BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ED. DEWULF

P.-H. SCHOUTE

Construire une courbe rationnelle du quatrième ordre qui ait deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passe par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 383-400

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_383_1>

MÉLANGES.

CONSTRUIRE UNE COURBE RATIONNELLE DU QUATRIÈME ORDRE QUI AIT DEUX POINTS DOUBLES EN a_1 ET a_2 ET QUI PASSE PAR LES SEPT POINTS SIMPLES 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;

PAR MM. ED. DEWULF, Lieutenant-Colonel du Génie, à Bayonne;
le Dr P.-H. SCHOUTE, Professeur à la Haye (Hollande).

I. Le problème est déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut avoir qu'un nombre limité de solutions. En effet, une courbe du qua-

(1) *Annali di Matematica*. Rome, 1859.

trième ordre est déterminée par quatorze conditions, et les deux points doubles donnés équivalent à six conditions; le point double dont la position n'est pas donnée équivaut à une condition; chacun des sept points simples donnés équivaut aussi à une condition.

Nous ferons usage dans cette étude des notations employées et des principes développés par M. de Jonquières dans son *Essai sur la génération des courbes géométriques* (1), ainsi que de la *Théorie des transformations géométriques* de M. Cremona (2).

II. La question serait résolue si l'on connaissait un point x rendant projectifs les deux faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 4, 5],$$
$$(a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 4, 5].$$

En effet, le lieu géométrique du quatrième point d'intersection P de deux coniques correspondantes

$$(a_1, a_2, x, 6, \mathrm{P}) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, \mathrm{P})$$

de ces faisceaux serait une courbe C_4 satisfaisant à la question. On voit aussi que la question, présentée de cette manière, est déterminée, car on a deux inconnues, les coordonnées du point x, et, si l'on établit la correspondance projective des deux faisceaux en faisant correspondre les coniques

$$(a_1, a_2, x, 6. 1) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 1),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 2) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 2),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 3) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7, 3),$$

on dispose, pour les déterminer, des deux équations qui expriment l'égalité des rapports anharmoniques

$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 4] \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 4],$$
$$(a_1, a_2, x, 6)\,[1, 2, 3, 5] \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, x, 7)\,[1, 2, 3, 5].$$

Les cinq faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, 6)\,[1, 2, 3, 4, 5]$$

(1) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XVI.
(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1873, p. 205 et suiv.

déterminent sur une droite quelconque l cinq séries de couples de points en involution. Supposons le point x connu; les coniques

$$(a_1, a_2, x, 6, 1),\quad (a_1, a_2, x, 6, 2),\quad (a_1, a_2, x, 6, 3),$$
$$(a_1, a_2, x, 6, 4),\quad (a_1, a_2, x, 6, 5)$$

appartiennent respectivement au premier, au deuxième, au troisième, au quatrième et au cinquième faisceau, et les couples de points qu'elles déterminent sur l appartiennent respectivement aux involutions correspondantes. En outre, ces cinq couples de points forment une involution, parce qu'ils appartiennent à cinq coniques du faisceau

$$(a_1, a_2, x, 6).$$

Le même raisonnement peut être appliqué aux cinq faisceaux de coniques

$$(a_1, a_2, 7)\,[1, 2, 3, 4, 5],$$

et l'on voit aisément que les cinq couples de points que l'on obtient ici forment une involution projective avec la précédente.

III. Le problème ci-dessus peut donc être remplacé par le suivant : *Sur une droite l on a deux systèmes de cinq involutions; on demande de trouver dans chacun des systèmes cinq couples de points appartenant respectivement aux cinq involutions et satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° que dans chaque système les cinq couples de points forment une involution; 2° que ces deux nouvelles involutions soient projectives.*

Que l'on prenne un cercle M, un point O sur sa circonférence, et que l'on joigne ce point O aux couples de points de l'une des involutions, on obtiendra un faisceau en involution. Les couples de rayons conjugués de cette involution déterminent sur la circonférence M des arcs dont les cordes concourent en un point b. Si l'on fait la même opération pour les cinq involutions des deux systèmes, les cinq involutions du premier système donneront les cinq points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5; celles du second système donneront les points $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$.

