Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 329-343
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_329_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GÜNTHER (S.). — STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE. VI. Heft. Halle, 1879. In-8°, 75 pages ([1]).

Lorsque l'analyse du premier Mémoire de M. Günther a été publiée dans le *Bulletin*, le travail de ce géomètre allemand n'était pas encore terminé. Depuis cette époque, l'auteur a complété son Ouvrage par un essai historique du développement de la courbe loxodromique. La forme sous laquelle il a présenté ses divers Mémoires montre bien qu'il n'a pas eu l'intention de refaire une histoire de la Géographie mathématique et physique; il s'est préoccupé d'étudier avec plus de détails certains Chapitres de cette histoire et d'y apporter quelques contributions inédites et nouvelles. Il est vivement à désirer que l'auteur poursuive ses recherches, mais il faut reconnaître qu'il ne néglige aucune occasion d'enrichir la bibliographie mathématique dans les trop courts loisirs que lui laissent ses fonctions parlementaires.

Le sixième Mémoire de M. Günther est intitulé : *Histoire de la courbe loxodromique* (333-407; 14 figures).

La courbe à double courbure, désignée sous le nom de *courbe loxodromique*, est définie par la condition géométrique de couper sous un même angle tous les méridiens d'une surface de révolution, et, en particulier, de l'ellipsoïde et de la sphère.

Il semble que l'histoire de cette courbe doive se rattacher à celle de la science nautique plutôt qu'à l'histoire de la Géographie mathématique; mais il n'est pas aisé de l'en séparer complétement, et il est intéressant de suivre le développement historique de cette ligne célèbre depuis la première notion de son existence jusqu'aux dernières phases de son évolution.

Il va de soi, d'abord, que l'idée d'une semblable route suivie par un navire à la surface de l'Océan n'a pu prendre naissance avant la découverte de la boussole. C'est en vain que divers auteurs ont essayé d'attribuer cette invention aux Phéniciens, aux Égyptiens,

([1]) Voir *Bulletin*, II_2, 410 et 437; III_2, 73, 292 et 303.

aux Carthaginois et aux Juifs. Il est certain que, vers le milieu du XIII^e siècle, le compas de mer était en usage chez les riverains espagnols et italiens de la Méditerranée, sous une forme très-voisine de celle qu'il a de nos jours; mais nous n'avons pas à examiner cette question, pour l'étude de laquelle nous renverrons à des monographies plus spéciales, entre autres à celle d'Ausserer.

Les premiers germes de l'invention ou de la notion de la courbe loxodromique semblent s'être manifestés à l'apparition des Cartes plates, dont le plus curieux spécimen se trouve dans deux Ouvrages espagnols publiés en 1545 et en 1556 par Pedro de Medina et Martin Cortes.

Peu à peu, les règles suivies au moyen âge pour la navigation se perfectionnèrent sensiblement. Toaldo a fait connaître, d'après un manuscrit vénitien d'un auteur resté inconnu, la règle pratique employée au moyen âge sous le nom de *marteloio* ou de *martelogio*.

Les historiens des Mathématiques, M. Chasles entre autres, ont attribué à Nunez un rôle important dans le progrès de la navigation théorique. Nunez publia ses découvertes dans un Ouvrage écrit d'abord en portugais et traduit plus tard en latin. Garçào Stockler en a donné une analyse dont nous extrayons le passage suivant : « Le premier et le plus remarquable de ses deux Ouvrages nous montre que Pedro Nunez a eu la gloire d'être le premier géomètre qui ait commencé à dégager la théorie de la loxodromie, en établissant que la ligne décrite par un navire à la surface des mers lorsqu'il recoupe tous les méridiens sous une même direction oblique n'est pas un grand cercle de la sphère terrestre, mais une ligne spirale à double courbure, dont il a démontré quelques propriétés les plus dignes de remarque. » M. Günther appuie ce témoignage en reproduisant les notions dont la Science est redevable à Nunez. Ce géomètre appelle *rhomb* ou *ligne rhombique* la courbe qui vient d'être définie.

