Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, n° 1 (1879), p. 241-261

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_241_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NEUMANN (F.). — BEITRÄGE ZUR THEORIE DER KUGELFUNCTIONEN. Erste und zweite Abtheilung. In-4°, 156 p. — Leipzig, 1878.

La première Partie du travail de M. Neumann concerne la représentation, au moyen d'intégrales définies et de séries infinies, des fonctions sphériques de première espèce, ordinaires ou *dérivées,* définies comme intégrales particulières de l'équation

$$(a)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dY}{dx}\right]+n(n+1)Y-\frac{j^2}{1-x^2}Y=0$$

pour j égal à zéro ou différent de zéro. Dans le premier cas, la fonction $P_n(x)$ est assujettie à avoir pour $x=1$ la valeur finie 1 et à être infinie pour $x=\infty$; la fonction $Q_n(x)$ est assujettie à être nulle pour cette dernière valeur et infinie pour la première; de plus, on doit avoir

$$Q_n(x)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(z)\,dz}{x-z}.$$

Dans le second cas, la fonction *dérivée* de seconde espèce $Q_{nj}(x)$ est assujettie à s'annuler pour $x=\infty$ et à devenir infinie pour $x=\pm 1$; en outre, le facteur laissé arbitraire par ces conditions est déterminé par la condition

$$Q_{nj}(x)=(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\frac{d^jQ_n(x)}{dx^j}.$$

Les fonctions P_{nj} de première espèce doivent être infinies pour $x=\infty$ et se divisent en deux classes, selon que j est plus petit ou plus grand que n. Pour la première classe ($j \leqq n$), on a

$$P_{nj}(x)=(1-x^2)^{\frac{j}{2}}\frac{d^jP_n(x)}{dx^j}.$$

La seconde classe ($j<n$) se divise en deux sous-classes : les fonctions $S_{nj}(x)$ s'annulent pour $x=-1$ et deviennent infinies pour $x=+1$; l'inverse a lieu pour les fonctions $T_{nj}(x)$; enfin on a

$$Q_{nj}(x)=S_{nj}(x)-T_{nj}(x).$$

La série

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{j}{2}}[a_0(x-1)^n + a_1(x-1)^{n-1} + \ldots],$$

substituée dans l'équation (a), permet de déterminer deux intégrales particulières Y_1 et Z_1, dont la seconde est *conforme* à $Q_{nj}(x)$ (n'en diffère que par un facteur constant). Les expressions ainsi obtenues peuvent être soumises à *sept* transformations résultant des combinaisons des changements de x en $-x$, de j en $-j$, de n en $-n-1$, qui n'altèrent pas l'équation (a). De là résultent *huit* intégrales particulières, conformes en partie les unes aux autres. De cette façon, trois intégrales Z_2, Z_3, Z_4 se déduisent de Z_1, trois autres Y_2, Y_3, Y_4 de Y_1; les quatre intégrales Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont conformes à $Q_{nj}(x)$, et M. Neumann détermine les facteurs numériques par lesquels on doit les multiplier pour les rendre identiques à cette fonction : de là résultent quatre séries procédant suivant les puissances descendantes de $x-1$ ou de $x+1$, qui peuvent représenter $Q_{nj}(x)$, qui sont convergentes pour $x^2 > 1$, et se réduisent à des expressions finies pour $j > n$. De même, pour $j \leqq n$, les quatre intégrales Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 peuvent être identifiées à $P_{nj}(x)$; lorsque l'on a $j > n$, deux de ces intégrales sont conformes à $S_{nj}(x)$, les deux autres à $T_{nj}(x)$.

Relativement à ces deux dernières fonctions, l'auteur montre que l'on a

$$S_{nj}(x) = (-1)^j 1.2\ldots j(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{1} \frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

$$T_{nj}(x) = (-1)^j 1.2\ldots j(1-x^2)^{\frac{j}{2}} \int_{\infty}^{-1} \frac{P_n(z)\,dz}{(x-z)^{j+1}},$$

$$T_{nj}(x) = (-1)^{j-n} S_{nj}(-x),$$

$$\begin{aligned} Q_{nj}(x) &= +S_{nj}(x) - (-1)^{j-n} S_{nj}(-x) \\ &= -T_{nj}(x) + (-1)^{j-n} T_{nj}(-x). \end{aligned}$$

Outre les intégrales définies qui entrent dans ces formules, étudiées par lui sous le nom d'intégrales de *première espèce*, M. Neumann introduit les intégrales de *seconde espèce*

$$\int_x (x-z)^{j-1} P_n(z)\,dz, \qquad \int^{-1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,dz,$$

qui, pour $j > n$, se déduisent des premières, à un facteur constant près, en les multipliant par $(x^2-1)^j$, et au moyen desquelles on peut exprimer S_{nj}, T_{nj}, P_{nj}. Quant à Q_{nj}, on a

$$Q_{nj} = (-1)^n \frac{1.2\ldots(j+n)}{(j-1)(j-2)\ldots(j-n)} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{j}{2}} \int_{-1}^{+1} (x-z)^{j-1} P_n(z)\,dz,$$

et cette formule, établie pour $j > n$, subsiste pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$ de j, en levant convenablement l'indétermination.

