_1\varphi_2^4)' + \frac{m^4}{120}(\varphi_2^5)^{\mathrm{IV}}.\end{aligned}\right.$$

Écrivons que la conique est osculatrice à la section plane de (S). Nous aurons les équations

$$(28)\qquad a_2 = b_2,\quad a_3 = b_3,\quad a_4 = b_4,$$

dont la première est identiquement satisfaite. Les deux dernières nous donnent

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1\varphi_2 &= \varphi_0,\\ u_1^2\varphi_2 + u_0\varphi_2^2 + m(u_1\varphi_2^2)' &= \varphi_4 + m(\varphi_2\varphi_3)'.\end{aligned}\right.$$

Supposons que le plan sécant (P) soit donné, c'est-à-dire que l'on connaisse m et n. Les équations précédentes contiennent les arbitraires α, β, u_0; elles ne suffisent donc pas à déterminer ces trois arbitraires. Il y a, en effet, une infinité de surfaces du second degré contenant la conique osculatrice de la section et données par une équation de la forme (25). Elles ont pour équation

$$z = \varphi_2(x, y) + z(\alpha x + \beta y + \gamma z) + kz(mz + nx - y),$$

où k est arbitraire.

Mais nous pouvons achever de déterminer la surface du second degré cherchée en ajoutant une équation nouvelle aux deux équations (29), par exemple en exigeant que dans la seconde de ces équations les coefficients de m soient égaux dans les deux membres. Alors on est conduit au système

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_3 &= \varphi_2(\alpha + \beta n), \\ \varphi'_3 &= \beta\varphi_2 + (\alpha + \beta n)\varphi'_2, \\ \varphi_4 &= \gamma\varphi_2^2 + (\alpha + \beta n)^2\varphi_2, \end{aligned} \right.$$

qui donne, nous allons le voir, des valeurs parfaitement déterminées pour α, β, γ.

On en déduit en effet

$$(31) \qquad \left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2}{\varphi_2^2}, \\ \alpha &= \frac{\varphi_3}{\varphi_2} - n\,\frac{\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2}{\varphi_2^3}, \\ \gamma &= \frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}, \end{aligned} \right.$$

et l'équation de la surface du second degré correspondante est

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[z - \varphi_2(x, y)]\varphi_2^3 \\ &\quad = zx\varphi_3\varphi_2^2 + z(y - nx)(\varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2) + (\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2)z^2. \end{aligned} \right.$$

Mais alors nous sommes conduits à une importante conséquence : l'équation précédente ne contient pas m; elle représente donc le lieu des coniques osculatrices des sections par les plans sécants

$$mz + nx - y = 0,$$

où m est variable, c'est-à-dire des sections dont les plans passent par une même tangente. Nous avons donc le théorème suivant :

Si dans une surface on considère toutes les sections planes passant par une même tangente, le lieu des coniques osculatrices de *ces sections à leur point de contact commun avec la tangente est une surface du second degré ayant un contact du second ordre avec la surface proposée.*

Ce théorème est tout à fait analogue à celui de Meusnier sur les cercles osculateurs des sections planes passant par une même tangente.

Pour étudier plus complètement les surfaces du second ordre représentées par l'équation (32), prenons pour le développement de z la forme réduite

$$z = xy + x^3 + y^3 + xy(ax^2 + by^2);$$

l'équation (32) deviendra

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} (z - xy)n^3 = {} & zx(2n^2 - n^5) + zy(2n^4 - n) \\ & + z^2[an^2 + bn^4 - (1 + n^3)^2]. \end{aligned} \right.$$

On voit qu'il passe six surfaces de ce système par un point quelconque de l'espace. Il passe donc par chaque point de l'espace six coniques osculatrices en un point déterminé d'une surface quelconque (S).

Dans son Mémoire de 1841, M. Transon a établi que le lieu des axes de déviation des sections planes passant par une même tangente est un plan. Cette proposition est une conséquence du théorème fondamental établi plus haut, car on sait que les axes de déviation sont les diamètres des coniques osculatrices passant au point de contact. Ces coniques se trouvant sur une surface du second ordre, le lieu de leurs diamètres sera le plan diamétral de cette surface conjugué à la direction de la tangente. Ce plan diamétral est représenté par l'équation

$$f'_x + nf'_y = 0$$

ou

$$ny + n^2x + (1 + n^3)z = 0.$$

On voit donc qu'il y a trois de ces plans passant en un point de l'espace. En d'autres termes, il y a trois sections planes dont l'axe de déviation coïncide avec une droite donnée passant par le point de contact.

Il est intéressant de rechercher quelle est la nature du contact des surfaces du second degré contenant les coniques osculatrices avec la surface (S). Le développement de la valeur de z tirée de l'équation (33) est

$$\begin{aligned} z = xy + xy & \left[\frac{x(2-n^3)}{n} + \frac{y(2n^3-1)}{n^2}\right] \\ + xy & \left[\frac{x(2-n^3)}{n} + \frac{y(2n^3-1)}{n^2}\right]^2 \\ + x^2y^2 & \left[\frac{a+bn^2}{n} - \frac{(1+n^3)^2}{n^3}\right], \end{aligned}$$

et, par suite, la projection de la courbe d'intersection de la surface du second degré et de la surface (S) sur le plan des xy aura pour équation

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{n^2}+y\right)(y-nx)^2 \\ & \quad + xy(y-nx)\left[by - \frac{ax}{n} + \frac{y(2n^3-1)^2}{n^4} - \frac{x(2-n^3)^2}{n^3}\right] + \ldots . \end{aligned}$$

On voit que deux tangentes au point triple de la courbe d'intersection seront confondues, et, en outre, la tangente double coupera la courbe d'intersection en cinq points confondus.