Cette manière d'envisager la loxodromie a été adoptée généralement par les géomètres et navigateurs qui l'ont étudiée. C'est ainsi que l'appelle Simon Stevin, de Bruges, dans son *Précis de Géographie.* Le quatrième Livre de cet Ouvrage est intitulé : *Histiodromie, ou Cours des navires.* La troisième définition qu'il contient se rapporte au rhomb : « Romb », dit-il, « ou cours oblique, est une ligne qui fait tousiours de mesmes angles à tous les méridiens et n'est ny l'équateur ny un méridien. » Ce terme nouveau demanderait à être précisé. En effet, à cette époque, on venait à peine d'acquérir la notion de la déclinaison magnétique, et on la regardait comme constante sur toute la Terre. C'est pourquoi Stevin suppose que l'aiguille aimantée doit se diriger toujours vers le nord, pourvu que le navire suive une route loxodromique. Stevin remarque, d'ailleurs, la forme spirale de cette courbe. Il est aussi, ce nous semble, le premier qui ait établi une distinction nette entre la navigation suivant un grand cercle et la navigation suivant une loxodromie. Voici, en effet, comment il les caractérise lui-même : « Après que Son Excellence (le prince stathouder Maurice) eust entendu la navigation par rombs, comme on les verra cy après, et comparant les cours droits à iceux, comme plus courts, il luy a semblé bon que j'en escrive quelque chose, puis que l'ordre mesme le requerroit, si on s'en vouloit servir, et ainsi j'en ay fait ces deux descriptions suivantes, l'une méchanique, l'autre mathématique. »

Bien que les géomètres dont il vient d'être question aient saisi l'intérêt de la navigation, leurs recherches ont eu plutôt pour objet la théorie de la manœuvre des navires à voiles. Ce fut aussi la préoccupation d'un autre géomètre, presque contemporain de Stevin et de Nunez : nous voulons parler du célèbre géographe Kremer, plus connu sous le nom de Gerhard Mercator. Cet habile dessinateur de Cartes porta toute son attention à chercher des constructions simples, exactes, donnant un format convenable aux Cartes marines. L'invention de sa méthode de projection remonte à l'année 1569. Mercator n'a point mentionné la propriété de ses Cartes pour le tracé de la route loxodromique ; mais un passage de sa correspondance avec Granvella, rapporté par Breusing, biographe de Mercator, renferme une donnée plus précise. Il est certain que Mercator a été sur la voie de la découverte de la loi de variation des points de la loxodromie en adoptant son échelle de latitudes croissantes. Il doit même avoir eu la notion la plus simple et la plus générale de la courbe loxodromique.

L'idée était en germe, et divers géomètres manifestaient une certaine tendance à modifier les règles suivies jusqu'alors. Ed. Wright signala des erreurs dans la navigation et enseigna à les corriger ; mais il n'a pu éviter de tomber lui-même dans d'autres erreurs.

Pour revenir à Stevin, il est à observer que ce géomètre à établi sur de nouvelles bases la théorie de la loxodromie considérée comme route nautique. Voici comment il énonce la propriété fondamentale : « Comme la déclinaison du romb de l'équateur progrediant d'un degré de longitude, à la déclinaison suivante, d'un degré en longitude ; ainsi fort près la sécante par le commencement du dernier progrès, à la sécante par le commencement du premier progrès. » Le développement de cette proposition occupe un long passage de l'Ouvrage. Il est dit ensuite « comment on pourrait faire des Tables de rombs certaines selon l'opinion de l'autheur ».

Voici les réflexions que Girard ajoute à ses remarques : « La manière parfaite est plus facile que celle que Stevin a faite et qu'on n'a trouvée jusques à présent ; mais où sont ceux qui payeroyent la peine de celuy qui feroit quelque chose d'excellent ? Tout va d'un si bon ordre entre les hommes et la Science est si bien estimée, que c'est merveilles si on ne revient en un siècle plus barbare que celuy mesme de fer : là dessus je feray cette question à la vue d'un chacun. » Les dures épreuves qu'un homme aussi exceptionnellement doué que Girard a été obligé de supporter devaient empêcher l'entier développement de son génie et peuvent servir de réponse à une proposition aussi pessimiste.