La fin de cette première Partie se rapporte aux développements des diverses fonctions sphériques suivant les puissances ascendantes de x et à l'expression de ces fonctions au moyen des deux séries

$$1 + \frac{(j-n)(j+n+1)}{1.2} x^2 + \frac{(j-n)(j-n+2)(j+n+1)(j+n+3)}{1.2.3.4} x^4 + \ldots,$$

$$x + \frac{(j-n+1)(j+n+2)}{1.2.3} x^3 + \frac{(j-n+1)(j-n+3)(j+n+2)(j+n+4)}{1.2.3.4.5} x^5 + \ldots.$$

La deuxième Partie s'ouvre par une sorte de préface où sont réunies les diverses relations, à forme récurrente, qui lient entre elles les fonctions sphériques à indices différents et leurs premières dérivées, ainsi que les formules qui donnent les valeurs de ces fonctions pour $x = 0, \pm 1, \infty$. L'objet principal poursuivi par l'auteur est le développement en séries de fonctions sphériques du produit de deux telles fonctions, développement dont l'intérêt n'échappera pas au lecteur. M. Neumann parvient à l'effectuer en formant l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre à laquelle satisfait le produit de deux intégrales particulières quelconques de deux équations différentielles telles que

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dU}{dx}\right] + p(p+1)U = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dV}{dx}\right] + q(q+1)V = 0.$$

Lorsque $p = q$, cette équation ne monte qu'au troisième ordre; il y a là un résultat facile à généraliser : cette équation a évidemment pour intégrale générale

$$AP_pP_q + BP_pQ_q + CP_qQ_p + DQ_pQ_q;$$

en substituant ensuite une série de la forme

$$A_0P_{\nu_0} + A_2P_{\nu_2} + A_4P_{\nu_4} + \ldots$$

à la place de l'inconnue, on trouve quatre manières de satisfaire à cette équation, qui correspondent aux quatre intégrales particulières et conduisent ainsi aux développements cherchés. A ces développements, qui ne concernent que les produits de fonctions sphériques ordinaires, M. Neumann a joint ceux qui concernent les produits où entrent des fonctions sphériques dérivées du premier ordre. Tous ces résultats sont réunis dans huit tableaux, dont chacun remplit une page.

Enfin il en est fait une application intéressante aux intégrales de la forme

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(z)\,dz}{x - z},$$

en supposant $F(z) = P_p(z)P_q(z)$, ou $(1 - z^2)P'_p(z)P'_q(z)$, ou $P_q(z)P'_p(z)$; on a, par exemple, pour $p \geqq q$,

$$Q_p(x)P_q(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_p(z)P_q(x)}{x - z}(z)\,dz.$$

FLAMMARION (C.). — CATALOGUE DES ÉTOILES DOUBLES ET MULTIPLES EN MOUVEMENT RELATIF CERTAIN, comprenant toutes les observations faites sur chaque couple depuis la découverte et les résultats conclus de l'étude des mouvements. — 1 vol. in-8° de XIV et 184 p. Paris, Gauthier-Villars, 1878.

Les étoiles doubles font aujourd'hui l'objet des travaux d'un grand nombre d'observateurs, et les données que nous possédons sur ces systèmes physiques vont rapidement en augmentant, de telle sorte qu'il sera bientôt possible de calculer d'une manière suffisamment rigoureuse les orbites du plus grand nombre d'entre elles. Sans doute, bien des observations sont encore nécessaires pour cela, et ce n'est pas trop des forces d'une réunion d'astronomes pour conduire à bonne fin des recherches aussi laborieuses; mais c'est précisément parce que le travail à accomplir est presque gigantesque, qu'il importe qu'il n'y ait pas de forces perdues et qu'il est indispensable que les observateurs choisissent, parmi les 11 000 étoiles multiples aujourd'hui signalées comme pouvant être physiquement associées, celles pour lesquelles les données sont encore incertaines ou insuffisantes. Un catalogue complet des étoiles doubles, une collection de leurs observations, souvent disséminées dans des publications difficiles à obtenir, était donc indispensable.

L'amiral Smyth, dans son *Celestial Cycle,* a bien donné autrefois une collection des observations faites avant lui; mais cette collection est actuellement trop incomplète pour pouvoir être de quelque utilité aux astronomes. Le Catalogue d'étoiles doubles de J. Herschel renferme la position de 10000 de ces astres, mais il ne fait pas connaître leurs positions relatives; d'un autre côté, l'histoire synoptique de 4000 de ces étoiles, écrite par le même auteur, est restée jusqu'ici manuscrite.

Aucun document n'était donc préparé pour venir en aide à l'astronome désireux de savoir sur quelles étoiles multiples devaient se porter les observations. Cette lacune est aujourd'hui heureusement comblée par le Volume de M. Flammarion, que nous analysons ici, et tout le monde lui sera reconnaissant d'avoir donné aux astronomes une statistique qui a exigé un laborieux travail de plusieurs années, une persévérance digne des plus grands éloges.

Les groupes stellaires dans lesquels M. Flammarion a, après une discussion graphique, reconnu un mouvement relatif certain sont au nombre de 819, dont 731 doubles, 73 triples, 12 quadruples, 2 quintuples et 1 sextuple; c'est donc en tout 1745 étoiles diversement associées.

Certains de ces groupes ont été très-fréquemment observés; pour d'autres, il y a pénurie presque complète de mesures. C'est ainsi que, tandis qu'on connaît près de 200 observations complètes de γ de la Vierge, 300 de ζ du Cancer, 200 environ de Castor, M. Flammarion n'a, pour d'autres étoiles, trouvé dans les Recueils imprimés que quelques mesures, insuffisantes par leur nombre ou par leur précision, pour décider de la réalité des mouvements relatifs. Une partie de ces lacunes a été comblée par des observations faites à Paris par l'auteur lui-même et surtout par d'obligeantes communications de MM. Duner, Engelmann, Wilson et Seabroke, Gledhill, Knot, Doberck, Barclay, Dembowski, Schiaparelli, Burnham, Stone, Newcomb, Hall, Holden, qui ont transmis à M. Flammarion des observations encore inédites.

