Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Sur les polygones circonscriptibles à un cercle

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 64-72

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_64_1>

SUR LES POLYGONES CIRCONSCRIPTIBLES A UN CERCLE;

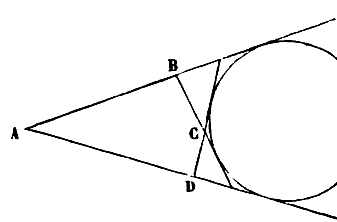
PAR M. G. DARBOUX.

Dans un article inséré au Tome 32 du *Journal de Crelle,* Steiner étudie le quadrilatère circonscriptible, et il fait remarquer que, dans la plupart des Traités de Géométrie élémentaire, on énonce d'une manière inexacte la condition pour qu'un quadrilatère soit circonscriptible à un cercle. Cette condition paraît avoir été donnée pour la première fois par Pitot, en 1725, dans les *Mémoires de l'Académie des Science,* (p. 45), sous la forme suivante :

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés.

Or, il est aisé de reconnaître que cet énoncé est inexact même pour le quadrilatère convexe. Il suffit, pour s'en convaincre, de jeter les yeux sur la *fig.* 1, qui représente un quadrilatère circon-

Fig. 1.



scrit à un cercle, mais de telle manière que les points de contact des différents côtés et du cercle soient sur les prolongements de ces côtés. On démontrera aisément que l'on a toujours

$$AD + DC = AB + BC;$$

mais on n'a pas, en général,

$$AB + CD = AD + BC.$$

La proposition de Pitot a donc besoin d'une correction, et Steiner lui substitue la proposition suivante, qui est générale et rigoureuse :

Dans tout quadrilatère circonscrit à un cercle, la somme de deux côtés, opposés ou adjacents suivant les cas, est égale à celle des deux autres côtés.

Réciproquement, *toutes les fois que dans un quadrilatère la somme de deux côtés quelconques est égale à celle des deux autres, le quadrilatère est circonscriptible à un cercle.*

Steiner ne donne pas de démonstration complète de cette double proposition; il se contente d'établir la première partie en quelques lignes à la fin de son article et de la déduire de l'examen de toutes les positions possibles de quatre tangentes à un cercle. Le théorème complet se trouve démontré dans l'excellent Traité de Mathématiques élémentaires de M. Baltzer (t. II, p. 31). La théorie des sections coniques conduit aussi à une démonstration très-simple de la seconde proposition, la seule qui puisse offrir quelque difficulté.

Considérons, en effet, un quadrilatère ABCD, et supposons que dans ce quadrilatère la somme de deux côtés soit égale à celle des deux autres. On ne pourra avoir que l'une des trois égalités

$$AB + BC = AD + DC,$$
$$AB - BC = AD - DC,$$
$$AB - BC = DC - AD,$$

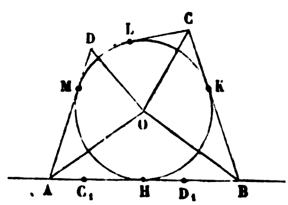
et l'une quelconque d'entre elles exprime qu'il y a une conique ayant pour foyers les deux sommets opposés A et C et passant par les deux autres sommets B et D du quadrilatère. Menons les tangentes en B et D à cette conique. Elles se coupent en un point M, et l'on sait qu'en ce point viennent passer une des bissectrices de l'angle A et une des bissectrices de l'angle C. Le point M est donc à égale distance des quatre côtés du quadrilatère ABCD, et, par conséquent, il est le centre d'un cercle inscrit à ce quadrilatère.

Après avoir rappelé tous ces résulats, nous allons faire connaître une proposition nouvelle qui nous a été suggérée par l'étude des systèmes articulés.

Supposons qu'étant donné un quadrilatère circonscriptible ABCD on le déforme de telle manière, que les sommets consécutifs A, B restent fixes. Dans toutes les positions de ce quadrilatère il y aura un cercle inscrit : je dis que le centre de ce cercle décrit un autre cercle.