Pour les trois valeurs de n correspondantes aux tangentes d'osculation, on aura les trois surfaces du second degré que nous considérons comme ayant le contact le plus intime avec la surface.

IV.

Après avoir étudié les coniques osculatrices, c'est-à-dire les coniques coupant la surface (S) en cinq points confondus en O, cherchons les coniques surosculatrices, c'est-à-dire les coniques coupant la surface en six points confondus. Pour cela, il faudra joindre aux équations (28) la suivante,

$$a_5 = b_5,$$

ou, en tenant compte des valeurs déjà données pour a_5, b_5,

$$\begin{aligned} & u_1^2\varphi_2 + 3u_1\gamma\varphi_2^2 + m\left(\frac{3}{2}u_1^2\varphi_2^2 + \gamma\varphi^3\right)' + \frac{m^2}{3}(\varphi_2^3 u_1)'' \\ & = \varphi_5 + m\left(\varphi_2\varphi_4 + \frac{\varphi_3^2}{2}\right)' + \frac{m^2}{2}(\varphi_2^2\varphi_3)''. \end{aligned}$$

Si l'on considère la valeur de n comme connue, u_1 et γ seront donnés par les équations (31), et l'équation précédente fera connaître m. Comme elle est du second degré, on voit que *chacune des surfaces du second ordre qui contiennent les coniques osculatrices des sections menées par une même tangente contiendra deux coniques surosculatrices*. Remplaçons dans l'équation précédente u_1, γ par leurs valeurs; nous serons conduits à la relation suivante entre m et n,

$$\text{A} + \text{B} m\varphi_2 + \text{C} m^2 \varphi_2^2 = 0, \tag{34}$$

où A, B, C ont pour valeurs

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{A} &= 2\varphi_3^3 - 3\varphi_2\varphi_3\varphi_4 + \varphi_2^2\varphi_5,\\ \text{B} &= \varphi_2^4 \frac{d}{dn}\left(\frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3}\right) = 3\varphi_3^2\varphi_2' - 2\varphi_2\varphi_4\varphi_2' + \varphi_2^2\varphi_4' - 2\varphi_2\varphi_3\varphi_3',\\ \text{C} &= \varphi_3\varphi_2'^2 - \varphi_2\varphi_3'\varphi_2' - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_3\varphi_2'' + \frac{1}{2}\varphi_2^2\varphi_3'' = \frac{1}{2}\varphi_2^3 \frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette équation (34) donne la condition pour que le plan

$$mz + nx - y = 0$$

détermine dans la surface une section surosculée en O par une conique.

Il est aisé de reconnaître que les fonctions A, B, C sont respectivement des degrés 9, 6, 3. L'équation (34) représente donc un cône de neuvième classe; mais, comme elle est du second degré en m, on voit que le plan tangent est un plan septuple de ce cône. Ainsi :

Par une droite quelconque passant au point de contact on peut mener neuf sections surosculées par une conique au point de contact; mais, si la droite est une tangente de la surface, on ne peut plus en mener que deux.

Je ferai remarquer en outre que les génératrices de contact du cône et du plan tangent sont les tangentes asymptotiques, qu'il faut compter chacune deux fois, et les droites que nous avons appelées *tangentes d'osculation quadrique*.

On peut se servir de l'équation de ce cône pour résoudre une question intéressante. On connaît, en dehors des surfaces du second degré, d'autres surfaces par chacun des points desquelles passent une infinité de coniques : c'est ce qui a lieu pour la surface de Steiner, par exemple. Proposons-nous de rechercher toutes les surfaces jouissant de cette propriété. Ce problème, qui paraît au premier abord très difficile, peut être résolu d'une manière très simple à l'aide de la méthode suivante.

Je remarque d'abord qu'il n'y a pas de surface autre que les surfaces du second degré dont la section par un plan quelconque se décompose et contienne une conique. Il est aisé, en effet, de démontrer la proposition suivante :

Si une droite D *coupe une surface algébrique en des points qui sont tous distincts, et si les plans passant par cette droite coupent la surface suivant une section comprenant toujours au moins une conique, la surface se décompose et contient au moins une surface du second degré.*

Par suite, il est impossible que des plans quelconques déterminent dans une surface indécomposable, d'un degré supérieur au second, des sections comprenant chacune une conique. D'autre part si, comme nous le supposons ici, il y a une infinité de tels plans, passant par chaque point de la surface, il faut qu'ils enveloppent une surface non développable : je dis que cette surface est la surface proposée.

En effet, il y a, par hypothèse, une infinité de plans tangents du cône (34) coupant la surface suivant une conique. Si donc le cône (34) est indécomposable, tous les plans de ce cône devront jouir de la même propriété. Il suit de là que le cône (34) devrait être le cône de sommet O circonscrit à la surface enveloppe des plans coupant la surface (S) suivant une section conique. Or un des plans tangents de ce cône coïncide avec le plan tangent en O. On voit donc que la surface enveloppe des plans déterminant dans (S) des sections coniques ne peut être que la surface (S) elle-même, et, par conséquent, le cône (34) ne serait autre chose que le cône de sommet O circonscrit à la surface (S).

Or, je dis que cela ne peut être. De même que la section par un plan tangent en un point simple a seulement un point double au point de contact, les tangentes en ce point double étant les tangentes asymptotiques, de même le cône circonscrit à une surface ayant son sommet en un point simple admet seulement le plan tangent pour plan tangent double, les génératrices de contact de ce plan tangent double étant les tangentes asymptotiques. Or le cône (34) admet le plan tangent pour plan tangent septuple. Donc, tant qu'il sera indécomposable, les sections par ses plans tangents ne pourront être des coniques.

