BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ELLIOT

Note sur la cyclide

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 238-240

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_238_1>

NOTE SUR LA CYCLIDE;

PAR M. ELLIOT,
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

1. On sait qu'une surface S dont un des systèmes de lignes de courbure est circulaire peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe A. Considérons le cône ayant son sommet au centre d'une des sphères et dirigé par la caractéristique située sur cette sphère. Ce cône est de révolution autour de la tangente menée à la courbe A par son sommet, et ses génératrices, normales à la sphère, le sont aussi à la surface S. Il en résulte qu'on peut considérer cette surface comme la trajectoire orthogonale de cônes droits ayant leurs sommets sur la courbe A et leurs axes tangents à cette courbe.

Comme par un point quelconque de la surface S passe une ligne de courbure du système circulaire, on voit que toutes les normales de S doivent rencontrer la courbe A.

Réciproquement, supposons qu'une surface soit la trajectoire orthogonale de cônes droits ayant leurs sommets sur une courbe A et leurs axes tangents à cette courbe. Un des cônes ne pourra rencontrer la surface que suivant une courbe coupant normalement toutes les génératrices, c'est-à-dire suivant un cercle, et tous ces cercles sont évidemment des lignes de courbure.

Ce qui précède fournit pour la détermination de la surface dont

(1) Article bibliogr. *Ann. di Matematica*, 1re série, t. III, 1860, p. 245; *Archives de Grunert*, t. XXXVII, 1861, *Bericht*, p. 4.

toutes les lignes de courbure sont circulaires un procédé assez simple. Dupin a trouvé d'abord cette surface, qu'il a appelée *cyclide*, comme enveloppe des sphères tangentes à trois sphères données, et M. Mannheim a montré qu'on pouvait la regarder comme la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un tore.

2. La surface cherchée devra avoir pour normales les droites qui rencontrent deux courbes A et B. Les normales passant par un point de A sont les génératrices du cône qui a son sommet en ce point et qui passe par la courbe B; ce cône doit toujours être de révolution. La courbe B, qui se trouve sur une infinité de cônes du second degré, doit se réduire à une conique; il en est de même de A, et ces deux courbes seront l'ensemble d'une ellipse et d'une hyperbole focales. On sait d'ailleurs que le cône ayant son sommet en un point de l'une des courbes et passant par l'autre a pour axe la tangente à la première courbe.

La surface doit avoir pour trace sur le plan de l'hyperbole, par exemple, qui est un plan de symétrie, une courbe coupant normalement toutes les droites issues des sommets de l'ellipse, c'est-à-dire un système de deux cercles ayant pour centres ces sommets. La sphère variable dont la surface cherchée est l'enveloppe touchera donc deux sphères fixes ayant pour grands cercles les cercles dont il vient d'être question. On peut d'ailleurs assujettir la sphère variable à toucher seulement une des sphères fixes; son mouvement sera déterminé, puisque son centre doit décrire l'hyperbole. Le rayon de cette sphère fixe est seul arbitraire; en le faisant varier, on obtiendra des surfaces parallèles entre elles. La sphère variable touchera constamment une infinité de sphères fixes dont les centres peuvent être pris en un point quelconque de l'ellipse. Cela résulte immédiatement de cette propriété connue que la différence des distances d'un point de l'hyperbole à deux points fixes de l'ellipse est constante.

Il est clair que les surfaces ainsi définies couperont à angle droit toutes les droites rencontrant à la fois l'ellipse et l'hyperbole; elles seront donc les trajectoires orthogonales des cônes droits passant par l'ellipse et de ceux qui passent par l'hyperbole, en sorte que les deux systèmes de leurs lignes de courbure seront circulaires.

Le tore s'obtiendra comme cas particulier en supposant que l'ellipse se réduise à un cercle; l'hyperbole focale devient alors l'axe du cercle.

Nous avons supposé les courbes A et B distinctes. Il reste à voir si les sécantes doubles d'une courbe gauche peuvent couper normalement une même surface. Le cône qui est dirigé par la courbe et qui a son sommet en un point quelconque de cette courbe devant être de révolution, il faut que cette courbe soit une cubique gauche; mais, en outre, l'axe du cône doit être la tangente à la courbe menée par le sommet, ce qui est impossible, puisque cette tangente est évidemment une génératrice du cône.

3. En général, les normales d'une surface sont les tangentes doubles de la surface Σ lieu des centres de courbure des sections principales. La condition pour que Σ ait une de ses nappes ou toutes les deux réduites à des lignes conduit aux surfaces admettant un ou deux systèmes de lignes de courbure circulaires.

Il est évident que, dans le cas d'une surface dont l'un des systèmes de lignes de courbure est circulaire, la surface Σ se réduit à la ligne A et à une surface Σ_1 qui est l'enveloppe des cônes dont la surface donnée est la trajectoire orthogonale.

Réciproquement si l'on cherche une surface normale aux droites, qui rencontrent une courbe A et qui touchent une surface Σ_1, cette surface ne pourra couper le cône circonscrit à Σ_1, et ayant son sommet en un point de A, que suivant une ligne située sur une sphère dont le centre est au sommet du cône, car la ligne d'intersection est évidemment une ligne de courbure de la surface dont une des développées se réduit à un point. La surface sera l'enveloppe des sphères.

Enfin, si l'on veut que la surface Σ se réduise à deux lignes, il faudra que la surface donnée soit de deux façons différentes l'enveloppe d'une sphère; elle sera donc une cyclide de Dupin, et les deux lignes seront deux coniques focales.