BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Laplace à d'Alembert

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 217-222
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_217_0>

LAPLACE A D'ALEMBERT.

I.

A Paris, ce samedi 15 novembre 1777.

Monsieur et très illustre Confrère,

Au lieu d'aller demain vous importuner, comme je me l'étois proposé, j'ai cru plus à propos de vous envoyer l'addition dont nous sommes convenus; d'ailleurs je n'aurai plus demain mon Mémoire, puisque je dois le remettre ce soir, à l'Académie, à M. le marquis de Condorcet. Après cette phrase : « C'est donc, à proprement parler, à M. d'Alembert qu'il faut rapporter les premières » recherches exactes qui ayent paru sur cet important sujet; cet » illustre autheur, s'étant proposé, dans son excellent Ouvrage qui » a pour titre *Réflexions sur la cause des vents,* de calculer les effets » de l'action du Soleil et de la Lune sur notre atmosphère, y dé» termine d'une manière synthétique et fort belle les oscillations » d'un fluide de peu de profondeur qui recouvre une planète immo» bile au-dessus de laquelle repose un astre immobile; il cherche » ensuite à déterminer ces oscillations dans le cas où, la planète » étant toujours supposée immobile, l'astre se meut uniformément » sur un parallèle à l'équateur, et il parvient, par une analyse aussi » savante qu'ingénieuse, aux véritables équations de ce problème; » mais la difficulté de les intégrer l'a forcé de recourir à des sup» positions qui en rendent la solution incertaine. On trouvera dans » ces recherches la solution rigoureuse de ce même problème, quels » que soient la densité du fluide et le mouvement de l'astre. »

J'ai ajouté ce qui suit :

« Au reste, je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si » j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à cet égard à ses » excellentes réflexions sur la cause des vents, j'en suis principale» ment redevable à ces réflexions elles-mêmes et aux belles décou» vertes de ce grand géomètre sur la théorie des fluides et sur le Calcul » intégral aux différences partielles dont on voit les premières traces » dans l'Ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les » premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une ma-

» tière aussi compliquée, si l'on fait attention aux progrès immenses » de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas » surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encor, et qu'aidés » par des théories que nous tenons de lui presque tout entierres, » nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il » a le premier ouverte. »

J'espère, mon cher Confrère, que vous serez content de cette addition; je suis très enchanté d'avoir cette occasion de vous témoigner publiquement mon estime et ma reconnoissance. Je vous devois d'ailleurs cette justice à tous égards, puisqu'il est vray de dire que, sans votre travail et sans les belles recherches que vous avez publiées dans votre excellent *Essay sur la résistance des fluides* et que M. Euler a depuis présentées d'une manière fort simple et fort générale dans les *Mémoires* de Berlin et de Pétersbourg, je n'aurois jamais osé entreprendre de traiter la matière qui fait l'objet de mes *Recherches*.

J'ai toujours cultivé les Mathématiques par goût plus tost que par le désir d'une vaine réputation, dont je ne fais aucun cas; mon plus grand amusement est d'étudier la marche des inventeurs et de voir leur génie aux prises avec les obstacles qu'ils ont rencontrés et qu'ils ont sçu franchir; je me mets alors à leur place, et je me demande comment je m'y serois pris pour surmonter ces mêmes obstacles, et, quoique cette substitution n'ait le plus souvent rien que d'humiliant pour mon amour-propre, cependant le plaisir de jouir de leur succès me dédommage amplement de cette petite humiliation. Si je suis assez heureux pour ajouter quelque chose à leurs travaux, j'en attribue tout le mérite à leurs premiers efforts, bien persuadé que dans ma position ils auroient été beaucoup plus loin que moi. Vous voyez par là, mon cher Confrère, que personne ne lit vos Ouvrages avec plus d'attention et ne cherche mieux à en faire son profit que moi; aussi personne n'est plus disposé à vous rendre une justice plus entière, et je vous prie de me regarder comme un de ceux qui vous aiment et qui vous admirent le plus. C'est dans ces sentiments que j'ai l'honneur d'être,

Monsieur et illustre Confrère,

Vostre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.

II.

« Ce dimanche, 10 mars 1782.

MONSIEUR ET ILLUSTRE CONFRÈRE,

Je suis très flatté que mes recherches sur les suites ayent pu fixer quelques momens votre attention; j'aurois bien désiré que vos occupations vous eussent permis de suivre l'analyse que j'y donne du problème des cordes vibrantes au moyen du Calcul intégral aux différences finies partielles, car il me paroît évident par cette analyse que toute figure initiale de la corde dans laquelle deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini peut être admise. Voici en peu de mots à quoi se réduit mon raisonnement.