Pour chaque étoile, M. Flammarion donne, avec le nom de la constellation à laquelle elle appartient, sa lettre ou son numéro dans les Catalogues de Flamsteedt ou de Bode; viennent ensuite son numéro dans les Catalogues d'étoiles doubles de W. Struve, d'O. Struve ou d'Herschel, puis sa position pour 1880, et enfin une courte description du groupe.

Pour les observations mêmes, la date est donnée en centièmes d'année, l'angle de position en dixièmes de degré et la distance en centièmes de seconde. Le nom des observateurs est indiqué par des initiales, dont un Tableau spécial donne la clef. Toutes les observations d'une année ont été réunies en une moyenne unique.

Une courte Note ajoutée à la suite des observations de chaque étoile fait connaître, avec les éléments de l'orbite lorsqu'elle a été calculée, la grandeur et la nature du mouvement orbital et les particularités physiques les plus importantes du système; c'est une histoire, en général très-complète, des diverses recherches faites sur l'astre considéré.

Réduit à cette première Partie, purement statistique, le Volume de M. Flammarion rendrait déjà d'importants services, mais il prend un intérêt plus grand encore par les réflexions que la considération de l'ensemble des étoiles multiples a inspirées à son auteur et par la classification qu'il a cru devoir faire de ces astres.

Dans leurs classifications antérieures, l'amiral Smyth, lord Wrottesley, le P. Secchi, M. Barclay, etc., se sont accordés à considérer les couples en mouvement comme physiques et les couples demeurés stationnaires comme simplement optiques; mais M. Flammarion fait observer qu'il ne suffit pas qu'une étoile double offre un mouvement certain pour affirmer qu'elle est orbitale, et qu'un très-grand nombre de ces couples prouvent au contraire, par la nature de leur mouvement, qu'ils ne sont dus qu'à la perspective.

« Si, dit l'auteur, dans un grand nombre de cas, nous pouvons affirmer la nature orbitale du couple et même calculer les éléments de cette orbite, ou, au contraire, affirmer son état optique et prouver que les deux composantes ne se trouvent actuellement réunies sur le même rayon visuel que par l'incertitude des mesures ou le hasard des perspectives célestes, cependant, dans un grand nombre de cas aussi, l'exiguïté du mouvement parcouru laisse le champ libre à plusieurs interprétations : il n'est pas toujours facile de se décider. En tenant compte de la distance angulaire des composantes, de leur similitude ou de leur différence d'éclat, de la sûreté ou de la difficulté des mesures, de la grandeur et de la direction du mouvement, on arrive cependant à l'opinion la plus conforme à l'ensemble de l'examen et à la conclusion la plus probable. Mais ce serait s'abuser que de prétendre apporter une rigueur mathématique dans les conclusions relatives à ces cas douteux. La comparaison des résultats généraux m'a toutefois conduit à considérer en général comme orbitaires les couples dont la distance est 1 seconde ou au-dessous et comme optiques ceux dont la distance surpasse 25 secondes. Pour les autres cas douteux, la recherche du mouvement propre, la forme du mouvement relatif, la différence de grandeur des étoiles, la durée de la période d'observation, sont entrées en ligne de compte pour la conclusion définitive. »

C'est en suivant ces principes que M. Flammarion a dressé et publié, dans les dernières pages de son Volume, une classification de l'ensemble des étoiles doubles suivant la nature et la rapidité de leurs mouvements : 1° systèmes orbitaux certains, classés suivant que, depuis leur découverte, le compagnon a fait autour de l'étoile centrale une révolution entière, les trois quarts, la moitié, le quart, etc., d'une révolution; 2° les systèmes orbitaux probables, rangés suivant l'ordre de probabilité; 3° les systèmes physiques dans lesquels le mouvement relatif est rectiligne; 4° les systèmes ternaires; 5° les étoiles triples non ternaires; 6° les systèmes quaternaires; 7° les étoiles quadruples; 8° les groupes de perspective; 9° les groupes indéterminés, etc., etc.

Il y a, d'après cette classification, 558 systèmes orbitaux certains ou probables, 317 groupes de perspective, 17 systèmes physiques dont les composantes se déplacent en ligne droite, 28 systèmes ternaires, 32 triples non ternaires, formés d'un système binaire et d'un compagnon optique.

L'étoile binaire dont la période est la plus courte est δ du Petit Cheval, dont le mouvement complet, en ligne droite sur une longueur de $0'',4$, s'effectue en sept ou en quatorze années. Viennent ensuite Σ 3130 de la Lyre, dont la période est de seize ans, 42 de la Chevelure, dont la période est de vingt-cinq ans, etc., etc.

Tel est, en quelques lignes, le résumé rapide des documents rassemblés et discutés par M. Flammarion dans l'Ouvrage que nous avons sous les yeux, et qui prendra certainement place dans la bibliothèque de tous les observatoires dont les astronomes étudient les étoiles doubles. G. R.

SERRET (J.-A.), membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE. 4e édition. 2 vol. in-8°; 1877-79. Paris, Gauthier-Villars.

Il suffira évidemment de signaler à nos lecteurs cette nouvelle édition d'un Ouvrage dont la réputation est si bien établie. L'auteur a fait quelques changements; une addition assez considérable a été introduite au Tome II. Un Chapitre nouveau est consacré à la détermination des fonctions entières irréductibles suivant un module premier dans le cas où le degré est une puissance du module (p. 190-211). M. Serret considère successivement le cas où le degré est égal au module et celui où le degré est une puissance du module.

On doit remercier M. Serret d'avoir bien voulu donner tous ses soins à cette nouvelle édition et d'avoir mis de nouveau à la disposition des géomètres un Ouvrage qui leur est devenu indispensable, et dont l'édition précédente était depuis longtemps épuisée.

