BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 4, nº 1 (1880), p. 273-277

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1880_2_4_1_273_0>

© Gauthier-Villars, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

B. BONCOMPAGNI. — Cinq Lettres de Sophie Germain a Charles-Frédéric Gauss, publiées d'après les originaux possédés par la Société royale des Sciences de Göttingen. — Berlin, Institut de photolithographie des frères Burchard, imprimerie de Gustave Schade (Otto Francke), MDCCLXXX; 24 p. non numérotées, in-4°.

De ces cinq Lettres, la première et la troisième, datées du 21 novembre 1804 et du 16 novembre 1805, toutes deux signées *Le Blanc,* avaient été publiées par M. Stupuy d'après des brouillons conservés à la Bibliothèque nationale de Paris ([1]). M. le prince Boncompagni les réédite aujourd'hui et avec raison, car les originaux de ces deux Lettres présentent avec les brouillons et l'imprimé quelques variantes intéressantes. Notons en particulier dans la première des Lettres cette utile addition à la page 300 de l'édition imprimée : « En relisant le Mémoire de M. de la Grange (Berlin, 1775), j'ai vu avec étonnement qu'il n'a pas su réduire la quantité

$$s^{10}-11(s^8-4s^6r^2+7s^4r^4-5s^2r^6+r^8)r^2$$

(p. 352) à la forme t^2-11u^2, car

$$s^{10}-11(s^8-4s^6r^2+7s^4r^4-5s^2r^6+r^8)r^2$$

$$=\left\{\begin{array}{l} s^{10}-2.11s^6r^4+11(5+6)r^8s^2-11(s^8-6s^6r^2+7s^4r^4+6s^2r^6+r^8)r^2,\\ s_{10}-2.11s^6r^4+11^2r^8s^2-11(s^8-6s^6r^2+9s^4r^4-2s^4r^4+6s^2r^6+r^8)r^2,\\ (s^5-11sr^4)^2-11(s^4-3s^2r^2-r^4)^2 \quad (^2). \text{»}\end{array}\right.$$

La quatrième Lettre, écrite le 30 février 1807, a été publiée par M. Ernest Schering dans les additions à un discours prononcé lors du centenaire de Gauss ([3]). Elle précède immédiatement la Lettre de Gauss que M. le prince Boncompagni a récemment publiée ([4]). « En me rendant compte de l'honorable mission dont

---

([1]) *OEuvres philosophiques de Sophie Germain*, p. 298, 308.

([2]) *Lisez* $11(s^4-3s^2r^2-r^4)r^2$. (Remarque de M. le prince Boncompagni.)

([3]) *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. XXII; 1877.

([4]) *Voir* le *Bulletin*, 2e série, t. III, 1879.

je l'avais chargé, M. Pernetty m'a mandé qu'il vous avait fait connaître mon nom; cette circonstance me détermine à vous avouer que je ne vous suis pas aussi parfaitement inconnue que vous le croyez, mais que, craignant le ridicule attaché au titre de femme savante, j'ai autrefois emprunté le nom de M. Le Blanc pour vous écrire et vous communiquer des Notes qui, sans doute, ne méritaient pas l'indulgence avec laquelle vous avez bien voulu y répondre. » C'est, comme on vient de le voir, la première des Lettres qui soit signée *Sophie Germain*. L'écriture y est, en général, plus lâchée et plus svelte que dans les précédentes. On apprend que Sophie Germain habitait le Marais (rue Sainte-Croix-de-la-Bretonnerie, 23). L'adresse porte : *A M. le Dr Gauss, logé chez Ritter-Steinweg, no* 1917, *à Brunswick*. A la Lettre était jointe une Note dont on connaît le contenu par la réponse de Gauss.

La première des deux Lettres inédites est datée du 21 juillet 1805 et signée *Le Blanc*. Cette phrase du début mérite d'être citée : « Vous me donnez l'espérance de vous entretenir avec moi de l'objet de vos études; rien au monde ne pourrait me faire plus de plaisir qu'une semblable correspondance. » Gauss avait écrit dans le no 267 de ses *Disquisitiones arithmeticæ* (1) : « Nous excluons de nos recherches les formes ternaires dont le déterminant est 0, que nous traiterons plus en détail dans une autre occasion et qui ne sont ternaires qu'en apparence, se réduisant, comme on le verra, à des formes binaires (2). » Sophie Germain lui annonce qu'elle a fait

(1) Nous citons la traduction française de Poullet-Delisle, qui devait paraître deux ans après.

(2) Rappelons qu'on nomme :

1° *Formes binaires* les fonctions

$$ax^2 + 2a'xx' + a''x'^2,$$

dans lesquelles a, a', a'' représentent des nombres entiers, x, x' deux indéterminées;

2° *Formes ternaires* les fonctions

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx',$$

dans lesquelles a, a', a''; b, b', b'' représentent des nombres entiers, x, x', x'' trois indéterminées;

3° *Déterminant de ces formes* le nombre

$$ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''.$$

cette réduction. Viennent ensuite quelques renseignements sur un libraire infidèle à ses engagements vis-à-vis de Gauss, un excellent résumé du quatrième Volume de la *Mécanique céleste* de Laplace, enfin une Notice sur le travail de Legendre consacré à la détermination des orbites des comètes.