IV. Imaginons deux points p et π tels que les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

soient projectifs. Les cinq rayons du premier faisceau déterminent sur M cinq arcs dont les extrémités projetées sur l donnent cinq couples de points formant une involution i_p et appartenant respectivement aux cinq involutions qui correspondent aux cinq points b; de même les cinq rayons du second faisceau déterminent sur l cinq couples de points formant une involution i_π et appartenant respectivement aux cinq involutions du second système; et, comme les deux faisceaux p et π sont projectifs par hypothèse, les involutions i_p et i_π sont aussi projectives.

Soient s_1, t_1 et s_2, t_2 deux couples de points conjugués de l'involution i_p; les coniques

$$(a_1, a_2, 6, s_1, t_1) \quad \text{et} \quad (a_1, a_2, 6, s_2, t_2)$$

se coupent en un point x; le faisceau de coniques

$$(a_1, a_2, 6, x)$$

marque sur la droite l l'involution i_p. L'involution i_π détermine de même un point ξ. Si les points x et ξ se confondaient en un seul, ce point fournirait une solution du problème.

V. Ce problème est donc encore ramené à celui-ci : *Combien peut-on trouver de systèmes de points p et π qui donnent des points x et ξ coïncidents?*

La solution de ce nouveau problème découlera naturellement de l'étude des relations qui lient les points x et p, p et π, π et ξ.

VI. *Système des points p et π.* — Soit p un point quelconque. Si l'on décrit par les points β_1, β_2, β_3, β_4 une conique C_2 capable du rapport anharmonique du faisceau

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4),$$

puis par les points β_1, β_2, β_3, β_5 une conique C'_2 capable du rapport anharmonique

$$p(b_1, b_2, b_3, b_5),$$

ces deux coniques, qui ont en commun les points β_1, β_2, β_3, se couperont en un quatrième point π tel, que les rapports anharmoniques de quatre rayons correspondants quelconques des faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5)$$

sont égaux. Donc, *à un point p correspond un seul point π*. On voit de la même manière qu'à *un point quelconque π correspond un seul point p*.

Quand le point p se confond avec un des points b_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), la direction pb_i étant indéterminée, la position du point π l'est aussi, et tous les points de la conique Γ_i circonscrite au quadrilatère des points β autres que β_i et capable du rapport anharmonique du faisceau des droites qui joignent b_i aux quatre points b autres que b_i satisfont à la question. Ainsi, *à chacun des points b_i correspondent tous les points d'une conique déterminée Γ_i circonscrite au quadrilatère des quatre points β autres que β_i*. De même, *à chacun des points β_i correspondent tous les points d'une conique déterminée C_i*.

Il est facile de voir que les cinq coniques Γ_i passent par un même point β_0, auquel correspondent tous les points de la conique C_0 circonscrite au pentagone b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, et que les cinq coniques C_i passent par un même point b_0, auquel correspondent tous les points de la conique Γ_0 qui passe par les cinq points β_1, β_2, β_3, β_4, β_5.

Maintenant, quand le point p parcourt une droite quelconque l', le point π doit parcourir une courbe rationnelle (unicursale), puisque les points de cette courbe correspondent un à un à ceux de la droite l'. La droite l' coupant chacune des coniques C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) en deux points, la courbe des points π passera deux fois en chacun des points β, et cette courbe ne peut avoir d'autres points multiples; on a donc, en représentant par n son degré inconnu,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6, \quad \text{d'où} \quad n = 5.$$

Donc, *quand le point p parcourt une droite quelconque l', le* *point π parcourt une courbe Γ_5 ayant six points doubles aux six points β.* Il résulte immédiatement de la théorie des transformations birationnelles que, *quand π parcourt une droite quelconque λ, le point p décrit une courbe C_5 ayant six points doubles aux six points b.*

La correspondance des points p et π est birationnelle et du cinquième ordre; les points fondamentaux de la figure (p) sont b_0^2, b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, b_5^2; ceux de la figure (π) sont β_0^2, β_1^2, β_2^2, β_3^2, β_4^2, β_5^2 (¹). La jacobienne des courbes du réseau C_5 se compose des six coniques C_i, celle du réseau Γ_5 des coniques Γ_i.