Il faut donc que le cône se décompose. Cela ne peut arriver que de deux manières différentes : ou bien il y aura un facteur, fonction de n, qui sera commun à A, $B\varphi_2$, $C\varphi_2^2$; ou bien l'équation du second degré en m admettra deux racines rationnelles.

La première supposition est impossible. Pour que la suppression d'un facteur commun réduisît le cône à admettre le plan tangent au plus comme plan tangent double, les génératrices de contact étant les tangentes asymptotiques, il faudrait que C fût nul ou que $C\varphi_2$ divisât A, c'est-à-dire, si l'on se reporte à l'expression de C et de A, que φ_2 divisât φ_3. Mais, si C est nul, il résulte de la dernière des formules (35) que φ_3 est encore divisible par φ_2. Cette condition devant avoir lieu pour tous les points de la surface (S), celle-ci serait du second degré, car ses tangentes asymptotiques la couperaient constamment en quatre points confondus.

Il reste donc à examiner le cas où les deux valeurs de m données par la formule (34) sont rationnelles. On aura alors

$$B^2 - 4AC = K^2,$$

K désignant un polynôme du sixième degré, et l'on aura pour m les deux valeurs

$$m\varphi_2 = -\frac{B+K}{2C}, \quad m\varphi_2 = -\frac{B-K}{2C}.$$

Les deux cônes correspondants à ces deux valeurs de m admettent tous les deux le plan tangent de (S) au moins pour plan tangent double, car nous avons déjà vu sur l'équation (34) que φ_2 ne saurait disparaître comme facteur commun à A, B, C. Donc, dans tous les cas, l'enveloppe des plans déterminant dans (S) des sections coniques ne peut être que la surface (S) elle-même, ou du moins elle comprend cette surface.

Les deux cônes précédents ne peuvent d'ailleurs être admis simultanément, leur ensemble constituant un cône qui admet le plan tangent à (S) au moins comme plan quadruple. Chacun d'eux, d'ailleurs, devra être rejeté tant que le numérateur de l'expression correspondante de $m\varphi_2$ ne sera pas exactement divisible par le dénominateur C, car il admettrait alors le plan tangent à (S) au moins comme plan tangent triple, ce qui est généralement impossible. Si le numérateur est exactement divisible par le dénominateur, et seulement dans ce cas, le cône peut être admis ; mais alors il est de la troisième classe. On voit donc que, dans tous les cas, le cône de sommet O circonscrit à la surface (S) sera de troisième classe. On déduit facilement de cette proposition la solution complète de la question proposée.

La polaire réciproque (S′) de (S) sera en effet du troisième ordre et, comme la surface (S) est coupée par chacun de ses plans tangents suivant une conique au moins, il faudra que le cône du quatrième ordre circonscrit à (S′) et ayant son sommet en un point de (S′) se décompose et contienne un cône du second degré. Il devra donc se réduire à deux cônes du second degré, et, par conséquent, la section complète de (S) par son plan tangent devra se composer de deux coniques : on reconnaît la surface de Steiner.

Dans la discussion précédente, nous avons omis le cas où la surface est réglée. Si l'on se sert alors de la forme réduite (9) donnée plus haut, on trouvera que l'équation du cône (34) devient

$$n^2 m^2 + 3nm + 2 + an^2 + an^3 + cn^4 = 0.$$

Pour qu'il se décompose, il faudra que

$$9 - 4(2 + an^2 + bn^3 + cn^4)$$

soit un carré parfait,

$$(1 - 2an^2)^2,$$

et alors on aura les deux cônes partiels

$$2nm = -3 \pm (1 - 2an^2).$$

Quel que soit celui de ces cônes que l'on prenne (et l'on ne peut prendre les deux à la fois), on voit qu'il est du second degré. Donc la surface réciproque de la surface cherchée devra être coupée par son plan tangent suivant une droite et une conique : ce sera la surface réglée du troisième degré.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

En dehors des surfaces du second ordre, il n'y a que la surface de Steiner, la surface réglée du troisième ordre et leurs variétés qui contiennent une infinité de coniques passant par chaque point de la surface.

V.

Après avoir considéré les coniques qui coupent la surface en six points confondus, et qui sont en nombre illimité, cherchons combien il y a de coniques coupant la surface (S) en sept points consécutifs. Pour cela il faudra ajouter aux équations déjà données la suivante :

$$a_6 = b_6.$$

En y remplaçant α, β, γ par leurs valeurs, on trouve l'équation suivante,

$$(36) \qquad A' + B' m\varphi_2 + C' m^2 \varphi_2^2 + D' m^3 \varphi_2^3 = 0,$$

où l'on a

$$A' = 2\varphi_6\varphi_2^3 - 4\varphi_3^2\varphi_2\varphi_4 - 4\varphi_2^2\varphi_4^2 + 6\varphi_3^4,$$

$$B' = 2\varphi_2^3\varphi_5' + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_4' - 6\varphi_4\varphi_2^2\varphi_3' - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi_3' + 2\varphi_2^2\varphi_5\varphi_2'$$
$$+ 20\varphi_3^3\varphi_2' - 16\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_2',$$

$$C' = \varphi_2^3\varphi_4'' + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_3'' - 2\varphi_2^2\varphi_4\varphi_2'' - \varphi_3^2\varphi_2\varphi_2'' + 4\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_4' - 12\varphi_3\varphi_2\varphi_2'\varphi_3'$$
$$- 10\varphi_2\varphi_4\varphi_2'^2 + 20\varphi_3^2\varphi_2'^2 - 2\varphi_2^2\varphi_3'^2,$$

$$D' = \tfrac{1}{3}\varphi_2^3\varphi_3''' + 3\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_3'' - \varphi_2^2\varphi_3'\varphi_2'' - 6\varphi_2\varphi_3'\varphi_2'^2 - 2\varphi_2\varphi_3\varphi_2'\varphi_2'' + 6\varphi_3\varphi_2''^3.$$