G. D.

P. PUISEUX. — ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

Résumé des travaux antérieurs sur l'accélération du mouvement de la Lune. — État de la question.

L'accélération séculaire du mouvement de la Lune a été signalée par l'observation longtemps avant qu'on fût en mesure d'en assigner la cause par la théorie. De tous les phénomènes astronomiques, les éclipses de Soleil et de Lune sont ceux qui ont le plus attiré l'attention des anciens. Ptolémée nous a fait connaitre, dans l'*Almageste*, un grand nombre d'éclipses de Lune observées soit par les Babyloniens, soit par Hipparque, soit par lui-même. Malheureusement les nombres qu'il donne sont peu précis, et il y a lieu de craindre qu'ils n'aient subi des altérations. Les observations arabes qui nous sont parvenues paraissent mériter plus de confiance. C'est par l'étude des éclipses de Soleil observées en Asie par Albaténius, à la fin du IXe siècle de notre ère, que Halley a pu s'assurer, en 1695, de l'existence d'une équation séculaire dans la longitude de la Lune. Il ne se crut pas autorisé, toutefois, à en fixer la valeur numérique. Ce progrès fut accompli cinquante ans plus tard par Dunthorne et Mayer. Aux observations déjà considérées par Halley ils joignirent deux éclipses de Soleil observées au Caire par Ibn Junis à la fin du Xe siècle, ainsi qu'un grand nombre de documents plus récents. Dunthorne fut ainsi conduit à attribuer au moyen mouvement de la Lune une accélération de $10''$ par siècle. Après une discussion qui paraît avoir été plus complète, Mayer adopta le chiffre de $6'',7$. Dans la dernière édition de ses Tables de la Lune, il le porta à $9''$, sans que l'on sache bien les raisons qui ont déterminé ce changement.

Aucun de ces chiffres, toutefois, ne permettait d'établir un accord satisfaisant entre les observations et les Tables. Frappé de ces divergences, Lalande proposa de ne faire entrer dans la discussion qu'une seule des éclipses de Ptolémée, en y joignant les deux observations faites par Ibn Junis, les seules dont l'heure puisse être regardée comme connue avec précision. Il obtint de la sorte une confirmation du résultat de Dunthorne. Lagrange fut plus réservé dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1774. Après avoir cherché vainement à rendre compte par la théorie du fait de l'accélération séculaire, il émit des doutes sur la réalité même de cette accélération. Selon lui, les observations anciennes sont trop vagues et trop discordantes pour justifier les conclusions de ses devanciers.

La question historique, délaissée pendant plusieurs années, entra dans une phase nouvelle lorsque Baily eut signalé en 1811, dans les éclipses totales, un nouveau et précieux moyen de contrôle pour les Tables de la Lune. Cette fois, ce n'est plus aux astronomes, c'est aux historiens de l'antiquité qu'il faut s'adresser. Les éclipses totales étant excessivement rares en un point donné de notre globe, il suffit d'une indication même approchée de temps et de lieu pour identifier l'éclipse chronologique avec une de celles qui sont indiquées par les Tables; à une condition toutefois, c'est qu'il ne subsiste pas une trop grande incertitude sur la valeur même de l'accélération séculaire. En adoptant pour valeur approchée 10″ et en faisant usage des Tables de Damoiseau, M. Airy fut conduit à élever cette valeur à 10″,72. Enfin, dans son Mémoire de 1857, l'illustre Astronome Royal d'Angleterre, se servant des Tables construites par M. Hansen, a trouvé que la valeur de l'accélération séculaire qui rend le mieux compte des éclipses totales de l'antiquité est de 12″,989, soit à peu près 13″. Aucune des déterminations théoriques effectuées jusqu'à présent n'atteint un chiffre aussi élevé.

Les géomètres, cependant, ne s'étaient point laissé décourager par l'insuccès de Lagrange. Bossut avait déjà, en 1762, présenté une explication fondée sur l'hypothèse d'un milieu très-raréfié, mais résistant, dont l'influence serait plus sensible sur la Lune que sur les planètes. Lagrange avait écarté cette explication comme démentie par le ralentissement de Saturne. Laplace montra qu'il suffirait de supposer que la transmission de la force attractive de la Terre à la Lune ne fût pas instantanée pour introduire une équation séculaire dans le mouvement de notre satellite. Il signala également ce fait capital qu'un ralentissement dans la rotation de la Terre sur elle-même, fût-il seulement de $0^s,01$ depuis le temps d'Hipparque, amènerait dans le mouvement de la Lune une accélération apparente supérieure à celle que semblaient exiger les observations. C'était déplacer la question, mais non la résoudre, car aucune cause connue ne semblait devoir affecter l'invariabilité du jour sidéral. Lagrange, revenant sur la question en 1783, dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin,* montra que les variations séculaires de l'excentricité, de l'inclinaison, de la longitude du nœud ou du périhélie d'une planète pouvaient produire une équation séculaire dans le mouvement d'un astre voisin, au moins lorsqu'on avait égard aux secondes puissances des excentricités et des inclinaisons. Faisant l'application de sa théorie aux actions réciproques de Jupiter et de Saturne, il n'obtint que des résultats négligeables, et, par une conclusion trop hâtive, il admit qu'il en serait de même pour toutes les autres planètes de notre système. C'est ainsi qu'il se laissa enlever par Laplace l'honneur d'une découverte contenue implicitement dans ses formules.