On sait que, quand le point p décrit une courbe quelconque C_m, le point π parcourt une courbe C_{5m} ayant des points d'ordre $2m$ aux points fondamentaux β de (π), etc. (²). Cette remarque nous sera utile plus loin. La correspondance entre les points p et π a été exposée dans tous ses détails par M. Rud. Sturm dans un Mémoire intitulé *Das Problem der Projectivität,* inséré au Tome I des *Mathematische Annalen.*

VII. *Système des points p et x.* — Par un point quelconque p et deux des points b, b_1 et b_2 par exemple, traçons deux droites; elles déterminent sur le cercle M deux arcs dont les extrémités, projetées du point O sur la droite l, donnent deux couples de points s_1, t_1 et s_2, t_2. Les deux coniques

$$(a_1,\ a_2,\ 6,\ s_1,\ t_1),\quad (a_1,\ a_2,\ 6,\ s_2,\ t_2),$$

qui ont en commun les points a_1, a_2, 6, se coupent en un quatrième point, qui est un point x. Donc, *à un point quelconque p correspond un seul point x.*

Si l'on donne le point x, le faisceau de coniques

$$(a_1,\ a_2,\ \sigma,\ x)$$

détermine sur l une série de couples de points en involution. Projetons ces couples du point σ sur M; chacun d'eux détermine

---

(¹) La notation b^2 indique que le point b est double.

(²) De Jonquières, *Nouvelles Annales,* 2ᵉ serie, t. III (*De la transformation géométrique,* etc., nº 13).

une corde et toutes ces cordes vont concourir en un point p. Donc, *à un point x ne correspond généralement qu'un seul point p.*

Remarquons que, pour déterminer le point p, qui correspond à un point x, il suffit de deux coniques quelconques du faisceau

$$(a_1, a_2, 6, x);$$

on peut donc choisir pour ces coniques deux des trois couples de droites que l'on peut tracer par les quatre points a_1, a_2, x, 6.

De cette remarque résulte une construction très simple du point p, qui correspond à un point donné x. Projetons du point O sur M les points d'intersection avec l des droites $a_1 a_2$, $a_1 6$, $a_2 6$, et nommons ces points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$. Supposons que nous prenions pour déterminer le point p les coniques formées par les couples de droites $a_1 a_2$ et $x6$, $a_1 6$ et $x a_2$; il faudra projeter sur M les points d'intersection avec l de $x6$ et de $x a_2$, joindre le premier de ces points à $e_{1,2}$, le second à $e_{1,6}$, et le point d'intersection de ces deux nouvelles droites sera le point p cherché.

Quand le point x décrit une droite quelconque, les rayons passant par les points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$ engendrent deux faisceaux projectifs ; le point p décrit donc une conique passant par $e_{1,2}$ et $e_{1,6}$; on voit aisément que cette conique passe aussi par le point $e_{2,6}$. Donc, *quand le point x décrit une droite quelconque, le point p décrit une conique circonscrite au triangle $e_{1,2}\, e_{1,6}\, e_{2,6}$.*

Il est facile de voir que, *quand le point p décrit une droite quelconque, le point x décrit une conique circonscrite au triangle $a_1\, a_2\, 6$.*

La correspondance entre les points p et x est donc birationnelle et du second ordre. Les points fondamentaux de (x) sont $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$; ceux de (p) sont a_1, a_2, 6. La jacobienne de (x) est formée par les côtés du triangle $e_{1,2}\, e_{1,6}\, e_{2,6}$, celle de (p) par les côtés du triangle $a_1\, a_2\, 6$.

VIII. *Système des points π et ξ.* — On établirait exactement de la même manière que la correspondance entre les points π et ξ est birationnelle et du second ordre, que les points fondamentaux de (π) sont a_1, a_2, 7, ceux de (ξ) $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$, que la jacobienne de (π) est formée par les droites $a_1 a_2$, $a_1 7$, $a_2 7$, celle de (ξ) par les droites $e_{1,2}\, e_{1,7}$, $e_{1,2}\, e_{2,7}$, $e_{1,7}\, e_{2,7}$.

IX. *Système des points x et ξ.* — A un point quelconque x correspond un seul point p de la transformation $[p, x]^2$; à ce point p, considéré comme appartenant à la transformation $[p, \pi]^5$, correspond un seul point π; à ce point π, considéré comme appartenant à la transformation $[\pi, \xi]^2$, correspond un seul point ξ. Donc, *à un point quelconque x correspond un seul point ξ.* On voit de la même manière qu'*à un point quelconque ξ correspond un seul point x.*