Au lieu de l'équation (36) nous prendrons celle que l'on obtient en en retranchant l'équation (34) multipliée par $7m\varphi_2\varphi_2'$, et nous aurons ainsi

$$(37) \qquad A'' + B'' m\varphi_2 + C'' m^2\varphi_2^2 + D'' m^3\varphi_3^2 = 0,$$

où A″, B″, C″, D″ ont les valeurs suivantes

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} A'' &= 2\varphi_6\varphi_2^3 - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi_4 - 4\varphi_2^2\varphi_4^2 + 6\varphi_3^4,\\ B'' &= 2\varphi_2^3\varphi_5' - 5\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_5 + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_4' - 6\varphi_4\varphi_2^2\varphi_3' + 5\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_2'\\ &\quad - 4\varphi_2\varphi_3^2\varphi_3' + 6\varphi_3^3\varphi_2',\\ C'' &= \varphi_2^3\varphi_4'' - 2\varphi_2^2\varphi_4\varphi_2'' + 4\varphi_2\varphi_4\varphi_2'^2 - 3\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_4' + 2\varphi_2^2\varphi_3\varphi_3''\\ &\quad - \varphi_3^2\varphi_2\varphi_2'' + 2\varphi_2\varphi_3\varphi_2'\varphi_3' - \varphi_3^2\varphi_2'^2 - 2\varphi_2^2\varphi_3'^2,\\ D'' &= \tfrac{1}{3}\varphi_2^3\varphi_3''' - \tfrac{1}{2}\varphi_2^2\varphi_2'\varphi_3'' - \varphi_2^2\varphi_3'\varphi_2'' + \varphi_2\varphi_3'\varphi_2'^2\\ &\quad + \tfrac{3}{2}\varphi_2\varphi_3\varphi_2'\varphi_2'' - \varphi_3\varphi_2'^3. \end{aligned}\right.$$

On peut encore indiquer ces expressions abrégées,

$$C'' = \varphi_2^4\frac{d}{du}\varphi_2\frac{d}{du}\frac{\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2}{\varphi_2^3} + 4\varphi_2^3\varphi_3\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right),$$

$$D'' = \tfrac{1}{3}\varphi_2^4\frac{d^3}{dn^3}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right) + \tfrac{1}{2}\varphi_2^3\varphi_2'\frac{d^2}{dn^2}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2}\right),$$

qui montrent presque immédiatement, par la décomposition en fractions rationnelles, que C″, D″ sont respectivement du sixième et du troisième degré. On verra facilement que B″ est du neuvième degré.

Si donc l'on pose

$$m\varphi_2 = u,$$

on aura à éliminer u entre les deux équations

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} A + Bu + Cu^2 &= 0,\\ A'' + B''u + C''u^2 + D''u^3 &= 0, \end{aligned}\right.$$

où les degrés des coefficients par rapport à n sont en progression arithmétique dans les deux équations : 9, 6, 3 pour la première, 12, 9, 6, 3 pour la seconde. Donc, d'après les règles connues, on sera conduit à une équation finale en n qui sera du trente-troisième degré. Mais je vais montrer que cette équation admet le facteur étranger φ_2^3 et qu'elle se réduit, par conséquent, à une équation du vingt-septième degré après la suppression de ce facteur.

Considérons en effet, dans les équations (38), u et φ_2 comme les seules variables, et traitons pour un instant toutes les autres fonctions φ_3, φ_2', ... comme des constantes. Il est aisé de reconnaître que pour $\varphi_2 = 0$ les équations ont une racine commune. En effet, pour $\varphi_2 = 0$, elles se réduisent aux suivantes,

$$\begin{aligned} 2\varphi_3^3 + 3\varphi_3^2\varphi_2' u + \varphi_3\varphi_2'^2 u^2 &= 0, \\ 6\varphi_3^4 + 6\varphi_3^3\varphi_2' u - \varphi_3^2\varphi_2'^2 u^2 - \varphi_3\varphi_2'^3 - u^3 &= 0, \end{aligned}$$

qui admettent la racine commune

$$\varphi_2' u = -\varphi_3.$$

La résultante des équations (38) admettra donc φ_2 en facteur. Mais, si l'on forme la combinaison

$$\left(3u\varphi_2' - 2\varphi_3 + \varphi_2 \frac{2\varphi_3\varphi_3' - 4\varphi_4\varphi_2'}{\varphi_3\varphi_2'}\right) A + Bu + Cu^2) \\ + A'' + B''u + C''u^2 + D''u^3 = 0,$$

on reconnaîtra aisément que cette équation, si l'on y considère u et φ_2 comme les coordonnées d'un point, représente une courbe ayant un point triple déterminé par les valeurs

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' u = -\varphi_3.$$

Il suit de là que, dans la résultante, φ_2^3 doit se trouver en facteur. Il est aisé de démontrer que la résultante n'est pas divisible par une plus haute puissance de φ_2 (¹). Donc, elle se réduira exactement au vingt-septième degré. Ainsi :

Il y a, en général, vingt-sept coniques qui coupent une surface quelconque en sept points confondus en un point simple de cette surface.