La seconde Lettre inédite, la dernière de la publication, est la plus importante. Accompagnée d'un essai de démonstration (encore inédit) des trois théorèmes sur les résidus énoncés par Gauss ([1]), elle est spécialement consacrée aux résidus des puissances plus grandes que le carré; elle porte la date du 27 juin 1807. Voici les cinq propositions que Sophie Germain soumet au jugement de l'illustre géomètre :

1° p étant un nombre premier, si q est un nombre premier à $p-1$, tous les nombres de la série $1, 2, \ldots, p-1$ seront résidus puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p).

2° Si l'on a au contraire $p-1 = q^s$, il y aura, parmi les q^s nombres $1, 2, \ldots, q^s$ résidus et $(q-1)s$ non résidus, puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p).

3° Le produit de $a \equiv r^m$ par $b \equiv r^n$ est ou n'est pas résidu puissance $q^{\text{ième}}$ (mod. p) suivant que $m+n$ est ou n'est pas $\equiv 0$ (mod. q).

4° Si l'on désigne par $2^m, q, q', \ldots$ les différents facteurs de k dans $p = 2k+1$, -1 sera résidu puissance $(2^{m-1})^{\text{ième}}$, $q^{\text{ième}}$, $q'^{\text{ième}}$ (mod. p).

5° Pour les nombres premiers $2^{2^i}+1$, 2 est résidu $(2^{2^i-i-1})^{\text{ième}}$ puissance.

Le théorème (2) est particulièrement important; on le trouve sous une forme assez différente dans le n° 310 du *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret.

Grâce à la publication que nous venons de brièvement résumer, les lacunes que présentait jusqu'ici la correspondance de Gauss et de Sophie Germain sont comblées en partie : nous disons en partie, car la plus récente de ces cinq Lettres porte la date du 27 juin 1807; or Sophie Germain est morte en 1831. Nous pourrions donc vraisemblablement affirmer l'existence de Lettres postérieures, si nous

---

([1]) *Lettera inedita di Carlo-Federico Gauss a Sofia Germain.* Firenze, autografia Achille Paris, 1879.

n'étions d'ailleurs autorisés par une gracieuse communication à dire qu'il y a encore à Gœttingue d'autres Lettres inédites ([1]).

Espérons que ces Lettres recevront bientôt comme leurs aînées l'honneur d'une de ces luxueuses publications dont M. le prince Boncompagni enrichit la bibliographie mathématique. C. H.

G. GOVI. — INTORNO ALLA DATA DI UN DISCORSO INEDITO PRONUNCIATO DA FEDERICO CESI, FONDATORE DELL' ACCADEMIA DEI LINCEI. — Roma, Salviucci, 1880 (extrait des *Atti della R. Accademia dei Lincei*). In-4°, 20 pages.

G. GOVI. — SU ALCUNE LETTERE INEDITE DI LAGRANGE PUBB. DAL BONCOMPAGNI (extrait des *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze di Napoli*, juin 1880).

C'est en parcourant le Catalogue des manuscrits possédés par la Bibliothèque de Naples que M. G. Govi a eu le bonheur de trouver le discours du prince Cesi dont il est question dans le premier Mémoire. Intitulé *Del natural desiderio di sapere e Institutione de' Lincei per adempimento di esto*, ce document fait partie d'un manuscrit qui a pour titre : *Indicatio philosophicorum Operum quæ Federicus Cæsius Lynceus Princeps I. Fed. F. Princ. etc. sibi condixit*. M. Govi le présente à l'Académie et le publie, « non à cause de la nouveauté du sujet, non pour le style, mais parce qu'il a été composé par notre fondateur et prononcé par lui dans une séance solennelle à laquelle était présent le plus glorieux de nos prédécesseurs, l'immortel Galilée ». L'argumentation à laquelle le savant éditeur se livre pour prouver cette dernière assertion et placer la lecture de ce discours le 26 janvier 1616, peu de temps après l'arrivée de Galilée à Rome, est fort remarquable. Voici l'argument décisif : M. Govi a découvert et présenté en 1876 à l'Académie *dei*

([1]) Cet article était imprimé lorsque nous avons reçu de M. le professeur Angelo Genocchi une savante Notice extraite des Actes de l'Académie des Sciences de Turin (séance du 20 juin 1880), et intitulée : *Il carteggio di Sofia Germain e Carlo Federico Gauss*. Dans ce travail on trouvera d'importants renseignements, non seulement sur les manuscrits inédits de Sophie Germain, possedés par la Societe Royale de Göttingen, mais encore des éclaircissements sur plusieurs points de l'histoire de la théorie des nombres, particulièrement sur des manuscrits recemment publiés de Fermat.

Lincei des procès-verbaux de Jean Faber, le secrétaire *dei Lincei*. Or, un de ces procès-verbaux renferme le compte rendu d'un Discours dont les termes concordent parfaitement avec le Discours du prince Cesi. On doit féliciter vivement M. Govi d'avoir retrouvé ce document, qui complète heureusement les beaux Mémoires du prince Odescalchi sur le prince Cesi et l'Académie *dei Lincei*.

Le second Mémoire dont nous avons inscrit le titre en tête de ces lignes est consacré à des publications dont il a été rendu compte à plusieurs reprises dans ce Recueil. C. H.