Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 49-60

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_49_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MAYER (A.). — GESCHICHTE DES PRINCIPS DER KLEINSTEN ACTION (*Akademische Antrittsvorlesung*).

Nous résumons ci-après les intéressants détails donnés par M. Mayer dans son discours sur l'*Histoire du principe de la moindre action*.

Dans sa *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du* XVIII^{e} *siècle*, P. Henrich von Fuss, arrière petit-fils d'Euler, donne deux lettres de Daniel Bernoulli à Euler, où l'on peut voir l'origine des recherches qui ont donné naissance à ce principe. Malheureusement, les réponses d'Euler sont perdues. A la fin du XVII^{e} siècle, Jean Bernoulli avait posé le célèbre problème de la brachistochrone. A partir de ce moment tous les géomètres de cette époque proposèrent ou résolurent des problèmes analogues, où il s'agissait toujours de déterminer une courbe de manière à rendre une intégrale donnée, relative à cette courbe, plus grande ou plus petite que pour les courbes voisines. Daniel Bernoulli avait observé que certaines questions difficiles de Statique pouvaient être ramenées à ce genre de problèmes et qu'on pouvait ainsi les résoudre par une méthode toute différente de celle qui a son point de départ dans les principes ordinaires de la Mécanique. Ce qui arrivait pour l'équilibre ne devait-il pas avoir lieu aussi pour le mouvement? La *Methodus isoperimetrica* ne pouvait-elle pas aussi conduire à déterminer les *Orbitæ circa centra virium?* Dans cet ordre d'idées, il était naturel que Daniel Bernoulli s'adressât à celui qui avait fait faire les plus grands progrès à la théorie des problèmes isopérimétriques, à Euler. Sans doute ce dernier ne trouva pas la réponse facile; deux ans après (12 décembre 1742), Daniel Bernoulli revient à la charge; mais le 23 avril 1743, il félicite Euler de sa découverte, qui doit être rapportée au mois précédent.

Cette découverte, Euler la publia l'année suivante, en automne, dans la seconde addition à son célèbre Ouvrage sur les problèmes isopérimétriques, addition qui porte le titre *De Motu projectorum*.

C'est, dans le cas le plus simple, le principe de la moindre action, sous sa forme exacte et précise.

On sait, depuis Jacobi, que ce principe, dans sa généralité, peut être énoncé sous deux formes équivalentes : l'intégrale

$$\int \sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2},$$

où U est la fonction des forces, prise entre la position initiale et la position finale du système, est plus petite pour les chemins réellement parcourus par les différents points du système que pour tout autre ensemble de trajectoires : cela revient à dire que, pour les trajectoires réellement décrites, l'intégrale

$$\int \Sigma m_i v_i ds_i,$$

prise entre les mêmes limites et d'où l'on a éliminé le temps au moyen de l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U + h,$$

est minimum. Nous n'insistons pas sur ce que l'intégrale ne présente pas nécessairement un véritable minimum. C'est bien sous la première forme qu'Euler, dans le cas d'un seul point mobile, applique ce principe aux exemples qu'il traite, la condition que l'intégrale soit minimum le conduisant à l'équation différentielle du mouvement; mais c'est sous la seconde forme qu'il énonce le principe : c'est l'intégrale

$$\int mv\,ds,$$

qui doit être minimum, lorsque, au moyen de l'équation de la force vive, on l'a ramenée à ne plus dépendre que des quantités qui elles-mêmes ne dépendent que de la trajectoire du point mobile. Euler insiste nettement sur la restriction à son théorème général qu'implique cet emploi nécessaire du principe de la force vive : ce théorème, par exemple, ne s'applique pas au cas d'un mobile qui se meut dans un milieu résistant.