(¹) On peut suivre pour cela deux voies différentes : soit montrer qu'aucune combinaison linéaire des deux équations (38) ne peut conduire à une équation qui représente une courbe ayant un point quadruple correspondant aux valeurs

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2' u = -\varphi_3,$$

soit montrer que les tangentes au point triple de la courbe considérée dans le texte sont distinctes de la tangente à l'une des courbes représentées par l'équation (38) au même point.

J'ai encore calculé un exemple numérique dans lequel l'équation ne contient pas φ_2 à une puissance supérieure à la troisième.

Dans le cas des surfaces du troisième degré, ces vingt-sept coniques sont celles qui sont tout entières sur la surface et qui passent par le point considéré. On peut donc déduire du théorème qui précède la démonstration de l'existence de vingt-sept séries de coniques ou de vingt-sept droites sur la surface du troisième ordre. Mais de ce résultat particulier on n'aurait pu conclure le théorème précédent, car nous avons employé les termes des six premiers ordres du développement de z, et il n'existe pas de surface cubique ayant en un point avec une surface donnée un contact du sixième ordre.

VI.

Après avoir traité le cas des coniques quelconques, nous allons examiner en particulier les cercles et étudier les questions relatives au contact des cercles et de la surface (S).

Soient

$$(39) \qquad mz + nx = y, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

les équations d'un cercle tangent à la surface. En combinant la première de ces équations avec celle de la surface, on a les développements déjà donnés

$$(40) \qquad \begin{cases} y = nx + ma_2x^2 + ma_3x^3 + \ldots, \\ z = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots. \end{cases}$$

Pour avoir l'équation qui définit les points d'intersection du cercle et de la surface, il faut porter ces valeurs de y et z dans la seconde des équations (39), qui peut s'écrire

$$x^2(1 + n^2) + 2mnxz + z^2(1 + m^2) - 2Rz = 0.$$

On a donc

$$x^2(1 + n^2 - 2Ra_1) + (2mna_2 - 2Ra_3)x^3 \\ + x^4[(1 + m^2)a_2^2 + 2mna_3 - 2Ra_4] + \ldots = 0.$$

Pour que le cercle soit osculateur, il faut que l'on ait

$$1 + n^2 = 2Ra_2,$$

et cette équation, donnant une valeur de R indépendante de m, établit le théorème de Meusnier.

Pour que le cercle ait un contact du troisième ordre, il faut que l'on ait

$$1 + n^2 = 2Ra_2,$$
$$mna_2 = Ra_3.$$

Éliminons R, et remplaçons a_2, a_3 par leurs valeurs; nous obtiendrons l'équation

$$(41) \qquad 2mn\varphi_2^2 = (\varphi_3 + m\varphi_2\varphi_2')(1 + n^2).$$

Cette équation, établissant une relation entre m et n, définit tous les plans coupant la surface suivant des courbes ayant *un sommet* à l'origine. On peut l'écrire

$$(42) \qquad m\varphi_2[2n\varphi_2 - (1 + n^2)\varphi_2'] - \varphi_3(1 + n^2) = 0.$$

Sous cette forme on voit facilement que le coefficient de $m\varphi_2$ est du second degré seulement. L'équation représente donc un cône de cinquième classe ayant le plan tangent pour plan quadruple. Ainsi :

Les plans qui coupent la surface suivant des sections surosculées par des cercles au point O enveloppent un cône de cinquième classe admettant le plan tangent pour plan quadruple. En d'autres termes, il en passe cinq par un point quelconque de l'espace et un seul par une des tangentes de la surface.

On peut écrire l'équation du cône en rétablissant l'homogénéité. Remplaçons n par $\frac{y}{x}$, m par $\frac{z}{x}$; l'équation du plan sécant deviendra

$$(43) \qquad zZ + yX - xY = 0,$$

et l'équation (42) prendra la forme

$$(44) \qquad z\varphi_2(x, y)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) = \varphi_3(x, y)(x^2 + y^2).$$

Sous cette forme on voit que les quatre génératrices de contact du cône et du plan tangent sont les deux tangentes asymptotiques et les deux tangentes principales.

Dans le cas des surfaces enveloppes de sphères, $\varphi_3(x, y)$ admet en facteur une des directions principales et le cône se réduit à la quatrième classe. Pour la cyclide de Dupin, le cône se réduit à la troisième classe, les deux directions principales étant en facteur dans $\varphi_3(x, y)$. Il en est de même dans le cas des surfaces du second degré, mais pour une raison différente, φ_3 étant divisible par φ_2.

Il est aisé de voir que le lieu des normales aux cercles situés dans leurs plans sera en général un cône du quatrième ordre, dont l'équation sera

$$z\varphi_3(y, -x) = \varphi_2(y, -x)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right).$$

L'ordre de ce cône s'abaissera dans les mêmes cas et de la même quantité que la classe du cône précédent.

Enfin cherchons le lieu de tous les cercles surosculateurs, et pour cela nous supposerons qu'on ait pris pour axes des x et des y les directions principales; alors

$$\varphi_2(n) = \alpha + \beta n^2,$$
$$\varphi_3(n) = a + bn + cn^2 + dn^3,$$

et les équations du cercle seront

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - z\frac{1 + n^2}{\alpha + \beta n^2} = 0, \\ & \frac{\varphi_3(1 + n^2)}{2\varphi_2 n(\alpha - \beta)}z + nx - y = 0. \end{aligned}\right.$$

Entre ces équations il faudra éliminer n, ce qui se fait sans difficulté.