La loxodromie est devenue l'objet d'une étude systématique de la part du géomètre Willebrord Snellius, auteur d'un Cours de navigation intitulé *Tiphys Batavus*, ou Histiodromie, publié à Leyde en 1624. « La loxodromie », dit-il, « est une ligne hélicoïdale tracée à la surface du globe terrestre et qui rencontre sous un même angle les méridiens successifs. Elle s'approche indéfiniment des deux pôles, sans pouvoir jamais y atteindre. » Snellius indique également la loi de variation de la longueur de la loxodromie. Son Traité renferme une Table destinée à faciliter l'emploi de ses formules. Il contient aussi d'autres indications fort utiles, qui contredisent, ce nous semble, le jugement qu'a porté Bouguer au sujet de ce Livre, « écrit », dit-il, « d'une manière très-obscure, qui ne nuisit pas à la grande réputation que l'auteur méritoit par ses autres Ouvrages ».

Les géomètres du XVIIe siècle ont laissé diverses remarques sur la courbe loxodromique. L'encyclopédie scientifique de cette époque, composée par Alsted, renferme une description de cette ligne.

On en trouve encore une dans le Cours de Mathématiques d'Hérigone. Le Traité d'Hydrographie de Fournier, S. J., paru en 1643, contient les premières théories scientifiques relatives à la mer et à l'art nautique. Il introduisit la considération d'un triangle loxodromique infiniment petit, que Snellius n'avait pas réussi à dégager pleinement. Varenius, célèbre auteur de la *Géographie générale* (1650), donna pour la loxodromie une définition beaucoup plus précise. Il observa que cette ligne n'a pas de courbure simple, et que quatre points consécutifs de la courbe ne peuvent se trouver dans un même plan.

Un écrivain de cette période de compilation, Riccioli, a publié en 1672 un Traité, en douze Livres, intitulé : *Géographie et Hydrographie récemment réformées, revues et augmentées.* Il y établit une distinction entre les deux genres de navigation, suivant le grand cercle, comme l'avait déjà dit Snellius, et suivant la loxodromie. « La navigation sphérique circulaire, c'est-à-dire la plus courte suivant un même grand cercle, exige un changement de rhomb presque perpétuel, ou fréquent, qui suppose une très-grande habitude de la Géométrie, qui n'est accordée qu'à un petit nombre de marins. On conserve le même rhomb en naviguant le long d'une loxodromie. » Il ajoute que le marin est toujours libre de choisir entre ces deux méthodes : « En dehors des méridiens et de l'équateur et des parallèles à ce dernier, il est nécessaire que le navigateur suive la ligne du romb, s'il veut parcourir un même grand cercle ou changer de grand cercle, s'il veut parcourir la même ligne de rhomb et suivre une ligne loxodromique ou une route oblique. » Riccioli ne perd pas de vue la précision théorique ni l'intérêt pratique : « La ligne du chemin total que suivrait un navire, en dehors du méridien, de l'équateur et de ses parallèles, en conservant le même rhomb, cette ligne n'est pas circulaire, mais pratiquement et essentiellement formée de plusieurs segments de divers grands cercles, bien que, théoriquement et géométriquement, elle doive être une ligne courbe, infléchie à la façon d'une hélice. » A la neuvième proposition il dit : « La loxodromie est comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle plan appliqué à la surface de la sphère, et dont un côté serait la distance des parallèles qu'il comprend, pourvu que cette distance soit très-petite. »

Leibnitz a étudié aussi la loxodromie. Il a publié, dans les

Actes de Leipzig, la quadrature arithmétique ordinaire des sections coniques à centre, étendue par la Trigonométrie à une approximation quelconque, sans le secours de Tables, avec application de la spirale à l'étude de la ligne nautique de rhombs, avec le planisphère adapté à cette courbe.

Jacques Bernoulli a étudié en détail les propriétés de la loxodromie. Les *Actes de Leipzig,* que nous venons de citer, contiennent un Mémoire de Bernoulli, intitulé : *Nouvelle application du Calcul différentiel à la mesure de la spirale logarithmique, de la loxodromie des marins, et de la surface des triangles sphériques,* avec supplément relatif au problème funiculaire et à d'autres questions.