Mais d'où vient ce nom de *principe de la moindre action?*

Le 13 avril de cette même année 1744, à l'automne de laquelle remonte la découverte d'Euler, Maupertuis avait adressé à l'Académie de Paris un Mémoire, relatif aux lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, dans lequel il opposait à cette assertion de Fermat, que la propagation de la lumière s'effectuait dans le moindre temps possible en vertu de ces lois, une autre assertion arbitraire qui les faisait concorder avec la théorie de l'émission : c'était, d'après Maupertuis, la somme des chemins parcourus, respectivement multipliés (et non divisés) par les vitesses de propagation qui devait être minimum. Deux ans après, en 1746, la position qu'il occupait comme président de l'Académie de Berlin était venue accroître son autorité, et Maupertuis étendit son hypothèse à tous les mouvements possibles; elle devint un principe général de l'équilibre et du mouvement : *Lorsque dans la nature*, disait-il, *il se produit un changement quelconque, la quantité d'action employée pour ce changement est la plus petite possible; lorsqu'un système est en équilibre, ses différents points occupent des positions telles que, si on leur communique un petit mouvement, la quantité d'action qui en résulte est la moindre possible.* L'action, c'est le produit de la masse par la vitesse et le chemin parcouru, d'où le nom de *principe de la moindre quantité d'action.* Quant aux preuves que Maupertuis apporte, elles se déduisent des lois du choc de deux corps parfaitement durs et parfaitement élastiques, de la théorie du levier, des lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière. Cela lui suffit. On voit combien vague et obscur est ce principe à moitié métaphysique, comparé au théorème d'Euler, théorème purement mathématique, impliquant des conditions bien définies, susceptible d'une forme précise. Dans les Mémoires de l'Académie de Paris pour 1749 et 1752, le chevalier d'Arcy, auquel on doit le principe de la conservation des aires, montre combien Maupertuis procède arbitrairement dans l'évaluation de ce qu'il nomme la *quantité d'action* nécessaire pour le changement, quantité qui ne se retrouve pas la même dans les différents cas, dans la théorie du choc, ou dans celle de la réflexion de la lumière; dans ce dernier cas en particulier, d'Arcy montre élégamment que la fonction de Maupertuis peut devenir maximum ou minimum, selon le degré de concavité du miroir, degré qui changerait ainsi en prodigalité cette économie dont on fait honneur à la nature. Le principe de l'équilibre, ou plutôt l'application que Maupertuis en fait au levier, est soumise à une critique aussi sévère. Et, en effet, cette application montre que Maupertuis ne se doutait pas du sens précis de ce principe, que l'on peut, ainsi que l'a montré Euler, ramener, au moyen de l'équation des forces vives, à un théorème que Maupertuis lui-même avait découvert sur un cas particulier, et qu'il avait communiqué en 1740 à l'Académie de Paris, comme la loi de l'équilibre, à savoir que, pour la position d'équilibre, la fonction des forces est maximum ou minimum. Il n'y a qu'une ressemblance de forme entre le théorème d'Euler et le principe de Maupertuis, ressemblance qui s'évanouit entièrement quand on réfléchit que l'intégrale d'Euler se rapporte au produit de la masse par la vitesse et l'élément de trajectoire, et n'est identique à l'*action* de Maupertuis que dans le cas du mouvement uniforme; que ce n'est que plus tard que l'intégrale elle-même est devenue la mesure de l'action; qu'Euler regarde le principe des forces vives comme une condition nécessaire; que Maupertuis regarde ce dernier principe comme moins général que le sien; qu'Euler déduit de son théorème les équations différentielles du mouvement, tandis que Maupertuis ne tire de son principe que des équations finies.

Quand donc, dans la Préface de son Mémoire, le président de l'Académie de Berlin indique la découverte d'Euler comme une belle application de son principe, comment s'expliquer le silence de ce dernier, et, qui plus est, l'adhésion qu'il donne aux paroles de Maupertuis, dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1751? Il faut pour cela se reporter à une critique de l'œuvre de Maupertuis qui avait paru en mars 1751, dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, et qui fut l'origine d'une violente discussion.

L'auteur de cette critique était Samuel König; la vie de ce dernier avait été fort agitée : élève de Jean Bernoulli en même temps que Maupertuis, il avait été banni de Berne, sa patrie, pour des raisons politiques; il avait donné des leçons de Mathématiques à la marquise du Châtelet, la célèbre amie de Voltaire, s'était brouillé avec elle et avait fini par trouver en France, comme professeur, une position stable. La chaude recommandation de Daniel Bernoulli l'avait fait nommer membre étranger de l'Académie de Berlin.

Les critiques qu'il adressa à Maupertuis étaient, pour une bonne part, justes et bien fondées; mais, en outre, il s'avisa de joindre à sa dissertation une Lettre de Leibniz à Hermann, dans laquelle Leibniz remarquait que, dans les modifications du mouvement, l'action était généralement maximum ou minimum, et que, entre autres importantes conséquences, on pouvait déduire de là la trajectoire d'un corps attiré par un ou plusieurs centres.