Posons, pour abréger,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$U = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) - z,$$
$$V = \beta(x^2 + y^2 + z^2) - z.$$

Les équations

$$U = 0, \quad V = 0$$

représenteront les sphères principales, et l'on aura

$$n^2 = -\frac{U}{V}.$$

La seconde des équations (45) peut s'écrire

$$(a + cn^2)\rho^2 + 2(\alpha - \beta)n^2 x = n[2y(\alpha = \beta) - b - dn^2].$$

Si l'on y remplace n par sa valeur, on aura

$$(46)\qquad \left\{ \begin{aligned} &[(aV - cU)\rho^2 - 2(\alpha - \beta)xU]^2 V \\ &\quad + U[dU - bV - 2yV(\beta - \alpha)]^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

équation du dixième degré qui représente une surface ayant pour ligne triple la courbe

$$U = 0, \quad V = 0$$

ou

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 0,$$

et pour ligne double la courbe (K) du sixième ordre représentée par les équations

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(aV - cU)\rho^2 + 2(\beta - \alpha)xU = 0, \\ &(dU - bV)\rho^2 + 2(\alpha - \beta)yV = 0, \end{aligned} \right.$$

la solution $U = 0$, $V = 0$ étant exclue.

Cette surface est évidemment unicursale, et elle est la transformée par rayons vecteurs réciproques, par rapport au point O, d'une surface réglée du cinquième ordre.

Mais c'est surtout la ligne double qu'il est intéressant d'étudier; elle est définie par les équations (47), qui montrent sans difficulté qu'elle est la réciproque d'une cubique gauche par rapport au point O.

En effet, si l'on emploie les formules

$$\frac{x}{\rho^2} = kx', \quad \frac{y}{\rho^2} = ky', \quad \frac{z}{\rho^2} = kz',$$

ces équations deviennent

$$\begin{aligned} &a(\beta - kz') - c(\alpha - kz') + 2(\beta - \alpha)(a - kz')x' = 0, \\ &d(\alpha - kz') - b(\beta - kz') + 2(\alpha - \beta)(\beta - kz')y' = 0. \end{aligned}$$

Voici quelle est l'origine de cette courbe. Prenons une sphère quelconque tangente en O à la surface. Cette sphère coupera la surface (S) suivant une courbe ayant en O deux tangentes symétriques par rapport aux directions principales. Les sections déterminées par les plans passant par ces deux tangentes auront leurs cercles osculateurs sur la sphère considérée. Il y en aura deux, une pour chaque tangente, qui seront surosculées par leurs cercles osculateurs ; ces deux cercles se coupent au point O et en un autre point qui décrit la ligne double précédente.

Il résulte de là une propriété remarquable de cette ligne double (K) : par chaque point de cette courbe il passe deux cercles coupant la surface en quatre points confondus. Si donc on transforme la surface par rayons vecteurs réciproques en prenant, pour pôle un point de la courbe double, ces deux cercles se transformeront en droites tangentes qui couperont la surface en quatre points confondus. En d'autres termes, les tangentes asymptotiques de la surface transformée la couperont en quatre points confondus ; ou, ce qui est la même chose, il y aura des surfaces du second degré ayant avec la transformée un contact complet du troisième ordre. Ainsi :

Le lieu des pôles des inversions qui transforment une surface (S) *en une autre ayant au point homologue d'un point déterminé* O *de* (S) *un contact du troisième ordre avec une surface du second degré est une courbe du sixième ordre qui est l'inverse, par rapport au point* O, *d'une cubique gauche.*

C'est là un résultat intéressant et dont nous aurons à faire usage.

Dans le cas où le point O est un ombilic, l'équation du cône (42) se réduit à

$$\varphi_3(1+n^2)=0.$$

Alors, tous les plans passant par une des droites représentées par l'équation

$$\varphi_3=0$$

couperont effectivement l'unique sphère principale ayant avec la surface un contact du second ordre, suivant des cercles coupant la surface en quatre points consécutifs.

Quant aux plans passant par les droites de coefficient angulaire $\pm i$, ils ne peuvent donner de véritable cercle et ils doivent être écartés.

VII.

Cherchons maintenant les cercles qui coupent la surface au point O, en cinq points consécutifs. Pour cela, il faudra joindre aux deux équations déjà obtenues la suivante :

$$2mna_3 + (m^2+1)a_2^2 = 2Ra_4.$$

Éliminant R et réduisant, nous avons

$$(48)\quad (1+m^2)\varphi_2^4 = (1+n^2)\left[\varphi_2\varphi_4 - \varphi_3^2 + m\varphi_2(\varphi_2\varphi_3' - \varphi_3\varphi_2') + \frac{m^2}{2}\varphi_2^3\varphi_2''\right].$$

Si l'on élimine m entre cette équation et l'équation (42), on arrive à un résultat qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(48\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &[\varphi_2^3 - (1+n^2)\varphi_4][2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi_2']^2 \\ &+ [3n\varphi_3 - (1+n^2)\varphi_3'][2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi_2']\varphi_3(1+n^2) \\ &+ \varphi_3^2(1+n^2)\left[\varphi_2(1-n^2) - \frac{\varphi_2''}{2}(1+n^2)^2\right. \\ &\qquad\qquad \left. + n\varphi_2'(1+n^2)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que cette équation est du dixième degré. En introduisant l'homogénéité et remplaçant n par $\frac{y}{x}$, elle devient

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &[\varphi_2^3(x,y) - (x^2+y^2)\varphi_4]\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 \\ &+ \left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial\varphi_3}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)(x^2+y^2)\varphi_3 \\ &+ (x^2+y^2)\varphi_3^2(x,y)\left[\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\right)(x^2-y^2)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + 2xy\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\partial y}\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, il y a dix cercles surosculateurs passant en un point simple de la surface. Leurs traces sur le plan tangent sont déterminées par l'équation précédente.

