Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Ch. Hermite

Équations différentielles linéaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 311-325

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_311_1>

MÉLANGES.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. CH. HERMITE (1).

C'est à Euler qu'est due la première méthode d'intégration de ces équations dans le cas où, les coefficients étant supposés constants, l'équation a la forme

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2 y}{dx^2} + \ldots + \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

(1) M. Hermite a bien voulu nous autoriser à faire connaître à nos lecteurs cette belle Leçon, qui fait partie de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 2e année; nous publions la rédaction faite par les élèves dans l'année 1874-1875.

Cauchy a ensuite donné une seconde méthode, qui est celle que nous allons exposer.

A cette équation différentielle, Cauchy a rattaché l'équation algébrique suivante,

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots + z^n = 0,$$

obtenue en remplaçant les dérivées successives de la fonction y par les puissances de l'inconnue z, dont les exposants sont respectivement égaux aux ordres de dérivation. Soit $F(z)$ le premier membre de cette équation, que Cauchy a appelée l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle proposée. Si nous envisageons l'intégrale suivante,

$$y = \int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)} dz,$$

où $\Pi(z)$ est un polynôme entier en z à coefficients arbitraires, et si nous supposons cette intégrale effectuée en faisant décrire à la variable z un contour fermé tout à fait quelconque, nous allons montrer que cette intégrale est une solution de l'équation différentielle proposée.

Dans le cas particulier où le contour ne renferme aucun pôle de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, c'est-à-dire aucun point qui ait pour affixe une racine de l'équation caractéristique, l'intégrale est nulle, et $y = 0$ est bien une solution de l'équation différentielle proposée; mais c'est dans le cas où le contour renferme des pôles que nous obtenons effectivement des solutions.

Pour démontrer ou plutôt pour vérifier ce théorème, formons les dérivées successives de l'intégrale par rapport à x; nous aurons

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{e^{zx} z\Pi(z)}{F(z)} dz,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{e^{zx} z^2\Pi(z)}{F(z)} dz,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots,$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \int \frac{e^{zx} z^n\Pi(z)}{F(z)} dz,$$

chacune de ces intégrales étant toujours supposée effectuée le long du contour fermé.

Substituons dans l'équation proposée; le premier membre devient

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}(\alpha + \beta z + \ldots + z^n)\,dz.$$

On voit que $F(z)$ disparaît comme facteur commun et que l'intégrale est celle de $e^{zx}\Pi(z)$, qui, effectuée le long du contour fermé, est nulle, puisque $\Pi(z)$ est un polynôme entier. L'équation est donc vérifiée, ce qui démontre que, quel que soit le contour fermé d'intégration, l'intégrale

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz$$

est une solution de l'équation proposée.

Remarque. — $\Pi(z)$ étant un polynôme de degré quelconque, il semble qu'il entre dans la solution un nombre quelconque de constantes arbitraires; mais il est facile de voir que ce nombre est au plus égal à n. En effet, on peut toujours, si $\Pi(z)$ est de degré supérieur à celui de $F(z)$, écrire identiquement

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \Phi(z) + \frac{\Psi(z)}{F(z)},$$

$\Psi(z)$ étant un polynôme entier en z de degré inférieur à n, d'où l'on tire

$$\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz = \int e^{zx}\Phi(z)\,dz + \int \frac{e^{zx}\Psi(z)}{F(z)}\,dz;$$

mais, en intégrant le long d'un contour fermé quelconque, on voit que la première intégrale s'évanouit, puisque $\Phi(z)$ est un polynôme entier, et il ne reste que la seconde où $\Psi(z)$ renferme au plus n constantes arbitraires, puisque son degré est au plus égal à $n-1$.

Nous allons maintenant passer de l'expression de la solution sous forme d'intégrale à une expression sous forme explicite.

Soit S la somme des résidus de la fonction $\dfrac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$ qui correspondent aux racines du dénominateur affixes de points intérieurs au contour d'intégration.

L'intégrale aura pour valeur $2i\pi S$.