Soit ABCD (*fig.* 2) le quadrilatère dans une de ses positions. Dé-

Fig. 2.



signons ses côtés AB, BC, CD, DA par a, b, c, d, et supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$a + c = b + d.$$

Alors le cercle inscrit sera placé comme l'indique la figure et, toutes les fois que le quadrilatère ABCD sera convexe, touchera les côtés de ce quadrilatère en des points qui seront sur les côtés eux-mêmes et non sur leurs prolongements. Soit O le centre du cercle, on sait que les angles COD, AOB sont supplémentaires. Faisons tourner le triangle OCD dans son plan autour de O jusqu'à ce que CD vienne s'appliquer sur AB ; C viendra en un point C_1 tel que

$$C_1H = CL,$$

et de même D viendra en un point D_1 tel que

$$D_1H = DL.$$

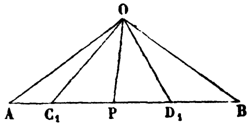
On aura donc

$$AD_1 = HD_1 + AH = DM + AM = d,$$
$$BC_1 = BH + HC_1 = BK + CK = b,$$

et, par conséquent, les points C_1 et D_1 seront des points de la base AB qui demeureront fixes quand le quadrilatère articulé BCDA se déformera. Il est utile de remarquer que C_1, D_1 sont les positions que viennent occuper les sommets C et D quand le quadrilatère ABCD se déforme de telle manière que tous ses sommets viennent se placer en ligne droite.

Ce point étant admis, nous avons une propriété géométrique du centre O du cercle inscrit, qui permet de trouver le lieu de ce point. Le triangle OC_1D_1 étant égal au triangle OCD, il en résulte que les deux angles sous lesquels on voit du point O les deux segments fixes AB, C_1D_1 sont supplémentaires. On est donc ramené à cher-

Fig. 3.



cher le lieu des points O d'où l'on voit ces deux segments sous des angles supplémentaires.

L'angle C_1OD_1 (*fig.* 3) étant supplémentaire de l'angle AOB, on a

$$\widehat{C_1OD_1} = \hat{A} + \hat{B}.$$

On peut donc mener une droite OP partageant l'angle C_1OD_1 en deux parties C_1OP, POD_1 respectivement égales aux angles A et B. On aura alors

$$\overline{OP}^2 = PA.PC_1 = PB.PD_1.$$

Le point P est donc le point central de l'involution définie par les deux segments AC_1, BD_1, et le lieu du point O est le cercle ayant pour diamètre le segment qui divise harmoniquement les deux segments AC_1, BD_1. Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donné un quadrilatère ABCD *circonscriptible à un cercle et qui se déforme de telle manière que les sommets* A *et* B *demeurent fixes, les grandeurs des côtés étant invariables, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle ayant pour diamètre le segment qui divise harmoniquement les deux diagonales* AC, BD *du quadrilatère quand il est amené dans la position où il a ses quatre sommets en ligne droite.*

La même méthode de recherche peut être étendue aux polygones d'un nombre pair quelconque de côtés. Supposons qu'un polygone de $2n$ côtés $A_1A_2, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$ soit circonscrit à un cercle, et, pour fixer les idées, admettons qu'il est convexe et que le cercle inscrit est à l'intérieur de ce polygone. Alors la somme des côtés de rang pair est égale à celle des côtés de rang impair. La somme des angles sous lesquels on voit du centre les côtés de rang impair est égale à π. Il est aisé de démontrer que ce polygone peut être déformé de manière à rester toujours circonscriptible à un cercle, et de trouver le lieu du centre du cercle inscrit lorsqu'on suppose que deux sommets consécutifs, par exemple A_1 et A_2, soient fixes.