Je dis qu'il ne saurait y en avoir davantage si le point n'est pas un ombilic. En effet, pour que l'équation précédente soit vérifiée identiquement, il faut que le seul terme de cette équation qui ne contienne pas le facteur x^2+y^2,

$$\varphi_2^3(x, y)\left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right),$$

soit exactement divisible par x^2+y^2. Le second facteur, égalé à zéro, donne les directions principales, nécessairement rectangulaires ; il ne peut admettre le diviseur x^2+y^2. Il faut donc que φ_2^3 ou φ_2 soit divisible par x^2+y^2, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi_2 = k(x^2+y^2),$$

ce qui exprime que le point est un ombilic.

Mais alors, nous l'avons vu, l'équation du cône (42) se réduit à

$$\varphi_3(1+n^2)=0,$$

ou, en supprimant le facteur $(1+n^2)=0$, qui ne donne aucune véritable solution, à

$$\varphi_3=0.$$

L'équation (48) se réduit alors à la suivante,

$$\varphi_4 - k^3(1+n^2)^2 = mk(1+n^2)\varphi_3',$$

qui, jointe à l'équation

$$\varphi_3=0,$$

détermine les véritables cercles coupant la surface en cinq points confondus ; ces cercles sont, en général, au nombre de trois, excepté dans les cas suivants :

Si une racine de φ_3 est double et si la valeur correspondante de m est indéterminée, il y aura une infinité de cercles correspondants à cette racine, c'est-à-dire ayant la même trace sur le plan tangent.

En second lieu, si φ_3 est identiquement nul, c'est-à-dire si la surface a un contact du troisième ordre ou d'un ordre plus élevé avec une sphère, il pourra évidemment y avoir une infinité de cercles, tous situés sur cette sphère et coupant la surface en cinq ou plus de cinq points consécutifs.

Nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Si en un point simple d'une surface il passe plus de dix cercles coupant la surface en cinq points consécutifs réunis en ce point, ce point est un ombilic.

Il n'existe pas de surface admettant plus de dix séries de sections circulaires.

Car tous les points d'une telle surface devraient être des ombilics.

On peut ajouter que, si une surface contient dix séries distinctes de sections circulaires, elle ne saurait être une surface enveloppe de sphères, car alors φ_3 et $x\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ auraient un facteur commun, et l'équation (49) aurait une racine double correspondante à ce facteur. Par la même raison, on voit qu'aucun des cercles ne sera tangent à une section principale.

VII.

Nous pouvons maintenant démontrer que toute surface qui admet dix séries de sections circulaires est nécessairement une cyclide. En effet, si les dix cercles définis par l'équation (48 *bis*) appartiennent à la surface, ils pourront être considérés comme la coupant au moins en six points confondus en O, et, par conséquent, la valeur de m qui leur correspond, et qui est définie par l'équation (42), devra satisfaire aussi à l'équation (34), qui exprime que la conique de section par le plan

$$mz + nx - y = 0,$$

conique qui, ici, est un cercle, coupe en six points confondus au point O. On est ainsi conduit à l'équation

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} &A[2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2]^2 \\ &\quad + B\varphi_3(1+n^2)[2n\varphi_2 - (1+n^2)\varphi'_2] + C\varphi_3^2(1+n^2)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation du treizième ordre devra admettre toutes les racines de l'équation du dixième ordre (48 *bis*). Au lieu d'effectuer le calcul auquel on serait ainsi conduit, je vais employer l'artifice suivant.

Considérons la sphère contenant l'un des cercles (C) et tangente en O à la surface. La section de la surface par cette sphère aura un point double en O. L'une des tangentes en ce point double sera la tangente au cercle (C). L'autre tangente, symétrique de la première par rapport aux directions principales, en sera nécessairement distincte, et par cette tangente il passera un cercle (C′) coupant la surface en cinq points confondus. Ce cercle sera évidemment situé sur la même sphère que le cercle (C), et il coupera ce cercle (C) en un point M différent du point O, et qui appartiendra à la courbe (K), considérée au § V. Si donc on transforme la surface proposée (S) par inversion, en prenant ce point M pour pôle de l'inversion, elle se transformera en une surface (S′) qui contiendra maintenant une de ses tangentes asymptotiques, et pour laquelle φ_3 sera divisible par φ_2.

Nous allons introduire cette double hypothèse dans les équations à considérer.

Supposons que l'on prenne pour axe des y cette tangente asymptotique, qui fait partie de la surface; on aura

$$\varphi_2 = \mathrm{A}(hx^2 + xy),$$
$$\varphi_3 = \varphi_1 \varphi_2.$$

Quant à φ_4, φ_5, ils seront divisibles par x. Donc, quand on remplacera x par 1, y par n, la fonction φ_i sera de degré $i - 1$ en n. On aura

$$\varphi_2(n) = \mathrm{A}(n + h).$$

On peut même, en prenant une surface semblable à la proposée, remplacer A par l'unité et poser

$$\varphi_2(n) = n + h.$$

On aura

$$\varphi_3 = \varphi_2(\alpha + \beta n) = \varphi_2 u_1,$$

et il résulte de l'expression (35) de C que C sera nul.