Calculons ces résidus.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique n'ait pas de racine multiple, et décomposons la fonction $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ en éléments simples. On peut toujours supposer que le degré $\Pi(z)$ est inférieur à celui de $F(z)$; par suite, le résultat de la décomposition sera

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \ldots + \frac{L}{z-l}.$$

Faisons $z = a + h$ dans la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$; elle devient

$$\frac{e^{x(a+h)}\Pi(a+h)}{F(a+h)} = e^{ax}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1.2} + \ldots\right) \times \left(\frac{A}{h} + p + qh + rh^2 + \ldots\right),$$

puisque le terme $\frac{A}{z-a}$ donne seul un terme en $\frac{1}{h}$. Le résidu sera donc égal à Ae^{ax}; on a donc pour première solution, en intégrant le long d'un contour qui ne contient que la racine a, $2i\pi Ae^{ax}$. En général, le contour pouvant contenir un nombre quelconque de pôles de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, la solution générale sera de la forme

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots + Le^{lx},$$

a, b, ..., l étant les racines de l'équation caractéristique, et A, B, ..., L, n constantes arbitraires qui peuvent être nulles et qui renferment le facteur $2i\pi$.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait des racines multiples, et soit

$$F(z) = (z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta+1}\ldots(z-l)^{\lambda+1}.$$

La formule de décomposition est alors

$$\begin{aligned}\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} &+ \frac{B}{(z-b)} + \dots \\ &+ \frac{A_1}{(z-a)^2} + \frac{B_1}{(z-b)^2} + \dots \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{A_\alpha}{(z-a)^{\alpha+1}} + \frac{B_\beta}{(z-b)^{\beta+1}} + \dots\end{aligned}$$

Nous aurons, en faisant $z = a + h$,

$$\frac{\Pi(a+h)}{F(a+h)} = \frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{h^{\alpha+1}},$$

les termes suivants ne contenant pas de puissances négatives de h; d'ailleurs,

$$e^{x(a+h)} = e^{ax}\left(1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2x^2}{1^2} + \dots + \frac{h^\alpha x^\alpha}{1.2^\alpha} + \dots\right).$$

Pour avoir le résidu correspondant à $z = a$, c'est-à-dire le coefficient du terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\frac{\Pi(a+h)}{F(a+h)}e^{x(a+h)}$, il suffit de multiplier les coefficients des termes qui se correspondent dans les seconds membres des deux égalités précédentes. On trouve ainsi pour expression du résidu, et par conséquent pour une solution de l'équation différentielle proposée,

$$2i\pi e^{ax}\left(A + \frac{A_1 x}{1} + \dots + \frac{A_\alpha x^\alpha}{1.2\dots\alpha}\right).$$

La solution générale sera donc de la forme

$$\begin{aligned}e^{ax}(\mathcal{A} + \mathcal{A}_1 x + \dots + \mathcal{A}_\alpha x^\alpha) &+ e^{bx}(\mathcal{B} + \mathcal{B}_1 x + \dots + \mathcal{B}_\beta x^\beta) \\ &+ \dots + e^{lx}(\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 x + \dots + \mathcal{L}_\lambda x^\lambda),\end{aligned}$$

et, comme

$$(\alpha+1) + (\beta+1) + \dots + (\lambda+1) = n,$$

on voit que la solution générale contient n coefficients arbitraires.

Faisons une vérification dans le cas des racines simples.

Montrons d'abord que $y = \mathrm{A}e^{ax}$ est une solution; nous partirons de là pour vérifier la solution générale. Soit donc

$$y = \mathrm{A}e^{ax},$$
$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}ae^{ax},$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{A}a^2e^{ax},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = \mathrm{A}a^ne^{ax}.$$

Substituant dans l'équation différentielle, le premier membre devient

$$\mathrm{A}e^{ax}(\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \ldots + a^n).$$

Or le second facteur n'est autre chose que $\mathrm{F}(a)$; il est donc nul, puisque $\mathrm{F}(z) = 0$ admet la racine a. Donc $y = \mathrm{A}e^{ax}$ est une solution.