Les autres géomètres de la famille des Bernoulli ne semblent point s'être occupés spécialement de la loxodromie. Jean Bernoulli, cependant, a laissé, dans son Ouvrage sur la navigation, des traces évidentes d'une connaissance étendue des propriétés de la courbe loxodromique.

Léonard Euler a repris le thème de Bernoulli, et il est à observer que jamais il ne s'est servi du mot de *loxodromie* pour désigner ce genre de route des navires.

Un intéressant extrait de Chr. Wolf donne une idée de la disposition des Tables loxodromiques que l'on trouve dans son Dictionnaire mathématique. Ces Tables indiquent l'angle du vent et de la voile avec le vaisseau, l'angle du vent avec la loxodromie, l'angle de déviation et le logarithme du carré de la vitesse.

Au milieu du XVII^e siècle, Halley publia un essai de démonstration de l'analogie des tangentes logarithmiques avec la ligne méridienne ou somme des sécantes, augmenté de divers moyens de la déterminer le plus exactement possible. Halley définit la ligne méridienne une échelle de tangentes logarithmiques des demi-compléments des latitudes; mais, le premier, il ne songe pas à faire usage de constructions sphériques. Il adopte la projection stéréographique de cette ligne sur le plan de l'équateur, faisant observer que les angles ne sont pas altérés. Il obtient donc pour projection une ligne plane, trajectoire oblique d'un système de rayons du cercle de l'équateur. Halley appelle cette ligne *spirale proportionnelle;* ce n'est autre chose que la courbe que Jacques Bernoulli venait de découvrir et de symboliser sous la devise : *Eadem mutata* *resurgo*, allusion à ce fait que la spirale logarithmique se retrouve toujours intacte après les diverses transformations qu'on lui fait éprouver. Halley a reconnu la loi des variations géométriques de la loxodromie. « Cependant », dit-il, « la ligne méridienne nautique n'est autre qu'une Table de longitudes répondant à chaque minute de latitude sur la ligne de rhomb faisant un angle de 45° avec le méridien. C'est pourquoi la ligne méridienne n'est autre qu'une échelle de logarithmes des tangentes des demi-compléments des latitudes. »

Les découvertes de Halley ont donné à Roger Cotes l'idée de la représentation graphique des logarithmes « : Adapter », dit-il, « la Table de logarithmes à la spirale équiangle. »

Pour terminer l'examen des travaux des géomètres sur la loxodromie à la surface de la sphère, il faut mentionner un Mémoire de Perks, intitulé : *Procédé mécanique facile de diviser la ligne méridienne nautique sur la projection de Mercator, suivi des relations de cette ligne avec la chaînette*.

Nous arrivons actuellement à la série des généralisations dont la loxodromie a été l'objet. Dans ce nouvel ordre d'idées, la priorité paraît devoir être revendiquée en faveur du magister J. Gottfried Walz, auteur d'un Mémoire intitulé : *Recherche de la courbe loxodromique à la surface d'un solide quelconque, engendré par la rotation d'une courbe autour de son axe, et principalement du sphéroïde elliptique qui se rapproche de la forme du globe terrestre*. Il représente un point de la courbe par deux coordonnées rectilignes et une coordonnée angulaire. Il exprime les éléments de la loxodromie dans les cas où la méridienne de la surface est une circonférence, une ellipse ou une parabole.

Les premières recherches de Maupertuis sur la courbe loxodromique datent de la même année que celles de G. Walz.

Les recherches des géomètres anglais avaient pour but de préparer l'emploi de la loxodromie dans la navigation. Maclaurin a traité la question de représenter un sphéroïde sur une Carte au moyen de latitudes croissantes et de longitudes invariables. Murdoch a dressé des Tables loxodromiques, destinées à faciliter l'application de la théorie de la figure de la Terre à la construction de Cartes marines.

Les travaux de Simpson sur la doctrine et les applications de la théorie des fluxions renferment des aperçus plus clairs et plus précis que ceux de Maclaurin. Il s'est proposé de déterminer les régions méridionales répondant à une latitude donnée en suivant la projection de Wright et adoptant la véritable sphéricité de la Terre.