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ les côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{2n}A_1$ du polygone, et soient $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ les tangentes menées des différents sommets du polygone au cercle inscrit. On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} t_1+t_2=a_1,\\ t_2+t_3=a_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ t_{2n}+t_1=a_{2n}. \end{array}\right.$$

Ces $2n$ équations se réduisent à $2n-1$, car, en les ajoutant de deux en deux, on trouve

$$t_1+t_2+\ldots+t_{2n}=a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}=a_2+a_4+\ldots+a_{2n},$$

et ces deux équations donnent la relation nécessaire

$$a_1+\ldots+a_{2n-1}=a_2+a_4+\ldots+a_{2n},$$

et se réduisent à une seule, contenant les quantités t. Mais, si les équations ne définissent pas complètement les tangentes t, il est aisé de reconnaître qu'elles font connaître la somme de deux tangentes quelconques dont les indices ont des parités différentes. On a, par exemple,

$$t_{2k}+t_{2h+1}=a_{2k}-a_{2k+1}+a_{2k+2}-a_{2k+3}+\ldots+a_{2h},$$

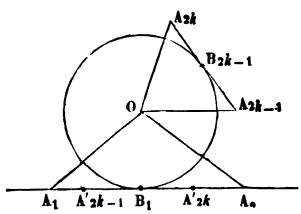
h étant plus grand que k, et

$$t_{2h+1}+t_{2k}=a_{2h+1}-a_{2h+2}+\ldots+a_{2k-1},$$

k étant plus grand que h.

Cela posé, considérons les triangles ayant pour sommet commun le centre O (*fig.* 4) du cercle inscrit au polygone et pour bases les côtés de rang impair $A_{2k-1}A_{2k}$. Faisons tourner l'un quelconque d'entre eux dans son plan autour du point O jusqu'à ce que $A_{2k-1}A_{2k}$ vienne se placer sur le premier côté A_1A_2. Alors les som-

Fig. 4.



mets viennent occuper des positions $A'_{2k-1}A'_{2k}$ et l'on a

$$\begin{aligned} A'_{2k}\ \ B_1 &= A_{2k}\ \ B_{2k-1} = t_{2k}, \\ A'_{2k-1}B_1 &= A_{2k-2}B_{2k-1} = t_{2k-1}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} A_1A'_{2k} &= t_1 + t_{2k}, \\ A_2A'_{2k-1} &= t_2 + t_{2k-1}. \end{aligned}$$

En vertu de la remarque faite plus haut, les seconds membres de ces équations ne dépendent que des longueurs des côtés, et, par conséquent, les positions des points A'_k seront fixes et connues dès que l'on connaîtra les longueurs des côtés du polygone.

Il est à remarquer que la ligne $A_1A_2A'_3\ldots A'_{2n}A_1$ peut être considérée comme un polygone aplati qui est une position limite du polygone proposé quand celui-ci se déforme et que ses sommets viennent se placer en ligne droite.

Les angles $A'_{2k-1}OA'_{2k}$ sont évidemment égaux aux angles $A_{2k-1}OA_{2k}$ sous lesquels on voit du point O les côtés de rang impair du polygone proposé, et l'on peut dire par conséquent que le point O jouit de la propriété suivante : La somme des angles sous lesquels on voit de ce point les n segments A_1A_2, $A'_3A'_4, \ldots$, $A'_{2n-1}A'_{2n}$ est égale à π. Je dis que, réciproquement, si l'on a trouvé un point O jouissant de cette propriété, on pourra circonscrire au cercle de centre O tangent à A_1A_2 un polygone dont les côtés seront $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

En effet, joignons ce point O aux points $A_1, A_2, \ldots, A'_3, \ldots, A'_{2n}$; nous formons ainsi $2n$ triangles $OA_1A_2, OA_2A'_3, \ldots, OA'_{2n}A_1$. La somme des angles en O de ces triangles est la même pour les triangles de rang pair que pour les triangles de rang impair. La somme totale de ces angles est donc égale à 2π. Remarquons seulement que le sens des angles aux sommets A_{k-1}, OA_k est différent pour des triangles dont des rangs ont des parités différentes. Pour supprimer cette distinction, faisons tourner tous les triangles de rang pair de 180° autour d'un de leurs côtés passant en O. Alors nous aurons une suite de $2n$ triangles tels que : 1° tous les angles en O aient le même sens de rotation; 2° que la somme de ces angles soit égale à 2π; 3° que les bases de ces triangles soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ et que les hauteurs soient toutes égales; 4° que le premier côté de chaque triangle soit égal au second côté du triangle précédent. On pourra donc, en faisant tourner ces triangles autour de O dans leur plan, les assembler de telle manière que chaque premier côté de l'un des triangles coïncide avec le dernier du triangle précédent, et l'on formera ainsi un polygone fermé de côtés $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ inscrit à un cercle de centre O.