C'est en travaillant à la théorie des satellites de Jupiter que Laplace fut mis sur la voie de l'explication si longtemps cherchée. Il reconnut qu'une variation séculaire dans l'excentricité de l'orbite de cette planète produisait une accélération dans les mouvements moyens des satellites. Ce résultat, transporté à la Lune, lui donna une équation séculaire peu différente de celle qui avait été déduite des seules observations. Une circonstance analogue se présenta dans les mouvements du nœud et du périgée de l'orbite lunaire. Cette importante découverte fut communiquée à l'Académie des Sciences de Paris le 19 novembre 1787 et publiée avec détail l'année suivante dans le Volume de l'*Histoire de l'Académie* pour 1786. La première partie du calcul développé dans les pages suivantes reproduit, en ce qu'elle a de plus essentiel, l'analyse du grand géomètre. Laplace s'en était tenu à la première puissance de la force perturbatrice du Soleil, et encore n'avait-il conservé que la partie principale du résultat. En présence de l'accord satisfaisant du chiffre obtenu avec celui que Dunthorne et Lalande avaient cru pouvoir déduire des observations, Laplace n'avait pas jugé nécessaire d'examiner s'il ne serait pas modifié par une approximation ultérieure.

En 1820, Plana et Damoiseau reprirent la question. Le premier, adoptant la forme algébrique pour les inégalités lunaires, calcula jusqu'aux quantités du septième ordre la série qui multiplie l'intégrale $\int e'^2\,dt$ dans le coefficient de l'accélération séculaire. C'est sous cette forme, comme nous le verrons plus loin, que se présente le résultat, e' désignant l'excentricité de l'orbite terrestre. Il trouva ainsi $10'',58$ au lieu du nombre $10'',18$ que donnait le terme de Laplace pris seul. Par une voie différente, Damoiseau obtint $10'',72$. Enfin M. Hansen a porté ce coefficient successivement à $11'',47$ et à $12'',18$. La méthode employée par lui n'a pas été publiée *in extenso,* et ce résultat emprunte par conséquent toute son autorité à l'exactitude reconnue des Tables de la Lune publiées par son auteur. Il est bon d'ajouter, cependant, que l'accord des Tables de M. Hansen avec les observations modernes ne serait pas altéré par une modification apportée au coefficient de l'accélération séculaire. Ce n'est qu'à une époque reculée que l'influence de cette correction se ferait sentir, et il n'est pas encore absolument démontré, au jugement de MM. Airy et Delaunay, que les observations anciennes ne puissent être représentées par les Tables actuelles, avec une valeur différente de l'accélération.

Toutes ces déterminations s'accordaient à fournir pour le coefficient considéré une valeur un peu supérieure à $10''$, lorsque M. Adams, dans un Mémoire lu à la Société royale de Londres le 16 juin 1853, vint signaler un vice de méthode dans les recherches de Plana et Damoiseau. Dans les équations différentielles qui définissent le mouvement de la Lune, ces deux savants avaient traité l'excentricité de l'orbite terrestre, et par suite le moyen mouvement de la Lune, comme des constantes, pour ne leur attribuer le caractère de variables qu'après l'intégration faite. Ce procédé, légitime quand on n'a égard, comme l'avait fait Laplace, qu'à la première puissance de la force perturbatrice, cesse de l'être quand on passe aux approximations suivantes. La supposition contraire, la seule conforme aux faits, introduit dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune de nouveaux termes proportionnels au carré du temps, et le résultat primitif se trouve profondément modifié. Cette conclusion imprévue, dont nous trouverons une confirmation nouvelle dans les calculs qui vont suivre, a été parfaitement mise en évidence par MM. Adams et Delaunay. Nous renverrons, pour plus de détails, au Mémoire inséré par M. Delaunay dans la *Connaissance des Temps* pour 1864. On trouvera dans ce même travail une confirmation du résultat de M. Adams, obtenue par la méthode dont Delaunay a fait la base d'une nouvelle théorie de la Lune. De ces recherches et des calculs plus complets dont Delaunay a donné le résultat dans le Tome LXXII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, il résulte que le coefficient de l'accélération séculaire doit être réduit à $6'',176$. C'est, on le voit, la moitié du chiffre de M. Hansen. Il convient d'ajouter que la seule cause invoquée dans ces travaux pour rendre compte de l'accélération séculaire a été la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Les recherches que nous venons de citer ont reçu depuis l'assentiment d'un grand nombre de géomètres. Plana, à la suite d'une longue controverse, a été amené à reconnaître la nécessité de modifier ses calculs dans le sens indiqué par M. Adams. MM. Lubbock et Cayley ont obtenu séparément une confirmation entière de la théorie nouvelle. Le Verrier, cependant, a longtemps combattu la modification proposée comme inconciliable avec les observations anciennes. Il faut répondre, avec Delaunay, que cet argument ne saurait être décisif dans une question d'analyse, et que, si la divergence annoncée est réelle, la cause doit en être cherchée dans quelque influence physique mal étudiée. Le Verrier alléguait moins, du reste, ses propres recherches que l'autorité de M. Hansen, qui affirmait avoir obtenu par la théorie seule son coefficient de $12''$. A dire vrai, l'effet produit par cette déclaration a dû être un peu atténué par la publication d'une Lettre de M. Hansen à M. Warren de la Rue, président de la Société Astronomique de Londres (¹). Dans ce document, M. Hansen, tout en maintenant le chiffre proposé par lui comme le plus conforme aux observations, reconnaît comme exacte l'analyse de M. Adams; l'éminent astronome de Gotha attribue la divergence à ce qu'il aurait, dans ses propres calculs, traité comme constante une certaine quantité Ξ, dont la variation est liée à celle du moyen mouvement de la Lune. Nous retombons, on le voit, dans l'hypothèse fautive de M. Plana. En vain M. Hansen insiste sur la concordance remarquable que l'hypothèse $\Xi = 0$ établirait entre le calcul et l'observation. Un tel accord ne saurait racheter une lacune dans la théorie. Pour s'en faire une arme contre le résultat de M. Adams, si bien confirmé par tous les procédés de l'analyse, il faudrait avoir établi

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 704.

clairement que la cause dont on a tenu compte est la seule qui puisse modifier le moyen mouvement de la Lune.