Je dis que, si y_1 et y_2 sont des solutions, il en est de même de $y_1 + y_2$.

En effet, si l'on a

$$\alpha y_1 + \beta\frac{dy_1}{dx} + \gamma\frac{dy_1^2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^ny_1}{dx^n} = 0,$$
$$\alpha y_2 + \beta\frac{dy_2}{dx} + \gamma\frac{d^2y_2}{dx^2} + \ldots + \frac{d^ny_2}{dx^n} = 0,$$

il vient, en ajoutant,

$$\alpha(y_1 + y_2) + \beta\frac{d}{dx}(y_1 + y_2) + \gamma\frac{d^2}{dx^2}(y_1 + y_2) + \ldots = 0,$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est une solution. Il en serait de même de la somme d'un nombre quelconque de solutions de la forme $\mathrm{A}e^{ax}$, ce qui vérifie la solution générale

$$\mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{bx} + \ldots + \mathrm{L}e^{lx}.$$

Passons au cas des racines multiples. La vérification est moins immédiate. Nous considérerons, pour y parvenir, une transformée de l'équation différentielle proposée, dont la variable z sera liée à la variable y par la relation

$$y = e^{mx} z,$$

m étant une constante arbitraire. Formons les dérivées successives de y ; on aura

$$\frac{dy}{dx} = e^{mx}(mz + z'),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{mx}(m^2 z + 2mz' + z''),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On voit que, en substituant dans l'équation proposée, on obtient le produit de e^{mx} par une fonction linéaire de z et de ses dérivées.

Nous avons donc identiquement

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{d^n y}{dx^n} = e^{mx}(Gz + Hz' + \ldots + Lz^n).$$

Pour calculer les coefficients constants G, H, ..., L, remarquons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature de z, qui est une fonction quelconque de x. Faisons $z = e^{hx}$, h étant une constante; nous devons avoir identiquement, en divisant les deux membres par le facteur $e^{(m+h)x}$,

$$\alpha + \beta(m+h) + \gamma(m+h)^2 + \ldots + (m+h)^n = G + Hh + \ldots + Lh^n.$$

Le premier membre est $F(m+h)$; l'identité précédente devant avoir lieu quel que soit h, les coefficients G, H, ... doivent être égaux respectivement aux coefficients des puissances successives de h dans le développement de $F(m+h)$. On a donc

$$G = F(m),$$

$$H = F'(m),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$L = \frac{F^n(m)}{1.2\ldots n}.$$

L'équation transformée est donc la suivante :

$$e^{mx}\left[zF(m) + \frac{dz}{dx}F'(m) + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{F''(m)}{1.2} + \ldots\right] = 0.$$

Supposons que m soit une racine simple de l'équation caractéristique; alors $F(m) = 0$. L'équation précédente commence par un terme en $\frac{dz}{dx}$; elle est donc vérifiée si l'on suppose que z est une constante A. L'équation proposée aura pour solution correspondante

$$y = Ae^{mx}.$$

Si m est une racine double, on a $F(m) = 0$, $F'(m) = 0$; la transformée, commençant par un terme en $\frac{d^2 z}{dx^2}$, est vérifiée si l'on suppose que z est un binôme du premier degré en x $(z = A + Bx)$. La solution correspondante pour l'équation proposée est

$$y = e^{mx}(A + Bx).$$

On verrait de même que, si m est une racine d'ordre de multiplicité $\alpha + 1$ de la caractéristique, on a pour solution de l'équation différentielle

$$y = e^{mx}(A + Bx + \ldots + Lx^{\alpha}),$$

A, B, ..., L étant des coefficients arbitraires.

Nous allons maintenant déterminer les constantes arbitraires que renferme la solution générale de l'équation différentielle linéaire, de façon que pour une valeur particulière de x, pour $x = 0$ par exemple, la fonction y et ses dérivées successives prennent des valeurs données.