De la théorie de Simpson à la méthode systématique d'Euler il n'y avait qu'un pas : Th. Schubert a eu la gloire de le franchir. Son Mémoire sur le cours des navires sur un sphéroïde elliptique débute en ces termes : « Toute la navigation peut, sans difficulté, se réduire au problème suivant :

« *Étant données les situations de deux localités, trouver quelle route doit suivre entre elles un navire ou l'angle constant sous lequel la direction du navire rencontre tous les méridiens, décrivant ainsi une courbe que l'on appelle ordinairement loxodromie.* »

Schubert a résolu cette question en construisant une Table destinée à faciliter l'usage de la formule qu'il avait démontrée. Cette Table renferme la variation de latitude de la loxodromie, en passant d'un méridien à l'autre, lorsque la latitude du point de départ varie par intervalles de dix minutes. Le calcul est effectué dans l'hypothèse de la forme sphérique et de la forme elliptique.

Nous arrivons avec Schubert à la seconde moitié du dernier siècle. C'est aussi l'époque à laquelle il faut placer les importantes contributions de Kästner à la Géographie mathématique ; mais, comme le lecteur a pu le reconnaître, la tendance des travaux des géomètres jusqu'à cette époque a été purement scientifique. Bientôt allaient paraître les savantes études ayant pour objet l'application de la théorie à la pratique de la navigation. Les travaux dont il va être question sont dus à un Allemand, Kaschub, à un Français, Bouguer, et à un Anglais, Robertson.

Kaschub a publié un Cours de Mathématiques sous une forme semblable à celle d'un Ouvrage estimé, dû à Wolf. Un de ses Chapitres se rapporte à l'Hydrographie, ou art nautique. Il y est question de la navigation suivant la loxodromie, qu'il réduit à ses principes les plus simples.

Bouguer a laissé un Ouvrage qui a longtemps été regardé comme le meilleur et le plus complet des Traités de navigation. Ce géomètre s'est distingué aussi comme géodésien; on lui doit la découverte de l'attraction des montagnes et les premières recherches scientifiques de photométrie. L'Ouvrage que nous avons ici en vue est intitulé: *Nouveau Traité de navigation, contenant la théorie et la pratique du pilotage,* 1753. L'auteur est amené à la considération de la loxodromie par l'étude « des lignes courbes que les rumbs de vent suivent sur le globe et de la forme qu'on a été obligé, en conséquence, de donner aux cartes réduites ». Un Chapitre de l'Ouvrage est réservé à la théorie du quartier de réduction. Bouguer désigne ainsi une sorte de Carte auxiliaire. « Le quartier de réduction », dit-il, « est comme une Carte qui convient à tous les endroits du globe terrestre. On pointe, pour ainsi dire, les routes sur cet instrument, et, après avoir vu la latitude et la longitude où elles conduisent, on transporte le point sur la Carte réduite. » Enfin, la courbe loxodromique est décrite avec beaucoup de soin, sa projection stéréographique est étudiée d'une manière élégante, et l'Ouvrage entier donne la preuve que l'auteur s'est préoccupé de donner à ses résultats une utilité pratique.

Le géomètre anglais Robertson a laissé, comme Bouguer, un Ouvrage sur la navigation, publié en 1754. Il s'est placé à un point de vue tout à fait analogue à celui de Bouguer. Toutefois, il ne paraît pas avoir tenu compte de l'insuffisance de la projection de Mercator pour la représentation des zones glaciales. Des contrées telles que l'Islande et le Groenland éprouvent alors des déformations bizarres, qui nuisent beaucoup à la valeur des Cartes. Pour y remédier en partie et corriger l'influence que cette altération produirait sur la loxodromie, ou route la plus courte entre deux points de l'Océan, Robertson imagine une courbe tangente au parallèle du point le plus rapproché du pôle et aboutissant au point le plus rapproché de l'équateur, en coupant à 45° le parallèle correspondant. Il prend pour exemple le cap Lizard, à la pointe sud-ouest de l'Angleterre, et les îles Bermudes, en passant à hauteur du cap Race, au sud-est de l'île de Terre-Neuve, en arrière du grand banc.