Ainsi on déniait à Maupertuis et à Euler la priorité de leurs découvertes; mais comment Leibniz aurait-il laissé, sans la publier, une proposition aussi importante? L'idée d'un faux se présentait naturellement à l'esprit : au reste, la Lettre de Leibniz est supposée, cela n'est pas douteux; mais la preuve n'était pas facile, car König disait ne posséder que la copie, et celui dont il la tenait avait été, plusieurs années auparavant, décapité à Berne. L'impossibilité de la preuve matérielle n'empêcha point Maupertuis de faire déclarer par l'Académie de Berlin (13 avril 1752) que la Lettre était fausse, que son contenu était nul et non avenu. Voltaire prit le parti de König, le roi celui de Maupertuis; sans doute Frédéric s'amusait des satires de Voltaire, mais il ne voulait pas qu'on couvrît de railleries le président de son Académie; il fit brûler publiquement la *Diatribe du docteur Akakia,* et Voltaire rompit avec lui. Ainsi le cercle de la dispute s'étendait de plus en plus.

Dans ces conditions, une position intermédiaire entre les deux partis était impossible, et il n'est pas étonnant qu'Euler ait fait cause commune avec Maupertuis. Sans doute, d'ailleurs, il y était aussi poussé par sa prédilection bien connue pour les spéculations métaphysiques, prédilection qui perce dans tout ce qu'il écrivit à propos du principe de la moindre action dans cette mémorable dispute, et que Daniel Bernoulli lui reprocha plus d'une fois.

Sans doute Euler reste plus précis que Maupertuis; c'est toujours de l'intégrale qu'il s'agit, et il n'est pas question des cas où l'équation des forces vives n'est pas supposée; mais il ne parle plus de la nécessité de se servir de cette équation pour transformer l'intégrale de manière qu'il n'y entre plus que les quantités qui dépendent de la trajectoire : le théorème d'Euler ressemble ainsi davantage au principe de Maupertuis, par l'omission d'une condition qui, toutefois, est nécessaire pour que ce principe ait quelque sens; car c'est en vertu de cette condition même que les forces agissantes entrent dans l'expression de l'action.

Il est intéressant de voir comment, au contraire, Daniel Bernoulli saisissait nettement le sens et la valeur de la découverte d'Euler (Lettre du 25 décembre 1743). Il ne s'agit pas pour lui de propriétés que l'on puisse déduire de principes *a priori,* mais qui se présentent à notre raison comme un résultat du calcul, avec un caractère en quelque sorte accidentel.

Arrivons maintenant à Lagrange, qui, dès l'âge de vingt-trois ans, trouvait les véritables fondements du calcul des variations et le débarrassait de toute considération géométrique : son attention dut de bonne heure être attirée par le théorème d'Euler, dont la valeur ne pouvait échapper à son génie, que ne troublait aucune tendance métaphysique. Dans les *Mélanges de l'Académie de Turin* (1760-1761), non-seulement il étendit ce qu'il nomme le *Principe de la moindre action* à tous les mouvements de points attirés vers des centres fixes, mais il en déduisit les importantes conséquences qu'il devait, plus tard, établir autrement dans la Mécanique analytique.

Mais telle est l'obscurité qui, depuis Maupertuis, se trouvait répandue sur la matière, que nous ne savons guère ce que Lagrange entendait par le principe général de la moindre action, que ce principe dont il a tiré de si admirables conséquences et qu'il a laissé ensuite de côté, comme s'il avait eu conscience de son obscurité, paraît être tout différent de celui d'Euler et de Jacobi. Tel qu'il l'énonce, le principe de Lagrange n'a point de sens; car cette condition nécessaire, que le temps doit être éliminé au moyen de l'équation des forces vives, n'est pas exprimée. Déjà, dans la 3e édition de la *Mécanique analytique,* M. Joseph Bertrand remarquait l'inexactitude de la démonstration donnée par Lagrange du principe de la moindre action, et, d'après cette démonstration, proposait de substituer à ce principe le suivant : « L'intégrale de la force vive prise entre deux époques déterminées est plus petite pour le mouvement réel du système que pour les autres mouvements que le système prendrait, après l'introduction de nouvelles liaisons, entre la même position initiale et la même position finale, l'équation des forces vives n'étant pas changée » (*Mécanique analytique,* 3e édit., t. I, p. 277). Mais, lors même que Lagrange regarderait ainsi l'équation des forces vives comme une équation de condition imposée à tous les mouvements auxquels il compare le mouvement vrai, son raisonnement n'en serait point complétement faux. Si l'on ne veut point imputer à Lagrange une faute aussi grossière, il faut, d'après M. Mayer, admettre que, loin de regarder l'équation des forces vives comme une telle condition, il s'en est servi pour ramener l'intégrale qui représente l'action à l'intégrale, prise par rapport au temps de la force vive augmentée de la fonction des forces. Alors sa démonstration deviendrait exacte et claire, et le principe qu'il démontre ne serait autre que le principe énoncé pour la première fois par Hamilton en 1835.