Voici quelle était la méthode suivie avant que Cauchy eût donné une solution générale de ce problème. Prenons le cas où $F(z)$ n'a que des racines simples; la solution est de la forme

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots + Le^{lx}.$$

On forme les $(n-1)$ premières dérivées, on y fait $x = 0$, et, en égalant les valeurs qu'elles prennent aux valeurs données $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$, on obtient, pour déterminer A, B, ..., L, les n équations suivantes :

$$\begin{aligned} A + B + \ldots + L &= y_0, \\ Aa + Bb + \ldots + Ll &= y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \ldots + Ll^{n} &= y_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Quand on passe au cas où l'équation caractéristique a des racines multiples, cette méthode est d'une application difficile, puisque les dérivées de y sont plus compliquées et que les diverses racines n'entrent plus de la même manière dans les équations à résoudre.

Cauchy a donné une méthode très-simple, qui est la même dans le cas des racines simples et des racines multiples.

Reprenons la solution de l'équation différentielle sous la forme

$$y = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz;$$

pour que cette intégrale soit la solution générale, il faut supposer que le contour d'intégration renferme à son intérieur tous les points dont les affixes sont les racines de $F(z)$, et, comme l'intégrale ne change pas de valeur quand on agrandit le contour, je supposerai que c'est un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le rayon sera très-grand.

Il s'agit de déterminer les coefficients de $\Pi(z)$ de sorte que, pour $x = 0$, $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}\,dz$ et ses $n-1$ premières dérivées prennent les valeurs données, que je supposerai être $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{n-1}$; nous avons les n équations

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y_0,$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y'_0,$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^2\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y''_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z^{n-1}\Pi(z)}{F(z)}\,dz = y_0^{n-1}.$$

Pour obtenir ces diverses intégrales, développons $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ suivant les puissances décroissantes de la variable; $\Pi(z)$ étant en général de degré $n-1$, le premier terme du développement sera du degré -1 en z, et l'on aura

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{\varepsilon_0}{z} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{z^n} + \ldots.$$

En effectuant le long du cercle de rayon infini les n intégrales précédentes, il suffira d'avoir égard dans chaque développement au terme en $\frac{1}{z}$, et nous nous trouverons immédiatement amenés aux relations

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= y_0,\\ \varepsilon_1 &= y'_0,\\ &\ldots,\\ \varepsilon_{n-1} &= y_0^{n-1},\end{aligned}$$

puisque les valeurs des intégrales sont respectivement

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{n-1}.$$

Nous connaissons ainsi dans le développement de $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ les coefficients des termes de degré égal ou supérieur à $-n$; cela suffit pour déterminer complétement $\Pi(z)$, puisqu'on a identiquement

$$\Pi(z) = F(z)\left(\frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \ldots + \frac{y_0^{n-1}}{z^n}\right)$$

et que $\Pi(z)$ doit être un polynôme entier; par conséquent, $F(z)$ étant de degré n, on voit que les n premiers termes de la série sont seuls utiles à la détermination de ce polynôme et qu'on obtient

$$\begin{aligned}\Pi(z) = {} & y_0(\beta + \gamma z + \delta z^2 + \ldots + z^{n-1})\\ & + y'_0(\gamma + \delta z + \ldots + z^{n-2})\\ & + y''_0(\delta + \varepsilon z + \ldots + z^{n-3})\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + y_0^{n-1}.\end{aligned}$$

On a donc $\Pi(z)$ par une méthode qui s'applique aussi bien au cas des racines simples qu'à celui des racines multiples. Cela étant, et pour obtenir explicitement la valeur de y, il suffira, connaissant $\Pi(z)$, de calculer les résidus de la fonction $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$. Ce calcul, que nous avons effectué précédemment, n'exige, comme on l'a vu, que l'opération algébrique élémentaire de la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ en fractions simples.

Comme application des formules obtenues dans la dernière Leçon pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants sans second membre, je prendrai l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0,$$

qui se rencontre dans les applications de l'Analyse à la Physique, et en particulier à l'Optique. Elle appartient à un type déjà étudié d'équations différentielles du second ordre; mais nous la traiterons suivant les procédés que nous venons d'expliquer.