Nous sommes donc conduits à cette conclusion qu'on peut déformer le polygone de telle manière qu'il ne cesse pas d'être tangent à un cercle, et, pour obtenir le lieu du centre du cercle inscrit quand deux sommets consécutifs du polygone restent fixes, nous sommes ramenés à la question suivante :

Trouver la courbe lieu des points d'où l'on voit p segments déterminés sur une ligne droite sous des angles dont la somme est égale à π ou est un multiple de π.

De telles courbes sont des cas particuliers de celles que j'ai considérées dans mon Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* page 74. Voici comment on peut obtenir leur équation.

Prenons pour axe des x la droite qui contient les segments et pour axe des y une perpendiculaire. Désignons par α_k, β_k les abscisses des extrémités du $k^{\text{ième}}$ segment, et posons, pour abréger,

$$z = x + y\sqrt{-1}, \quad z' = x - y\sqrt{-1}.$$

Si V_k est l'angle sous lequel on voit du point xy le segment $(\alpha_k \beta_k)$, on trouvera facilement

$$e^{2V_k\sqrt{-1}} = \frac{(z-\beta_k)(z'-\alpha_k)}{(z-\alpha_k)(z'-\beta_k)},$$

et par conséquent, en posant

$$S = V_1 + \ldots + V_p,$$

$$f(z) = (z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_p),$$
$$\varphi(z) = (z-\beta_1)\ldots(z-\beta_p),$$

on aura

$$e^{2S\sqrt{-1}} = \frac{\varphi(z)}{f(z)}\,\frac{f(z')}{\varphi(z')};$$

S devant être égal à un multiple de π, l'équation devient

$$(1) \qquad \frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{\varphi(z')}{f(z')},$$

et elle se réduit au degré $p-2$ après la suppression du facteur $z-z'$. Donc, pour un polygone de degré $2n$, le lieu du centre du cercle inscrit est une courbe de degré $2n-2$, ce qui est bien d'accord avec le résultat obtenu pour le quadrilatère.

Les propriétés générales des courbes que nous rencontrons, et qui ont été étudiées dans l'Ouvrage cité, trouvent ici leur application. En effet, l'équation de la courbe cherchée peut aussi s'écrire

$$\frac{\varphi(z)+\lambda f(z)}{\varphi(z)+\mu f(z)} = \frac{\varphi(z')+\lambda f(z')}{f(z')+\mu\varphi(z')}.$$

Supposons λ et μ réels et posons

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)+\lambda f(z)}{1+\lambda},$$

$$f_1(z) = \frac{\varphi(z)+\mu f(z)}{1+\mu};$$

nous pourrons écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\varphi_1(z)}{f_1(z)} = \frac{\varphi_1(z')}{f_1(z')},$$

toute semblable à la première. La courbe proposée peut donc être définie de la même manière avec une infinité de systèmes différents de segments, puisqu'on peut choisir arbitrairement λ et μ. Il suffira que λ et μ satisfassent à certaines inégalités, par exemple soient très-grands ou très-petits, pour que les équations

$$f_1(z) = 0, \quad \varphi_1(z) = 0$$

aient leurs racines réelles comme les précédentes

$$f(z) = 0, \quad \varphi(z) = 0.$$

Je me contenterai de ces indications et je n'examinerai pas non plus les polygones qui sont circonscrits à des cercles, mais de telle manière que les points de contact des côtés soient sur leurs prolongements. Les résultats sont identiques à ceux qui précèdent. Les signes seuls de certains côtés sont changés dans la relation

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}.$$