Ces notions historiques épuisent ce que nous avions à dire au sujet de la loxodromie durant le XVIII^e siècle. Actuellement, cette courbe a surtout un intérêt théorique, et l'on ne s'astreint plus à la regarder comme la base des routes marines.

On doit à Gudermann l'invention d'un système de coordonnées sphériques, dont il fit une première application à l'étude d'une nouvelle courbe transcendante, la chaînette sphérique, qui se rattache à la loxodromie par plusieurs propriétés intéressantes et remarquables, parmi lesquelles nous pouvons signaler, par exemple, la présence d'un point asymptotique.

L'idée d'une comparaison de la loxodromie avec la chaînette plane paraît être venue déjà au géomètre anglais Perks.

La monographie de Verdam contient aussi un grand nombre de remarques nouvelles.

Grunert et Plagemann ont étudié les propriétés de la loxodromie. On doit au premier de ces géomètres une Trigonométrie loxodromique et la notion de la surface du triangle loxodromique sur le sphéroïde de révolution engendré par une ellipse tournant autour de son petit axe. Quant à Plagemann, il a donné une théorie des lignes loxodromiques sur l'ellipsoïde et sur la sphère.

Grunert a laissé aussi des travaux sur la navigation suivant un grand cercle. On doit à Von Friesach la description d'une Table spéciale destinée à faciliter les règles à suivre pour l'application des principes de la théorie.

Il nous resterait encore à citer les travaux de géomètres contemporains : il nous suffira de dire que tant d'études variées ont à peu près épuisé la série des propriétés de la loxodromie. Nous ne mentionnerons ici que pour mémoire les essais d'application de cette courbe à la théorie des mouvements de l'atmosphère.

Ici se terminent les études de M. Günther. On conçoit aisément la possibilité d'en étendre le programme. Voici, en effet, divers sujets de recherche qui nous semblent rentrer dans le même cadre que les Mémoires dont nous venons d'essayer l'analyse :

Théories et expériences relatives à l'attraction de la Terre; variation de la pesanteur à la surface et à l'intérieur du globe;

Histoire des essais de représentation cartographique ;

L'Œuvre d'Alexandre de Humboldt et de Maury;

Discussion et résultats des nivellements des diverses contrées du globe;

La Géographie physique considérée dans ses rapports avec la Météorologie générale;

La Géographie physique des naturalistes de l'antiquité.

Toutes ces questions, et bien d'autres qui surgiraient incidemment, et que l'on ne peut prévoir dès à présent, donneraient lieu à des études fort curieuses et relativement faciles. Nous souhaitons qu'elles fixent l'attention de M. Günther et des géomètres que la variété et la ressource de ces études pourraient intéresser.

H. Brocard.

BORCHARDT (C.-W.). — Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels aus vier Elementen. Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1878. Berlin, 1879, 66 pages.

En 1876, M. Borchardt a déjà communiqué à l'Académie de Berlin le résultat principal de ses recherches sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments, résultat qui consistait à montrer de quelle manière on pourrait en déterminer la valeur par une intégrale double.

Voici comment l'auteur a généralisé la notion de la moyene arithmético-géométrique de deux éléments.

Soient a, b, c, e quatre nombres positifs et réels; calculons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{1}{4}(a+b+c+e),\\ b_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{ce}),\\ c_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ac}+\sqrt{be}),\\ e_1 &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{ae}+\sqrt{bc}).\end{aligned}\right.$$

En répétant le calcul indiqué un nombre de fois illimité pour $a_1, b_1, c_1, e_1, \ldots$, on obtient une suite infinie de quantités transformées réelles et positives a_n, b_n, c_n, e_n, qui tendent vers une limite commune g si n croît indéfiniment. La détermination de cette limite fait l'objet du Mémoire. Pour pouvoir résumer le résultat comme le fait M. Borchardt à la fin de son travail, posons encore