Quand le point x parcourt une droite quelconque l', le point p correspondant de $[x, p]^2$ décrit une conique C passant par les trois points $e_{1,2}$, $e_{1,6}$, $e_{2,6}$ et ne passant généralement par aucun des points fondamentaux b. A cette conique, considérée comme appartenant à $[p, \pi]^5$, correspond une courbe C_{10} ayant six points doubles aux points β, mais ne passant généralement par aucun des points fondamentaux $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$. A cette C_{10} correspond dans $[\pi, \xi]^2$ une courbe C_{20} ayant trois points décuples aux points a_1, a_2, 7, six points doubles aux points β'_0, β'_1, β'_2, β'_3, β'_4, β'_5 qui correspondent aux points β dans la transformation $[\pi, \xi]^2$. Donc, *quand le point x parcourt une droite quelconque, le point ξ décrit une courbe rationnelle de l'ordre* 20, et il résulte de la théorie des transformations birationnelles que *la correspondance entre les points x et ξ est birationnelle et de l'ordre* 20.

Détermination des points fondamentaux et des jacobiennes de la transformation $[x, \xi]^{20}$. — Au point a_1 de (x) dans $[x, p]^2$ correspond une droite fondamentale de (p). A cette droite, considérée comme appartenant à (p) dans $[p, \pi]^5$, correspond dans $[\pi]$ une C_5 ayant des points doubles aux points β. A cette C_5, considérée comme appartenant à (π) dans $[\pi, \xi]^2$, correspond dans (ξ) une courbe Φ_{10} ayant des points quintuples en a_1, a_2, 7 et des points doubles en β'_0, β'_1, β'_2, β'_3, β'_4, β'_5. Donc, *le point a_1 est un point fondamental décuple dans la figure (x) de la transformation* $[x, \xi]^{20}$, *et la courbe Φ_{10} fait partie de la jacobienne de (ξ) et a un point quintuple au point a.*

Le même raisonnement montre que les points a_2 et 6 dans la figure (x), les points a_1, a_2, 7 dans (ξ) sont des points fondamentaux décuples de (x) et de (ξ), et que la courbe fondamentale qui correspond à a_2^{10} passe cinq fois en ce point.

Représentons par b'_0, b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5 les points de (x) qui correspondent aux points b de (p) dans $[p, x]^2$.

Au point b'_i de (x) correspond dans la figure (p) de $[p, x]^2$ le point b_i. Au point b_i de (p), considéré comme appartenant à (p) de $[p, \pi]^5$, correspond dans (π) une courbe fondamentale C_2. A C_2, considérée comme appartenant à (π) de $[\pi, \xi]^2$, correspond dans (ξ) une Φ_4 ayant des points doubles en a_1, a_2, 7. Ainsi, *les six points b' de (x) sont des points fondamentaux quadruples dans $[x, \xi]^{20}$ auxquels correspondent des quartiques ayant des points doubles en a_1, a_2, 7.*

Représentons par $e^p_{1,2}$, $e^p_{1,7}$, $e^p_{2,7}$ les points de (p) qui dans $[p, \pi]^5$ correspondent aux points $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$ de (π) et par $e^x_{1,2}$, $e^x_{1,7}$, $e^x_{2,7}$ les points de (x) qui correspondent aux points e^p de (p) dans $[p, x]^2$.

Au point $e^x_{1,2}$, par exemple, de (x) correspond dans (p) de $[p, x]^2$ le point $e^p_{1,2}$. Au point $e^p_{1,2}$ de (p), considéré comme appartenant à $[p, \pi]^5$, correspond dans (π) le point $e_{1,2}$. Enfin, au point $e_{1,2}$, considéré comme appartenant à (π) dans $[\pi, \xi]^2$, correspond une droite dans (ξ). Donc, *les trois points e^x sont des points fondamentaux simples de (x) dans $[x, \xi]^{20}$.*

En résumé, les points fondamentaux de (x) dans $[x, \xi]^{20}$ sont a_1^{10}, a_2^{10}, 6^{10}, $b_0'^{4}$, $b_1'^{4}$, $b_2'^{4}$, $b_3'^{4}$, $b_4'^{4}$, $b_5'^{4}$, $e^x_{1,2}$, $e^x_{1,7}$, $e^x_{2,7}$. Quant aux courbes fondamentales correspondantes, notons seulement que celle qui correspond à a_1^{10} a un point quintuple en a_1 et que celle qui correspond à a_2 a un point quintuple en ce point. Cette remarque nous sera utile dans la conclusion.