L'équation caractéristique est $z^2 + n^2 = 0$; elle admet les deux racines $z = \pm in$. Si nous voulons que, pour $x = 0$, y et y' prennent certaines valeurs fixées d'avance, y_0 et y'_0, il faudra déterminer le polynôme entier $\Pi(z)$ par la relation

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \frac{y''_0}{z^3} + \ldots,$$

qui donne, en multipliant les deux membres par $F(z)$ et ne conservant dans le second que les termes ne contenant pas z en dénominateur,

$$\pi(z) = y_0 z + y'_0.$$

La fonction $\dfrac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$, dont on doit calculer les résidus, est $\dfrac{y_0 z + y'_0}{z^2 + n^2} e^{zx}$: pour une racine z, son résidu est $\dfrac{e^{zx}\Pi(z)}{F'(z)}$ ou $\dfrac{1}{2}\left(y_0 + \dfrac{y'_0}{z}\right) e^{zx}$; pour la racine $-z$, ce sera $\dfrac{1}{2}\left(y_0 - \dfrac{y'_0}{z}\right) e^{-zx}$. La somme de ces deux résidus est alors

$$\frac{1}{2} y_0 (e^{zx} + e^{-zx}) + \frac{1}{2} y'_0 \frac{e^{zx} - e^{-zx}}{z};$$

en y faisant $z = in$, on trouve l'intégrale cherchée

$$y_0 \cos nx + y'_0 \frac{\sin nx}{n}.$$

D'après la forme de l'équation différentielle, il est évident que, si l'on a une solution $y = \varphi(z)$, $y_1 = \varphi(x + c)$ sera encore une solution, c étant une constante quelconque. On profite de cette remarque pour mettre l'intégrale sous une forme telle qu'elle prenne des valeurs y_0 et y'_0, non plus pour la valeur $x = 0$, mais pour une valeur quelconque $x = c$; il suffit de prendre

$$y = y_0 \cos n x (x - c) + y'_0 \frac{\sin n (x - c)}{n}.$$

Cette intégrale, comme on voit, est une expression réelle, bien que les racines de l'équation soient imaginaires; or, en général, étant donnée une équation différentielle linéaire sans second membre et à coefficients constants, je dis que, si ces coefficients sont réels, ainsi que les quantités $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$, on pourra mettre aisément l'intégrale sous forme explicitement réelle. En effet, a étant une racine imaginaire de l'équation caractéristique, on prendra sa conjuguée b et on considérera les deux termes $Ae^{ax} + Be^{bx}$. A et B sont évidemment conjugués, puisque ce sont les résidus d'une même fonction réelle $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ pour deux racines conjuguées du dénominateur.

Supposons que $a = \alpha + i\beta$, $b = \alpha - i\beta$ et $A = P + iQ$, $B = P - iQ$; nous aurons

$$\begin{aligned} Ae^{ax} + Be^{bx} &= Ae^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + Be^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}\cos\beta x (A + B) + e^{\alpha x}\sin\beta x (A - B) i \\ &= 2Pe^{\alpha x}\cos\beta x - 2Qe^{\alpha x}\sin\beta x, \end{aligned}$$

quantité qui est en effet réelle.

Nous avons vu tout à l'heure que, étant donnée une solution de $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0$, en y changeant x en $x + c$, on a encore une solution. Cela se voit immédiatement sur la forme générale $y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots$, car les différents termes se trouvent simplement multipliés par e^{ac}, e^{bc}, ce qui revient à changer les constantes A, B, qui sont arbitraires.

Équations linéaires à second membre et à coefficients constants.

Je supposerai que, ce second membre étant un polynôme entier $F(x)$ de degré p, l'équation proposée soit

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n} = F(x).$$

Si je prends la dérivée d'ordre $p+1$ des deux membres, je trouverai

$$\alpha \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} + \beta \frac{d^{p+2} y}{dx^{p+2}} + \ldots + \frac{d^{n+p+1} y}{dx^{n+p+1}} = 0,$$

que je sais intégrer et dont les solutions fourniront celles de la proposée. A la vérité, cette nouvelle équation est plus générale que la première; aussi devrons-nous particulariser le résultat obtenu.