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{a} &= a+b+c+e,\\ \mathfrak{b} &= a+b-c-e,\\ \mathfrak{c} &= a-b+c-e,\\ \mathfrak{e} &= a-b-c+e,\end{aligned}\right.$$

enfin

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} b' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}\right) & b'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}}\right) \\ c' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}\right) & c'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}}\right) \\ e' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}\right) & e'' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}}\right). \end{array}\right.$$

Alors on peut énoncer cette proposition :

« Qu'on dérive la moyenne arithmético-géométrique g de quatre éléments réels et positifs a, b, c, e par l'algorithme (1) réitéré un nombre de fois illimité; qu'on détermine d'après (2) et (3) les six quantités b', c' e', b'', c'', e'' coordonnées aux quatre éléments; qu'on désigne par $\mathfrak{F}(\varphi)$, $\mathfrak{G}(\psi)$ les deux expressions homogènes en $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et $\cos\psi$, $\sin\psi$,

$$\mathfrak{F}(\varphi) = \left(\cos\varphi^2 + \frac{ae}{bc}\sin\varphi^2\right)\left(\cos\varphi^2 + \frac{ec''}{bc'}\sin\varphi^2\right)\left(\cos\varphi^2 + \frac{ac''}{cc'}\sin\varphi^2\right),$$

$$\mathfrak{G}(\psi) = \left(\cos\psi^2 + \frac{ac}{be}\sin\psi^2\right)\left(\cos\psi^2 + \frac{ce'}{be''}\sin\psi^2\right)\left(\cos\psi^2 + \frac{ae'}{ee''}\sin\psi^2\right);$$

alors on a

$$\frac{\pi^2}{g} = \sqrt{\frac{a}{bce}}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} d\psi\, \frac{1 - \frac{be'''}{bc'}\sin^2\varphi + \frac{b'c''}{bc''}\sin^2\psi}{\sqrt{\mathfrak{F}(\varphi)\,\mathfrak{G}(\psi)}},$$

où les racines carrées doivent être prises avec le signe positif. »

Dans ses Communications de 1876 et 1877, M. Borchardt n'avait publié que ce résultat, sous une forme peu différente de celle qu'il a choisie actuellement. Le Mémoire qui vient de paraître est consacré au développement de la théorie qui l'a mené à ce but. L'Introduction révèle complétement la marche de ses idées, et les onze Sections suivantes donnent en entier tous les calculs nécessaires pour les démonstrations. Nous nous bornons à citer un passage de l'Introduction qui sert à caractériser la tendance de ces calculs :

« La détermination de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments par une intégrale simple, détermination que l'on connaît depuis Lagrange et Gauss, est déduite communément de la transformation du second ordre des fonctions $\mathfrak{I}$ *elliptiques*. Semblablement, le résultat que j'ai établi peut se démontrer avec facilité au moyen de la transformation du second ordre des fonctions ϑ *hyperelliptiques* de deux variables. Cependant je ne me servirai pas de ce moyen dans ce qui va suivre; mais comme, indépendamment de la théorie de ces transcendantes, j'ai été conduit, il y a des années, à la notion du moyen arithmético-géométrique de quatre éléments par des considérations algébriques, j'en déduirai aussi l'expression comme fonction analytique de ces éléments par la voie algébrique. »

Voici encore les titres des Parties du Mémoire :

Introduction. — 1. Établissement de l'algorithme, notion de la moyenne arithmético-géométrique. — 2. Introduction de six quantités coordonnées aux éléments. — 3. Inversion de l'algorithme. — 4. Systèmes de variables qui sont en connexion avec les éléments et les quantités transformées. Variables coordonnées de première espèce. — 5. Variables coordonnées de seconde espèce. Relation biquadratique de Goepel. — 6. Expression des seize variables par des variables indépendantes. — 7. Seize agrégats linéaires composés des variables x, y, z, w. Connexion entre les signes de ces agrégats. Représentation d'une surface kummérienne biquadratique à seize points nodaux au moyen de la relation de Goepel. — 8. Caractère invariantif de la fonction biquadratique de Goepel. — 9. Les parties centrales de deux surfaces kummériennes dépendant l'une de l'autre par transformation se correspondent mutuellement. — 10. Formation d'une différentielle qui se change, à l'occasion de la transformation, en elle-même, abstraction faite du facteur numérique $\frac{1}{4}$. — 11. Intégrale double étendue sur la partie centrale de la surface kummérienne qui mène à la détermination du moyen arithmético-géométrique.