GYLDÉN (Hugo). — Framställning af Astronomin i dess historiska utveckling och på dess nuvarande ståndpunkt. — Stockholm, 1874. — 1 vol. in-8°.

GYLDÉN (Hugo). — Die Grundlehren der Astronomie nach ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. — Deutsche, vom Verfasser besorgte und erweiterte Ausgabe. — Leipzig, Engelmann, 1877. — 1 vol. in-8°, 408 p.

Les Traités élémentaires d'Astronomie en usage dans nos établissements d'instruction secondaire, les cosmographies, suivant un titre que l'usage français a fait prévaloir, présentent cette science comme créée d'un seul jet avec toute la perfection de nos connaissances actuelles. Dans les livres auxquels nous faisons allusion, on ne rencontre aucune trace ni des erreurs qui ont longtemps eu cours, ni des progrès successifs que les efforts des philosophes et des observateurs ont fait faire à l'Astronomie, pour arriver, par l'étude incessante des phénomènes célestes et des calculs laborieux, à la simplicité de notre conception moderne des divers mouvements des corps du système solaire. Dans nombre d'entre eux, on ne trouve même ni la date du système de Copernic, ni celle de la découverte des lois de Kepler. A ce dédain des faits historiques, il n'y a guère qu'une exception, celle qui se rapporte à l'anecdote de Newton et de la pomme.

Il semble cependant que nous ne devrions pas être aussi indifférents à toute notion d'histoire, et que la description du système du monde gagnerait quelque intérêt, deviendrait plus vivante, si elle était tentée en suivant pas à pas les progrès que la sagacité des physiciens et le génie des géomètres ont successivement fait faire aux instruments et aux méthodes de calcul. L'Astronomie est, en effet, on l'oublie trop souvent, une science expérimentale et une science de raisonnement; elle ne serait point parvenue à la haute perfection où elle est arrivée aujourd'hui, si nos observatoires ne renfermaient encore que des gnomons et des armilles.

C'est ainsi que, malgré toute leur sagacité, les astronomes grecs réduits à ne déterminer, et encore grossièrement, que la direction apparente des planètes, ont dû n'admettre que des mouvements circulaires, et croire, pendant longtemps, que la Terre était le centre du monde. On sait les résistances que rencontrèrent Copernic, Kepler et Galilée pour faire admettre que la Terre et les planètes tournaient autour du Soleil. Cependant, l'hypothèse des excentriques ou des épicycles n'aurait pas résisté une année à la mesure micrométrique la plus grossière du diamètre apparent de ces corps.

Exposer les phénomènes astronomiques les plus simples, ceux dont l'explication n'exige qu'un petit nombre de calculs élémentaires, en suivant l'ordre historique, tel est le but que s'est proposé M. H. Gyldén, astronome de l'Académie des Sciences de Stockholm, dans le volume que nous analysons aujourd'hui. Le succès de l'auteur a été complet, et peu d'Astronomies sont d'une lecture plus attachante et plus facile.

Les *Grundlehren der Astronomie* sont divisés en quatre Chapitres principaux : l'Astronomie avant la découverte de l'attraction universelle, la loi de Newton, les instruments des observations modernes, les études de la nouvelle Astronomie.

Le premier Chapitre débute par une intéressante description des instruments de l'Astronomie primitive, le gnomon, l'astrolabe, l'armille, à la suite de laquelle M. Gyldén s'applique à mettre en lumière la somme de connaissances que les Chinois, les Chaldéens et puis les Grecs ont pu tirer de procédés d'observation aussi élémentaires, et rendus plus imparfaits encore par la grossièreté des appareils (horloges à eau et à sable) employés à mesurer et surtout à subdiviser les heures de la nuit.