L'équation caractéristique est

$$\alpha z^{p+1} + \beta z^{p+2} + \ldots + z^{n+p+1} = 0.$$

Le premier membre est z^{p+1} multiplié par le premier membre de l'équation caractéristique qui correspondrait à l'équation différentielle proposée sans second membre. On sait qu'une racine a d'ordre $(p+1)$ de l'équation caractéristique donne dans l'intégrale un terme $e^{ax}(g+hx+\ldots+x^p)$. Ici $a=0$; on aura donc simplement un polynôme de degré p, $F(x)$, auquel il faudra ajouter l'ensemble des termes correspondant aux racines simples ou multiples de l'équation caractéristique

$$\alpha + \beta z + \ldots + z^n = 0.$$

La valeur de y sera donc

$$y = F(x) + Ae^{ax} + Be^{bx} + \ldots,$$

où la partie ajoutée à $F(x)$ représente la solution de l'équation proposée, privée de second membre.

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients de $F(x)$; on pourrait le faire en effectuant la substitution de cette valeur de y dans l'équation proposée, et il n'y aura qu'à s'occuper des termes produits par $F(x)$ et ses dérivées successives et identifier la somme de ces termes au second membre $f(x)$.

Mais nous donnerons le moyen de déterminer plus rapidement les coefficients de $F(x)$. Effectuons la division $\frac{1}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\ldots}$, et représentons le quotient par $\alpha_0 + \beta_0 z + \gamma_0 z^2 + \delta_0 z^3 + \ldots$.

Les coefficients $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$ seront liés par les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{r} \alpha\alpha_0 = 1, \\ \alpha\beta_0 + \beta\alpha_0 = 0, \\ \alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Cela étant, je dis que

$$\mathrm{F}(x) = \alpha_0 \mathrm{F}(x) + \beta_0 \mathrm{F}'(x) + \gamma_0 \mathrm{F}''(x) + \ldots,$$

série qui s'arrêtera d'elle-même quand on arrivera à $\mathrm{F}^{p+1}(x)$, qui est nul.

Pour vérifier cette valeur de $\mathrm{F}(x)$, il suffit de faire la substitution comme il a été dit tout à l'heure; or on trouvera ainsi

$$\alpha\alpha_0 \mathrm{F}(x) + (\alpha\beta_0 + \beta\alpha_0)\mathrm{F}'(x) + (\alpha\gamma_0 + \beta\beta_0 + \gamma\alpha_0)\mathrm{F}''(x) + \ldots,$$

qui doit être identique à $\mathrm{F}(x)$, et cette condition est satisfaite d'après les relations (1).

Comme exemple, je prendrai l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + ay = \mathrm{F}(x),$$

que nous savons déjà intégrer; nous allons ainsi retrouver le résultat précédemment obtenu. En appliquant la méthode qui vient d'être exposée, nous ferons le quotient

$$\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \ldots.$$

En posant alors

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{a} - \frac{\mathrm{F}'(x)}{a^2} + \frac{\mathrm{F}''(x)}{a^3} - \ldots,$$

la solution générale sera

$$y = ce^{-ax} + \mathrm{F}(x).$$

Remarque. — Dans un grand nombre de questions, on se sert, comme nous l'avons fait ici, d'une fonction $\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$, dans laquelle les exposants de la variable correspondent à des indices de dérivation d'une fonction donnée $\mathrm{F}(x)$. Lorsqu'on déduit ainsi de $\mathrm{F}(x)$ la nouvelle fonction $\alpha \mathrm{F}(x) + \beta \mathrm{F}'(x) + \gamma \mathrm{F}''(x) + \ldots$, cela s'appelle *opérer* sur $\mathrm{F}(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$.

En terminant, nous indiquerons, sans la démontrer, la conséquence suivante : *Lorsque l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles, le nombre des racines réelles de* $\mathrm{F}(x)$ *est au plus égal au nombre des racines réelles de* $\cancel{\mathrm{F}}(x)$.

f