E. L.

B. BONCOMPAGNI. — Deux Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange, tirées de la Bibliothèque royale de Berlin (collection Meusebach, portefeuille n° 21, et collection Radowitz, n° 4952). Berlin, imprimerie de Gustav Schade (Otto Francke), 1878. — Reproduction photographique, six feuillets non numérotés.

Cette nouvelle publication de M. le prince Boncompagni se distingue de son aînée par l'intérêt anecdotique et littéraire.

Il est curieux de voir Lagrange s'adonner à l'Histoire et lire avec intérêt l'ouvrage de Denina sur le Piémont, de l'entendre demander l'*Histoire des Mathématiques* de Kaestner, et porter sur le livre de Montucla un jugement qui est ratifié par la postérité pour le dernier Volume (1), mais qui est beaucoup trop flatteur pour les premiers (2).

Il n'est pas moins intéressant de l'entendre juger un roman de M^me^ de Genlis (3) et d'apprendre ses relations avec le marquis Lucchesini, ministre plénipotentiaire de Prusse, et avec le botaniste Thouin.

La première des deux Lettres est datée de « Paris, le 25 nivôse, an IX, » c'est-à-dire du 15 janvier 1801. Une Note autographe d'Alexandre de Humboldt nous apprend que la seconde a été écrite de Berlin à Laplace. Celle-ci ne porte pas de date et celle-là pas d'adresse.

Mais on remarque bien vite que la première est écrite à un homme peu considérable. Lagrange ne signe que par les initiales L. G., et les témoignages de politesse ne sont pas sans froideur (4). Après avoir fait part à son correspondant des remercîments de sa femme : « Elle a voulu, » écrit-il, « profiter d'un envoi que Fuchs avait à vous faire pour envoyer *à son tour* une bagatelle à M^me^ de la Garde. » Cette Lettre doit avoir été adressée à M. de la Garde, l'éditeur de *Mères rivales* et de la traduction allemande de l'*Histoire du Piémont*.

Il n'est pas très difficile non plus de dater la seconde, au moins d'une façon approximative. Lagrange remercie Laplace de son travail sur les *Approximations*, dont la première Partie parut en 1785, la suite en 1809 (5). Or il s'agit de la première, puisque Lagrange

---

(1) « Je crois que la matière était au-dessus des forces de l'auteur : je parle de la partie qui traite du progrès des Mathématiques dans le siècle qui vient de s'écouler. »

(2) « Car, pour la partie déjà connue, il me semble qu'elle laisse bien peu à désirer. »

(3) « C'est, en effet, une des meilleures productions de M^me^ de Genlis. » M. Genocchi pense qu'il s'agit des *Mères rivales*, qui parurent en 1800, à Berlin, chez de la Garde. (*Intorno a due Lettere del Lagrange pubblicate da B. Boncompa-gni*, p. 2.)

(4) « J'ai reçu, mon cher correspondant.... Je vous offre de mon côté l'hommage sincère des sentiments par lesquels je vous suis attaché ainsi que le désir de trouver des occasions de vous en donner des preuves. »

(5) *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1782 ; *Mémoires de l'Institut*, 1809.

était alors à Berlin. D'autre part, Lagrange fait hommage de la seconde Partie d'un travail dont la première avait été déjà offerte à Laplace. M. le prince Boncompagni croit qu'il est fait allusion à la *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes,* dont la première Partie fut publiée dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences,* année 1781 (Berlin, 1783), et la seconde dans la même collection, année 1782 (Berlin, 1784). Nous pouvons donc placer cette seconde Lettre dans l'année 1784.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ces pièces, qui, pour être analysées complétement, devraient être reproduites en entier.

Les amis de l'histoire des Sciences sauront gré à l'éditeur du libéral présent qu'il vient de leur faire, et ils souhaiteront de voir se multiplier ces reproductions héliographiques qui, à l'avantage de rendre impossibles les méprises de lecture, joignent le rare mérite de la couleur locale. C. Henry.