X. *Conclusion.* — Puisque la transformation $[x, \xi]^{20}$ est du vingtième ordre, elle a $n + 2 = 22$ points doubles (*Transformations géométriques*, p. 237). Mais il faut observer qu'au point a_1 correspond une courbe fondamentale qui a un point quintuple en a_1; le point a_1 doit donc être compté cinq fois au nombre des points doubles de $[x, \xi]^{20}$, et il en est de même du point a_2. Ces deux points ne pouvant satisfaire à la question, *il y a douze courbes simples du quatrième ordre qui ont un point double en chacun des points donnés a_1 et a_2, un troisième point double en un des douze points ci-dessus et qui passent par les sept points simples* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A ces douze courbes simples il convient d'ajouter la courbe composée formée de la courbe du troisième ordre déterminée par les neuf points donnés a_1, a_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et par la droite $a_1 a_2$.

Si l'on considère que les courbes du quatrième ordre assujetties à avoir deux points doubles en deux points donnés a_1 et a_2, à avoir un troisième point double de position non fixée à l'avance et à passer par sept points simples donnés sont déterminées par 13 ou 14 — 1 conditions, on voit qu'elles forment un faisceau dont la base renferme deux points doubles communs à toutes les courbes du faisceau. Le nombre des points doubles des courbes de ce faisceau situés en dehors de la base est donc donné par la formule

$$3(n-1)^2 - 7p,$$

où

$$n = 4 \quad \text{et} \quad p = 2.$$

Dans ce cas,

$$3(n-1)^2 - 7p = 13.$$

Le résultat trouvé plus haut est donc vérifié.

Nous avons présenté au Congrès de Montpellier une autre solution géométrique du problème ci-dessus; nous renvoyons pour cette solution au *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences.*

XI. *Détermination graphique des douze courbes du quatrième ordre.* — 1° Pour déterminer graphiquement les douze points doubles autres que a_1 et a_2 de la transformation $[x, \xi]^{20}$, il faut, d'après la théorie générale des transformations géométriques de M. Cremona (¹), tracer deux courbes du vingt et unième ordre, et ce tracé exige celui des courbes de deux faisceaux du vingtième ordre. Cette opération est impraticable, à cause de sa complication; mais on peut arriver à la détermination des douze points cherchés par un procédé beaucoup plus simple, que nous allons exposer.

Nous allons chercher les points p ou les points π qui conduisent à ces points doubles.

Prenons un point x quelconque que nous considérons comme appartenant successivement aux deux figures (x) et (ξ) de la transformation $[x, \xi]$. Considéré comme appartenant à (x), ce point a pour cor-

(¹) *Loc. cit.*, p. 237.

respondant dans la figure (p) dans $[p, x]^2$ un point p, et, considéré comme appartenant à la figure (ξ), il a pour correspondant un point π de (π) dans $[\pi, \xi]^2$. Si les points p et π ainsi obtenus se correspondaient dans $[p, \pi]^5$, le point x serait un des points doubles cherchés.

Puisqu'il existe douze de ces points doubles, si nous prenons un point quelconque P, il existe douze rayons du faisceau de droites, dont le centre est P, qui passent par ces points doubles. Un quelconque r de ces rayons, considéré comme appartenant à la figure (x) dans $[p, x]^2$, a pour correspondant une conique C_2 de (p). Si le rayon r tourne autour de P, les coniques C_2 correspondantes forment un faisceau dont la base est formée par les points $e_{1,2}, e_{1,6}$, $e_{2,6}$ et le point P_p correspondant à P. A ce faisceau de coniques correspond dans la figure (π) de $[p, \pi]^5$ un faisceau de courbes Γ_{10} qui ont des points quadruples aux six points β et dont ces points β et le point P_π, correspondant à P_p, forment la base. Considérons maintenant le faisceau de droites P comme appartenant à la figure (ξ) de $[\xi, \pi]^2$. A ce faisceau correspond dans (π) un faisceau de coniques Γ_2 dont la base est formée par les points $e_{1,2}$, $e_{1,7}$, $e_{2,7}$ et le point P′, correspondant à P dans $[\xi, \pi]^2$. Si nous regardons comme correspondantes les courbes des faisceaux Γ_{10} et Γ_2 qui correspondent à un même rayon du faisceau P, ces deux faisceaux engendrent une courbe Γ_{12} sur laquelle se trouvent les points π qui donnent lieu aux points doubles de $[x, \xi]^{20}$. A un autre point quelconque Q correspond pareillement une nouvelle courbe Γ'_{12}, qui renferme aussi les points π qui conduisent aux points doubles de $[x, \xi]^{20}$. Les points π cherchés sont donc au nombre des points d'intersection de Γ_{12} et de Γ'_{12}, et il est facile d'éliminer les points étrangers.