Mais alors l'équation (48 *bis*) se réduira à une équation du neuvième degré, la racine qui devient infinie correspondant au cercle changé en tangente asymptotique; quant à l'équation (50), où l'on peut supprimer le facteur

$$2n\varphi_2 - (1 + n^2)\varphi'_2,$$

qui définit les directions principales, elle se réduira à la suivante,

$$(51)\qquad A[2n\varphi_2-(1+n^2)\varphi'_2]+B\varphi_3(1+n^2)=0,$$

qui n'est plus que du huitième degré et qui, devant admettre toutes les racines de l'équation (48 *bis*), *devra avoir lieu identiquement*.

Par suite, le facteur $2n\varphi_2-(1+n^2)\varphi'_2$ devra diviser

$$B\varphi_3(1+n^2).$$

Comme il ne peut, nous l'avons vu, diviser $(1+n^2)$ ni φ_3 tant que la surface n'est pas une enveloppe de sphères, il faudra qu'il divise B.

Or on a

$$B=\varphi_2^4\frac{d}{dn}\frac{\varphi_2\varphi_4-\varphi_3^2}{\varphi_2^3}$$

ou, en remplaçant φ_3 par sa valeur,

$$B=\varphi_2^4\frac{d}{dn}\frac{\varphi_4-u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}.$$

D'ailleurs,

$$2n\varphi_2-(1+n^2)\varphi'_2=n^2+2nh-1=\varphi_2^2-1-h^2.$$

On devra donc avoir identiquement

$$\varphi_2^4\frac{d}{dn}\left(\frac{\varphi_4-u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right)=(\varphi_2^2-1-h^2)(l\varphi_2^2+l'\varphi_2+l''),$$

ou encore

$$\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{\varphi_4-u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right)=l+\frac{l'}{\varphi_2}+\frac{l''-l(1+h^2)}{\varphi_2^2}-\frac{(1+h^2)l'}{\varphi_2^3}-\frac{(1+h^2)l''}{\varphi_2^4}.$$

Le premier membre contiendra en dénominateur au plus la troisième puissance de φ_2. Il faut donc que l'on ait

$$l''=0.$$

D'ailleurs, le second membre étant la dérivée d'une fonction algébrique de φ_2, il faut aussi que l' soit nul. Il restera donc

$$\frac{d}{d\varphi_2}\left(\frac{\varphi_4-u_1^2\varphi_2}{\varphi_2^2}\right)=l-\frac{l(1+h^2)}{\varphi_2^2},$$

et en intégrant on voit tout de suite que φ_4 doit être divisible par φ_2.

Si maintenant nous nous reportons à l'équation (51), nous voyons que tous les termes de cette équation, sauf $\varphi_2^2\varphi_5$, sont divisibles par φ_2^3. Il faut donc également que φ_5 soit divisible par φ_2.

On voit donc que la seconde tangente asymptotique, comme la première, coupera la surface en six points confondus en O, et, par conséquent, elle sera l'un des dix cercles qui coupent la surface en six points confondus : c'est d'ailleurs ce que montre bien aussi l'équation (48 *bis*), dont le premier membre devient divisible par la première puissance de φ_2.

En nous reportant à la surface (S) nous voyons que tout cercle passant au point O sera coupé en deux points par un des neuf autres cercles qui passent au même point; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Quand une surface admet dix séries de sections circulaires, chacun des cercles passant en un point O *est coupé en deux points par un autre cercle de la surface passant au même point.*

Cette proposition va nous dispenser de toutes les intégrations qu'il y aurait à faire pour trouver la surface (S), ou du moins elle va nous permettre de les faire sous une forme géométrique.

Considérons, en effet, un cercle (C) de la surface et tous les cercles (Γ), (Γ'), ... qui le rencontrent en deux points. Il est clair que, lorsque le cercle (C) se déplacera d'une manière continue sur la surface, il ne cessera pas de rencontrer (Γ), (Γ'), ... En effet, considérons l'un quelconque des cercles (Γ). Il est coupé par le cercle (C) en deux points M, M'. Le cercle qui le coupera en deux points, dont l'un sera très voisin de M, ne pourra être que très voisin du cercle (C), et, par conséquent, il constituera une position nouvelle du cercle (C), qui se déplace et se déforme en restant sur la surface.

La surface contient donc deux séries de cercles (C), (C'), ... et (Γ), (Γ'), ... telles que tout cercle de la première série coupe en deux points tout cercle de la seconde.

Or, quand un cercle rencontre deux autres cercles (Γ), (Γ'), par exemple en deux points, il est nécessairement orthogonal à la sphère unique qui coupe ces deux cercles à angle droit. Les cercles (C), (C′), ... seront donc tous orthogonaux à une même sphère (θ), et il en sera de même des cercles de l'autre série. Les sphères qui contiendront l'un des cercles (C) et l'un des cercles (Γ) seront orthogonales à (θ).

Il suit de là que la surface cherchée est l'enveloppe d'une série de sphères (V) qui coupent à angle droit une sphère fixe (θ), et, comme elle contient deux séries de cercles orthogonaux à (θ), il faut que la surface lieu des centres des sphères (V) admette un double système de génératrices rectilignes correspondantes à toutes les sphères qui passent soit par un cercle (C), soit par un cercle (Γ). Le lieu des centres des sphères (V), devant être doublement réglé, sera donc du second degré, et la surface cherchée sera l'enveloppe des sphères coupant orthogonalement une sphère fixe et ayant leurs centres sur une surface du second degré; en d'autres termes, ce sera une cyclide générale.

Dans les raisonnements qui précèdent, nous n'avons considéré que les termes des cinq premiers ordres. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si une surface admet en un point simple dix cercles la coupant en six points confondus, elle a avec une cyclide un contact du cinquième ordre.