Si l'on nomme $y_{x,t}$ l'ordonnée d'une corde vibrante dont l'abscisse est x, t désignant le temps, il est clair que la force accélératrice du point de la corde placé à l'extrémité de cette ordonnée sera proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui répondent à $x - dx$, x, $x + dx$, c'est-à-dire proportionnelle à $y_{x-dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x+dx,t}$; de plus, cette force sera, par les principes de Dynamique, proportionnelle à $ddy_{x,t}$, cette différence seconde étant prise en ne faisant varier que le temps t. En la mettant donc, comme cela se peut, sous cette forme $y_{x,t-dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t+dt}$, on aura, pour déterminer le mouvement de la corde, l'équation

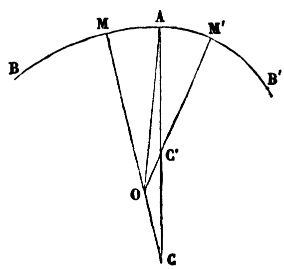
$$y_{x,t+dt} - 2y_{x,t} + y_{x,t-dt} = a^2(y_{x+dx,t} - 2y_{x,t} + y_{x-dx,t}),$$

a^2 étant un coefficient constant. Cette équation convient incontestablement à tous les points de la corde, excepté aux deux extrêmes, dont le premier n'a point d'ordonnée antérieure et le second d'ordonnée postérieure; mais ces deux points sont fixes par les conditions du problème. J'observe cependant que, pour que l'équation précédente subsiste, il est nécessaire que deux côtés contigus ne forment point entre eux un angle fini; car au sommet de cet angle la force accélératrice, qui partout ailleurs est finie, seroit infinie; la vitesse changeroit donc brusquement à ce point, et l'on ne pourroit pas supposer la force accélératrice égale à $\frac{d^2y_{x,t}}{dt^2}$, comme cela est nécessaire pour que l'équation générale du problème des cordes vibrantes puisse avoir lieu.

Maintenant, au lieu d'intégrer l'équation précédente par la considération des infiniment petits, ce qui peut laisser des doutes sur la discontinuité des fonctions arbitraires auxquelles on parvient, je l'intègre comme une équation aux différences finies, et dans laquelle par conséquent dx et dt sont des quantités finies. Il est visible que, rien n'étant négligé dans cette intégration, les résultats que je trouve conviennent également au cas de dx et de dt infiniment petits; et, comme dans le cas général la valeur de $y_{x,t}$ se construit en plaçant alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses le polygone qui représente la valeur de $y_{x,t}$ lorsque $t = o$, on doit en conclure que cette même construction a lieu lorsque dx et dt sont infiniment petits, et qu'ainsi la construction que vous avez donnée dans vostre Mémoire sur les cordes vibrantes relativement aux fonctions analytiques est générale, quelle que soit la figure initiale de la corde, pourvu qu'aucun de ses angles ne soit fini. Il ne me sera pas difficile présentement de répondre à la difficulté que vous me faisiez hier à l'Académie sur la force accélératrice qui a lieu au point de contact de deux courbes qui se touchent. Pour cela je considère deux arcs de cercle BA, B'A qui se touchent au point A et dont les centres sont C et C'. La force accélératrice au point A est en raison inverse du rayon osculateur de ce point, et, comme il appartient également aux deux arcs AB, AB', vous me demandiez lequel des deux rayons CA, C'A on doit choisir pour représenter la force accélératrice du point A. Pour répondre à cette difficulté, j'observerai que, lorsqu'on suppose la force accélératrice inversement proportionnelle au rayon osculateur au point A, cela veut dire que, si l'on prend deux points M et M' infiniment voisins et équidistants de A, et que l'on fasse passer un cercle par ces trois points, la force accélératrice du point A sera en raison inverse du rayon de ce cercle. Cela posé, je dis que cette force ne sera inversement proportionnelle ni à CA ni à C'A, parce qu'aucun de ces deux rayons ne sera celui du cercle qui passe par les trois points M, A, M'; mais, si l'on prolonge M' C' jusqu'à ce qu'il rencontre MC en O, O sera le centre de ce cercle et la force en A sera réciproque au rayon AO; or il est facile de prouver que AO est égal au produit des deux rayons CA et C'A, divisé par la moitié de leur somme. Il n'y a donc point d'ambiguïté relativement à la force accélératrice du point A, qui sera toujours proportionnelle à la différence seconde des trois ordonnées qui passent par les points M, A et M'.

Telles sont, Monsieur, les réflexions que j'ai l'honneur de vous présenter sur une question très délicate que vous avez tant de fois agitée et sur laquelle l'opinion dépend de la manière dont on envisage le problème. Il est naturel de transporter au résultat de la

Fig. 1.



solution la continuité qu'exige la méthode dont on fait usage et qui souvent restreint la généralité de cette solution; aussi je ne suis point surpris que notre illustre ami M. de la Grange, qui a traité ce problème, dans le Tome III des *Mémoires* de Thurin, par la méthode des suites infinies, ait cru la continuité nécessaire entre les différences quelconques des fonctions arbitraires; mais la méthode des différences, dans laquelle on ne néglige rien, est exempte de ces inconvénients. Il m'a toujours semblé que M. Euler a été trop loin en n'assujettissant à aucune condition les fonctions arbitraires; mais je pense que vous avez été trop circonspect en les restreignant aux seules fonctions analytiques. Cette circonspection étoit bien naturelle dans l'inventeur d'un calcul qui offre des résultats aussi vastes et aussi inattendus; mais vous ne devez pas trouver mauvais que l'on vous prouve que votre calcul a plus d'étendue que vous ne lui en aviez soupçonné d'abord. Je vous prie de croire que personne ne sent mieux que moi l'importance et la beauté de cette précieuse découverte et ne vous rend à cet égard une justice plus sincère, à laquelle je suis porté d'ailleurs par le sentiment de la reconnoissance pour vos premières bontés, que je n'oublierai jamais. J'ai l'honneur d'être avec toute l'estime et la considération possibles,

Monsieur et très illustre Confrère,

Vostre très humble et très obéissant serviteur.

LAPLACE.