2° Cette construction peut encore être notablement simplifiée en choisissant les points a_1 et a_2 au lieu des points quelconques P et Q. En effet, au faisceau de droites a_1, considéré comme appartenant à (x) dans $[x, p]^2$, correspond dans (p) un faisceau de droites dont le centre est $e_{2,6}$. A ce faisceau, considéré comme appartenant à (p) dans $[p, \pi]^5$, correspond un faisceau de courbes Γ_5 de (π).

Les points β sont des points doubles de la base de ce faisceau, qui est complétée par le point qui correspond à $e_{2,6}$ dans (π).

Au faisceau de droites a_1, regardé comme appartenant à (ξ) dans $[\xi, \pi]^2$, correspond un autre faisceau de droites λ.

Les faisceaux des courbes Γ_5 et des droites λ engendrent une courbe Γ_6 du sixième ordre, si l'on prend comme correspondants les éléments de ces faisceaux qui correspondent à un même rayon r du faisceau a_1, et cette courbe Γ_6 a des points doubles aux six points β.

On trouve de la même manière une courbe Γ'_6 en partant du point a_2; Γ'_6 a aussi des points doubles aux points β.

Ces deux courbes Γ_6 et Γ'_6 ont donc en commun les six points doubles β qui sont étrangers à la question, et elles se coupent en $36 - 4 \times 6 = 12$ *autres points, qui sont les points cherchés.*

3° Les courbes Γ_6 et Γ'_6 sont faciles à construire. Ne nous occupons que de Γ_6.

On connait, *a priori*, six points doubles de cette courbe : ce sont les points β et deux points simples, le point qui, dans (π) de $[p, \pi]^5$, correspond à $e_{2,6}$ et le point $e_{2,7}$. Il suffit donc de trouver sept autres points simples de cette courbe pour qu'elle soit entièrement déterminée.

Voyons d'abord comment on peut trouver ces sept points. Il faut pour cela tracer deux courbes Γ_5 et les rayons λ correspondants; on obtiendra ainsi dix points, parmi lesquels on en prendra sept.

4° *Construction d'une courbe* Γ_5. — On connaît six points doubles de cette courbe, les points β et un point simple, le point de (π) qui correspond à $e_{2,6}$ dans (p) de $[p, \pi]^5$. On détermine directement un autre point, et la construction de Γ_5 est alors ramenée à la solution du problème suivant :

5° *Construire une courbe du cinquième ordre dont on connaît six points doubles et deux points simples.* — Pour plus de simplicité, nommons a, b, c, d, e, f les six points doubles donnés, 1 et 2 les deux points simples donnés. Les points a^2, b, c, d, e, f déterminent un faisceau de cubiques ayant un point double en a; les courbes de ce faisceau marquent une involution du second ordre sur une transversale passant par f. Par chacun des couples de points conjugués de cette involution et par les sept points b, c, d, e, f, 1, 2, faisons passer de nouvelles cubiques : ces nouvelles cubiques forment un faisceau projectif au faisceau (a^2, b, c, d, e, f), et ces deux faisceaux engendrent une courbe du sixième ordre qui se décompose en une droite et la courbe du cinquième ordre cherchée.

Il nous reste donc le problème suivant :

6° *Construire une courbe du sixième ordre dont on connaît six points doubles et neuf points simples.*

La solution de ce problème se trouve indiquée dans l'*Essai sur la génération des courbes géométriques* de M. de Jonquières [1]. Nous allons la développer ici, en modifiant la démonstration du lemme sur lequel elle repose.

Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ les six points doubles; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 les neuf points simples donnés. Le problème serait résolu si l'on connaissait deux points x et y rendant projectifs les deux faisceaux

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ x)\ [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9],$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ y)\ [3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9].$$

Que par les sept points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 1, et respectivement par chacun des points 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on fasse passer sept séries de cubiques : on déterminera sur une droite L passant par le point a_1 sept séries distinctes de couples de points en involution. Dans chacune des sept séries, il suffira de trouver les intersections de deux courbes avec la droite L et ces intersections peuvent être déterminées par le tracé de coniques en suivant la méthode donnée par M. Chasles [2].