Rien n'est moins démontré, et M. Hansen lui-même donne, avec M. Airy, son assentiment aux vues de Delaunay, qui a cherché dans une nouvelle cause physique agissant sur la Lune l'explication du désaccord. Déjà Laplace avait signalé l'influence qu'aurait sur le mouvement apparent de la Lune une altération, si petite qu'elle fût, de la durée du jour sidéral. Dans une Communication faite à l'Académie des Sciences ([1]), Delaunay a montré, avec sa clarté ordinaire, que le retard de la marée sur le passage de la Lune au méridien doit produire un couple résistant qui ralentit la rotation de la Terre sur elle-même, accroît dans la suite des siècles la durée du jour sidéral et entraîne une accélération apparente dans le moyen mouvement de la Lune. S'il est aisé de se rendre compte de l'existence d'une pareille cause, il l'est beaucoup moins de la soumettre au calcul et de se faire une idée, même approchée, de la grandeur de ses effets.

Le dernier travail important qui ait été publié, à notre connaissance, sur ce sujet, a paru en 1873, dans le *Recueil des Mémoires présentés à l'Académie des Sciences* (t. XXI). Dans ce Mémoire, mon père a démontré, en poussant l'approximation plus loin que ne l'avait fait Laplace, que la variation séculaire de l'inclinaison de l'orbite terrestre est sans effet, dans les limites des temps historiques, sur l'accélération du mouvement de la Lune. Par là même se trouve écartée l'hypothèse d'une équation séculaire due au déplacement progressif du nœud de l'orbite terrestre. On voit en effet, à l'inspection de la fonction perturbatrice de la Lune, que l'hypothèse qui consiste à regarder comme nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre, supposition permise dans la recherche de l'équation séculaire, fait évanouir à la fois tous les termes où figure la longitude du nœud. Reste le déplacement du périhélie de l'orbite terrestre, que Lagrange avait signalé comme pouvant produire une équation séculaire de la Lune. Mais un coup d'œil jeté sur la fonction perturbatrice montre qu'il n'en est rien. La longitude du périhélie, qui dans nos formules sera désignée par ϖ', n'entre en effet que

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* t. LXI, p. 1023.

dans les termes périodiques, et, si l'on suppose nulle l'inclinaison de l'orbite terrestre, elle se trouvera partout associée aux longitudes moyennes de la Terre et de la Lune, qui ont une variation bien plus rapide. Le seul effet du déplacement du périhélie sera donc de modifier légèrement les périodes des inégalités de la Lune; il ne peut en résulter d'équation séculaire dans la longitude.

Calcul de l'accélération séculaire du mouvement de la Lune par la méthode de Poisson.

Dans la première approximation, on pourra réduire la fonction perturbatrice de la Lune, telle qu'elle est donnée dans l'Ouvrage de Delaunay, à sa partie non périodique. Il suffira d'y remplacer l'excentricité de l'orbite terrestre par son expression en fonction du temps, qui est, d'après Le Verrier,

$$e' = 3459'',28 - 0,08755\,t - 0'',00000282\,t^2.$$

Enfin l'on intégrera l'expression qui en résulte pour la dérivée de la longitude moyenne de la Lune. Le calcul ainsi effectué ne diffère de celui de Laplace que par la suppression de quelques développements étrangers à notre objet.

La seconde approximation est fondée sur la méthode de la variation des constantes arbitraires, modifiée conformément aux indications données par Poisson dans son Mémoire de 1833. On s'assure aisément que deux arguments différents de la fonction perturbatrice donneront toujours, quand on les combinera par addition ou soustraction, un résultat périodique. Il sera donc permis, dans la recherche d'une inégalité séculaire, de limiter successivement la fonction perturbatrice à chacun de ses termes.

On peut encore abréger le calcul en profitant d'une remarque faite par Delaunay, dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1862. Si l'on s'en tient aux premières puissances de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire, la fonction perturbatrice se réduit à vingt termes, dont neuf contiennent en facteur l'excentricité; les autres n'en dépendent pas. Les termes appartenant à l'une ou à l'autre de ces deux catégories peuvent être compris dans une même forme analytique et soumis à un même calcul. Le coefficient relatif à chaque terme se tire ensuite de la formule générale par de simples substitutions numériques. Le calcul ainsi effectué n'occupe qu'un petit nombre de pages et permet de retrouver, à $\frac{2}{10}$ de seconde près, le résultat de M. Adams. Il met aussi en lumière l'insuffisance de la première approximation. Il existe en effet dans la fonction perturbatrice un terme périodique qui, à lui seul, produirait dans le moyen mouvement de la Lune une plus grande accélération que la partie non périodique, la seule considérée par Laplace.

Sans sortir de la seconde approximation, on peut obtenir une précision plus grande en n'excluant plus que les puissances de l'excentricité et de l'inclinaison égales ou supérieures à la quatrième. Le développement de la fonction perturbatrice se trouve ainsi porté à trente-cinq termes. Comme précédemment, on fait à chacun de ces termes deux applications successives de la méthode de Poisson, de manière à trouver dans la dérivée de la longitude moyenne la partie qui contient en facteur le carré de l'excentricité de l'orbite terrestre. Les termes qui rentrent dans une même forme analytique peuvent être traités ensemble, mais ici l'introduction des puissances supérieures de e et de φ amène des différences dont il est indispensable de tenir compte; on est conduit à partager les trente-cinq termes de la fonction perturbatrice en dix groupes, dont chacun fait l'objet d'un calcul séparé.

Pour obtenir partout le même degré d'exactitude, on doit : 1° compléter la partie non périodique de la fonction perturbatrice par l'introduction des termes du second et du quatrième ordre dans le multiplicateur de e'^2; 2° chercher la partie principale de la troisième approximation fournie par une application nouvelle de la méthode de Poisson. Cette fois, des termes non périodiques peuvent apparaître par la combinaison de trois arguments. Il n'est donc plus permis de réduire, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la fonction perturbatrice successivement à chacun de ses termes. Cependant, comme l'expression que l'on veut obtenir ne doit renfermer ni e, ni φ, ni les puissances de e' supérieures à la seconde, on peut, dès le début, écarter les termes de la fonction perturbatrice qui contiendraient ces quantités en facteur. A la fonction ainsi réduite on applique trois fois la méthode d'approximation de Poisson, toujours en vue d'obtenir le coefficient de e'^2 dans la dérivée de la longitude moyenne. La seule précaution à prendre dans ce calcul consiste à supprimer, à mesure qu'ils se présentent, les termes qui ne doivent pas influer sur le résultat final et dont l'introduction conduirait à une analyse prolixe.

Les données qui ont servi à réduire la formule en nombres ont été empruntées aux Tables de M. Hansen pour les éléments de la Lune, et aux Mémoires publiés par M. Le Verrier dans les *Annales de l'Observatoire,* pour ce qui se rapporte à l'orbite terrestre. Le coefficient du carré du temps dans la longitude moyenne de la Lune se trouve ainsi porté à $6'',334$. Par l'effet d'une telle accélération, la longitude de la Lune, à vingt-cinq siècles de notre époque, est accrue de plus de 1°. Il en résulterait une modification profonde dans les circonstances d'une éclipse. Beaucoup moindre est l'influence du terme en t^3, qui apparaît également dans la longitude moyenne quand on remplace e' par son expression en fonction du temps. Après vingt-cinq siècles, la modification due à ce terme dans la longitude moyenne de la Lune serait environ de $2'$, comme on s'en assure par un calcul facile. Le peu de précision des observations anciennes qui nous sont parvenues permet de regarder un tel déplacement comme sans importance.

Jusqu'ici nous avons admis que la partie proportionnelle au temps dans la dérivée de la longitude moyenne provenait uniquement du facteur e'^2. Il existe cependant dans l'expression de cette dérivée des termes en e'^4 et en e'^6 qui, lorsqu'on remplacera e' par sa valeur en fonction du temps, ajouteront au coefficient de l'accélération séculaire des parties du même ordre que celles qui ont été considérées en dernier lieu. On s'assure facilement que les termes en e'^6 sont négligeables; mais il n'en est pas de même des termes en e'^4, dont plusieurs dépassent en valeur absolue $\frac{1}{100}$ de seconde. Il est vrai que la somme des termes négatifs diffère peu de celle des termes positifs, circonstance qui se présente assez fréquemment dans les recherches astronomiques. La considération de ces termes a pour effet de réduire le coefficient de l'accélération séculaire à $6'',328$. Selon toute apparence, une nouvelle application de la méthode de Poisson, effectuée en vue d'obtenir une précision plus grande, ne modifierait que le chiffre des millièmes de seconde.

DINI (U.) — FONDAMENTI PER LA TEORICA DELLE FUNZIONI DI VARIABILI REALI. — Pise, 1878. In-8°, 407 pages.

Depuis un certain nombre d'années, on se préoccupe de mettre de la rigueur dans l'établissement des principes de l'Analyse, de donner plus de précision aux définitions et de n'en tirer que ce qu'elles contiennent; la nécessité de cette révision s'imposa à partir du moment où, dans le célèbre Mémoire de Riemann sur les séries trigonométriques, la définition de l'intégrale des fonctions discontinues fut donnée d'une manière précise, définition qui entrainait comme corollaire l'existence de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. Depuis lors, les travaux de Hankel, de MM. Weierstrass, Du Bois-Reymond, Darboux ont éclairci les points les plus importants. De son côté, M. Dini prit cette matière pour le sujet d'une partie de ses Leçons pendant l'année scolaire 1871-1872 et y revint à plusieurs reprises. Diverses causes ont retardé jusqu'à l'année 1878 la publication de l'Ouvrage d'ensemble qu'il préparait sur les diverses questions qui se rattachent à cet ordre d'idées; l'auteur paraît craindre que son livre n'ait ainsi perdu quelque peu de son actualité; quoi qu'il en soit, cet Ouvrage ne perd rien de son utilité, maintenant qu'il importe de déterminer la mesure dans laquelle il convient de faire pénétrer dans l'enseignement la substance des résultats acquis sur ce sujet depuis une vingtaine d'années.

M. Dini commence par préciser les notions de nombre incommensurable et de limite. Tout nombre pouvant être représenté par un point sur une ligne droite dont la distance à un point fixe pris sur cette droite est mesurée par ce nombre lui-même, on pourra parler indifféremment d'un nombre ou du point qui le représente.