Pareillement, si par les sept points $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, 2, et respectivement par les sept points 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on fait passer des séries de cubiques, on détermine sur L sept autres séries de couples de points en involution.

Actuellement, si l'on détermine les sept couples de points A_1, B_1, A_2, B_2, ... du premier système et les sept couples de points A'_1, B'_1, A'_2, B'_2, ... du second système, qui sont en involution dans chaque système et qui se correspondent un à un, la question sera résolue, car les cubiques

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_1,\ B_1),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_2,\ B_2),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 1,\ A_3,\ B_3),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

---

(1) *Loc. cit.*, § IX, p. 47, deuxième Section.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, § XI, p. 1195; décembre 1855.

passent évidemment par un même point x, et, de plus, elles correspondent une à une aux sept cubiques

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_1,\ B'_1),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_2,\ B'_2),$$
$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ 2,\ A'_3,\ B'_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui passent toutes par un même point y.

Dans chacun des systèmes, il suffira de considérer trois courbes et de construire la droite qui passe par les deux points d'intersection inconnus des deux premières, puis la droite qui passe par les points d'intersection inconnus de l'une de ces courbes et de la troisième. Ces deux droites se couperont au point cherché. Ces constructions se feront par la méthode de M. Chasles (¹).

Le problème est donc ramené au suivant :

Étant données sur une droite sept séries distinctes de couples de points en involution formant un premier système et sept autres séries de couples de points en involution formant un second système, on demande de déterminer quatorze couples de points conjugués appartenant aux quatorze séries respectivement et jouissant des propriétés suivantes, savoir, que les sept couples du premier système soient en involution et correspondent un à un aux sept couples de points du second système, qui doivent pareillement être en involution.

Que l'on prenne un cercle M et sur ce cercle un point fixe O. Les côtés des angles sous lesquels on voit du point O les couples de points conjugués de chacune des quatorze séries interceptent dans le cercle des cordes qui vont toutes concourir en un même point. Soient b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 les points ainsi obtenus pour les sept premières séries, β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6, β_7 les points donnés par les involutions de la seconde série. Si l'on détermine deux points p et π qui rendent projectifs les deux faisceaux

$$p\,(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7), \tag{1}$$
$$\pi\,(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6,\ \beta_7), \tag{2}$$

(¹) CHASLES, *loc. cit.*, p. 1193, § VI, Remarque.

les quatorze droites pb et $\pi\beta$ interceptent dans le cercle des cordes qui, vues du point O, se projetteront sur la droite donnée suivant quatorze couples de points qui résolvent le problème proposé.

Nous avons étudié ci-dessus (VI) le système des points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5).$$

Supposons maintenant qu'à chacun de ces systèmes de points b et β viennent s'ajouter de nouveaux points b_6 et β_6, et proposons-nous de trouver les couples de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6),$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6).$$

D'après le nombre des équations dont nous disposons pour déterminer les coordonnées des points p et π, chacun de ces deux points peut occuper un nombre simplement infini de positions. Cela veut dire que chacun des points p et π se trouve respectivement sur une courbe dont nous allons déterminer le degré.

Les points p et π qui satisfont à la question rendent projectifs les deux couples de faisceaux que l'on obtient en prenant un quelconque des six groupes de cinq points b et les groupes des points β correspondants. Ainsi, par exemple, ces points p et π rendront projectifs les couples de faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5),$$
$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6).$$

Nous allons démontrer d'abord que la courbe des points p passe par $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$. Pour cela, désignons par p_5 et π_5 les points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5),$$

par p_6 et π_6 les points qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_6) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_6).$$

Au point b_0, considéré comme point p_5, correspondent tous les points d'une conique Γ_0 passant par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$. A ce même point b_0, considéré comme p_6, correspond un point que l'on détermine en décrivant sur β_1, β_2, β_3, β_4 une conique capable du rapport anharmonique

$$b_0(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

(cette conique est précisément Γ_0), et sur β_1, β_2, β_3, β_6 une autre conique capable du rapport anharmonique

$$b_0(b_1, b_2, b_3, b_6);$$

cette conique marque sur Γ_0 le point qui dans les deux transformations $[p_5, \pi_5]^5$ et $[p_6, \pi_6]^5$ correspond au point b_0. Un raisonnement analogue montre que les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et les autres points b_0 qui s'adjoignent aux autres groupes de cinq points b sont sur cette courbe des points p. Il en est de même des points β par rapport à la courbe des points π.