Ainsi la notion d'un groupe de nombres compris entre deux nombres donnés pourra être remplacée par celle du groupe de points correspondants : s'il y a un nombre infini de tels points, il existera, entre les deux points extrêmes, au moins un point tel, que dans son domaine (*intorno*), quelque petit qu'il soit, il y ait un nombre infini de points du groupe considéré; l'ensemble de ces points, que nous appellerons avec l'auteur *points limites*, est le premier groupe dérivé; si ce groupe dérivé est infini, il donnera lieu lui-même à un second groupe dérivé, etc. Les mêmes considérations donnent lieu à la notion de limite supérieure et inférieure d'un groupe de nombres ou de points. La fonction d'une variable dans un intervalle étant nettement définie par ce fait que sa valeur est, pour toute valeur de la variable, comprise dans l'intervalle considéré, complètement déterminée, la notion du maximum et du minimum, de l'oscillation d'une fonction dans un intervalle donné, la preuve de l'existence d'un point dans le domaine duquel, si petit qu'il soit, la fonction prend des valeurs aussi voisines qu'on le veut de sa valeur maximum se déduisent aisément de ce qui précède, ainsi que les conséquences principales de la *continuité*, si l'on suppose que la fonction considérée est continue : en particulier, une telle fonction, dont les valeurs sont données pour un groupe de points, prend, par cela même, des valeurs données aux points *limites* de ce groupe; elle atteint les valeurs maxima et minima dans tout intervalle et passe par toutes les valeurs intermédiaires. Il y a lieu de remarquer qu'une fonction continue, dans le domaine d'un point, si petit qu'il soit, peut présenter une infinité de maxima et de minima; en sorte qu'il y a lieu de distinguer les fonctions continues en deux classes, suivant qu'elles font ou non un nombre infini d'oscillations dans un intervalle donné.

Pour ce qui est de la discontinuité, il y aura lieu de distinguer d'abord les fonctions qui, dans un intervalle déterminé, ne sont discontinues qu'en un nombre limité de points et, parmi ces dernières, celles qu'on pourrait rendre continues en modifiant les valeurs qu'elles prennent aux points de discontinuité. On remarquera encore qu'une fonction peut être discontinue d'un côté d'un point sans l'être de l'autre côté. La discontinuité, à droite de la valeur a, par exemple, sera de première espèce lorsque, $x - a$ tendant vers zéro par des valeurs positives, la fonction tend vers une limite déterminée; dans le cas contraire, elle sera de seconde espèce. Une fonction, tout en étant susceptible d'une définition analytique, peut, dans un intervalle donné, être discontinue un nombre infini de fois; elle est dite *ponctuellement* discontinue si dans toute portion de cet intervalle elle admet des points de continuité, sinon elle est *totalement* discontinue.

L'auteur aborde ensuite la notion de dérivée et établit la suite de propositions qui résultent de la seule supposition de l'existence

18.

de la fonction dérivée. Il fait ensuite une digression nécessaire sur les propositions concernant les séries uniformément ou non convergentes, et donne les conditions sous lesquelles on peut affirmer que la série formée en prenant la dérivée des termes d'une série donnée représente la dérivée de la fonction égale à la somme de cette dernière série. Il a ainsi tous les éléments nécessaires pour exposer le principe de la condensation des singularités, principe au moyen duquel, en partant d'une fonction qui présente en un point quelque singularité relative, soit à la continuité, soit à la dérivée ou aux maxima et aux minima, on peut construire les expressions analytiques d'une infinité de fonctions qui, dans un intervalle donné, présentent la même singularité en un nombre infini de points d'une portion quelconque de cet intervalle. L'application de ce principe fournit de nombreux exemples de fonctions continues n'admettant pas de dérivées déterminées en une infinité de points aussi voisins qu'on le veut.

Relativement aux fonctions continues et indépendamment de toute hypothèse sur la possibilité de les représenter analytiquement, M. Dini introduit la considération suivante, dont il tire grand parti. Soit $f(x)$ une telle fonction, continue dans l'intervalle $a, b (a < b)$, le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, lorsqu'on y fait varier h de zéro à $b - x$, est, en excluant la limite inférieure, une fonction continue de h dans cet intervalle, admettant une valeur maximum et une valeur minimum qui, d'ailleurs, peuvent être infinies. Ces deux quantités L_x et l_x sont des fonctions définies de x; en outre, il est clair que, si l'on fait tendre b vers x, les nombres L_x et l_x qui dépendent de b tendront vers des nombres déterminés Λ_x, λ_x, la valeur de x étant supposée elle-même déterminée. Les deux fonctions Λ_x, λ_x constituent une généralisation de la notion de dérivée *à droite* du point x; elles sont égales quand cette dérivée existe. A gauche du même point, on obtiendra de même deux fonctions Λ'_x, λ'_x, qui joueront un rôle analogue. La considération de ces fonctions permet en particulier à l'auteur d'établir un caractère au moyen duquel on peut affirmer, pour une classe importante de fonctions continues, l'existence d'une dérivée à droite et à gauche.

Passant ensuite aux intégrales définies, M. Dini précise nettement le sens de ce mot et donne les conditions pour qu'une fonction $f(x)$ soit apte à l'intégration entre des limites données. Il établit avec rigueur diverses formules permettant d'obtenir des valeurs approchées des intégrales définies; citons, en particulier, la formule de M. Weierstrass, où l'on suppose que la fonction $\varphi(x$ varie dans le même sens quand x croît de α à β,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(\alpha)\int_\alpha^{\alpha+\theta(\beta-\alpha)} f(x)\,dx + \varphi(\beta)\int_{\alpha+\theta(\beta-\alpha)}^\beta f(x)\,dx.$$

Cette proposition de M. Weierstrass est, du reste, extrêmement voisine de celle donnée par M. Bonnet (p. 249 du *Journal de Liouville* et *Mémoire sur la théorie générale des séries*, p. 8. Académie de Bruxelles, *Mémoires couronnés*).

Enfin, pour traiter le cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie, ainsi que le cas où l'une des limites de l'intégrale est infinie, il reprend et développe la notion des intégrales définies singulières de Cauchy, et établit un critérium qui permet de reconnaître si l'intégrale a une valeur finie et déterminée.