Faisons passer par les points b_1, b_2, b_3, b_4 une conique quelconque C et cherchons en combien de points elle coupe la courbe des points p.

Soit p un point quelconque de cette conique. Pour trouver son correspondant dans $[p_5, \pi_5]^5$, décrivons sur β_1, β_2, β_3, β_4 une conique Γ capable du rapport anharmonique

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4),$$

puis sur β_1, β_2, β_3, β_5 une conique Γ' capable du rapport anharmonique

$$p(b_1, b_2, b_3, b_5).$$

Les coniques Γ et Γ' ont trois points β_1, β_2, β_3 communs; le quatrième point d'intersection sera le point π_5 cherché.

Le point correspondant de p dans $[p_6, \pi_6]^5$ s'obtient en décrivant sur β_1, β_2, β_3, β_4 la conique capable de

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

(c'est la conique Γ ci-dessus), puis sur β_1, β_2, β_3, β_6 la conique capable du rapport anharmonique

$$p(b_1, b_2, b_3, b_6),$$

Cette seconde conique marquera sur Γ le point π_6 cherché.

Les points π_5 et π_6 situés sur la même conique Γ sont généralement différents entre eux. Mais la conique Γ est homographique de la conique C, qui passe par p, b_1, b_2, b_3, b_4, et à un point π_5 de Γ correspond un seul point p de C, et par suite un seul point π_6 de Γ. De même, à un point π_6 de Γ correspond un seul point π_5 de cette même courbe. Les points π_5 et π_6 marquent donc des divisions projectives sur Γ, et ces divisions ont deux points doubles. Donc il n'existe sur la conique C que deux points autres que b_1, b_2, b_3, b_4 de la courbe des points p qui satisfont à la question, et à ces deux points correspondent deux points de Γ. Nous concluons donc que *les courbes cherchées des points p et π qui rendent projectifs les faisceaux*

$$p(b_i) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_i) \, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

sont deux courbes du troisième ordre passant respectivement par les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 *et par les six points* β_0 *qui viennent s'adjoindre à chacun des six groupes de cinq points*, b_i *et par les points* β_1, β_2, β_3, β_4, β_5, β_6 *et les six points* β_0 *qui viennent s'adjoindre aux groupes de cinq points* $\beta_i \, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Cela établi, il nous sera facile de trouver les systèmes de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7),$$
$$\pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7).$$

Le problème est déterminé; il n'y a qu'un nombre limité de solutions, parce que nous disposons d'autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

Pour que ces deux points p et π rendent projectifs les faisceaux

$$p(b_i) \quad \text{et} \quad \pi(\beta_i) \, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

il suffit qu'ils rendent projectifs en même temps les deux couples de faisceaux

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6), \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6),$$

et

$$p(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_7), \quad \pi(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_7).$$

Or, les points p et π qui rendent projectifs les deux premiers faisceaux appartiennent respectivement aux courbes C_3 et Γ_3. De même, les points p et π qui rendent projectifs le troisième et le quatrième faisceau appartiennent à deux courbes C'_3 et Γ'_3. Les courbes C_3 et C'_3 ont en commun les points b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ainsi que le point b_0 qui s'adjoint au groupe commun b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et se coupent par conséquent en trois autres points p_0, p'_0, p''_0. Les courbes Γ_2 et Γ'_3 se coupent aussi en trois points π_0, π'_0, π''_0 autres que les points β (¹). En outre, chacun des points p_0 correspond à un des points π_0, comme il est aisé de le voir. Donc *il y a trois couples de points p et π qui rendent projectifs les faisceaux*

$$p\,(b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7) \quad \text{et} \quad \pi\,(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \beta_6,\ \beta_7) \quad (^2).$$

Il résulte de là qu'*il existe trois courbes du sixième ordre qui ont six points doubles donnés et qui passent en outre par sept points simples donnés*.

Nous avons trouvé plus haut (XI, 3°) dix points simples de la courbe du sixième ordre au lieu de sept que nous cherchions ; un des trois points non utilisés jusqu'ici servira à reconnaître celle des trois solutions qu'il faut choisir.

(¹) Ces trois points se construisent par des intersections de coniques, en suivant la méthode de M. Chasles, *Comptes rendus*, décembre 1855, p. 1190.

(²) *Voir*, au sujet de ces deux dernières questions, DE JONQUIÈRES, *loc. cit.*, p. 22, et RUD. STURM, *loc. cit.*