Leurs efforts ont d'abord eu pour but de déterminer les lois du mouvement diurne des étoiles : l'armille n'a pas tardé à leur faire reconnaître que ce mouvement s'effectuait comme si ces astres étaient fixés à une sphère tournant uniformément de l'est à l'ouest, autour d'un axe incliné à l'horizon. Le même instrument leur montra ensuite que le Soleil semblait parcourir, au milieu des fixes, un grand cercle incliné sur l'équateur, et le gnomon leur donna la mesure de cette inclinaison, la date et la position des équinoxes et des solstices, ainsi que la longueur de l'année, longueur que la considération des levers héliaques de Sirius aurait, d'ailleurs, suffi à déterminer par les observations les plus élémentaires. Par un prodige de sagacité, Hipparque parvint même à découvrir la précession des équinoxes.

Pour la Lune et les planètes, dont le mouvement apparent est plus complexe, les Chaldéens et les Grecs se bornèrent d'abord à fixer la période de leurs mouvements; et l'on doit reconnaître qu'ils avaient fait, sur ce sujet, des observations longues et soignées, observations dont l'exactitude est amplement démontrée par la découverte de la périodicité des éclipses, et la détermination de la durée de la révolution des nœuds de la Lune.

Plus tard, les Égyptiens et les Grecs ayant étudié de plus près les stations et les rétrogradations des planètes, ainsi que l'inégalité des mouvements angulaires apparents du Soleil, tous les efforts d'Hipparque, d'Aristote et de ses disciples se portèrent vers la solution d'un problème qui se posait ainsi : expliquer, par un système de mouvements circulaires uniformes, les inégalités des mouvements du Soleil, de la Lune et des planètes. C'est là le but du système des cercles excentriques et du système des épycicles, tel qu'il a été formulé par Ptolémée dans l'Almageste. M. Gyldén cherche quelle doit être, dans ces diverses hypothèses, la loi des variations des longitudes géocentriques, et il montre, par quelques calculs simples, qu'elle ne peut satisfaire à la réalité des choses.

La dernière partie de ce premier Chapitre est consacrée à l'étude de l'Astronomie des Arabes; l'auteur montre que ces derniers, Albategnius, Ebn-Younis, Aboul Wefâ, n'ont rien innové, et qu'ils se sont bornés, suivant pas à pas l'exemple de Ptolémée, à ajouter au système du monde un épicycle nouveau chaque fois que la perfection croissante des observations montrait une différence sensible entre les positions théoriques d'un astre et les positions réelles. Les Tables alphonsines, publiées en 1252, sont la dernière expression de ce système.

Pendant les trois cents ans qui suivent, l'Astronomie ne fait aucun progrès : Peurbach et Regiomontanus sont les seuls qui observent encore, sans se préoccuper exclusivement d'Astrologie.

On était, cependant, à la veille d'une révolution complète, que les Tables alphonsines elles-mêmes auraient pu indiquer. Elles donnaient, en effet, aux moyens mouvements du centre, des épicycles de Mercure et de Vénus une grandeur précisément égale à celle du moyen mouvement du centre de l'épicycle solaire. En remarquant alors, dit M. Gyldén, que ces deux planètes ne s'éloignent jamais beaucoup du Soleil, on pouvait arriver à supposer, comme quelques anciens l'ont peut-être fait ([1]), qu'elles tournaient autour du Soleil; de là à l'hypothèse que le Soleil était le centre du monde et que toutes les planètes tournaient autour de lui, il n'y avait qu'un pas. Que Copernic ait pu puiser cette idée dans les leçons qu'il entendit à Bologne, ou qu'il l'ait trouvée dans quelque auteur plus ancien, cela est de mince importance; ce qui lui appartient incontestablement, c'est d'avoir donné, en 1543, dans son *De revolutionibus orbium cœlestium,* la preuve mathématique que l'on pouvait rendre compte des apparences du mouvement des planètes, en supposant qu'elles tournaient toutes autour du Soleil, et que, de plus, la Terre tournait sur elle-même.

Comment Kepler, profitant des observations de Copernic, de Tycho Brahe et de celles qu'il avait faites lui-même, a pu arriver à formuler, en 1609, les lois qui portent son nom, c'est ce que M. Gyldén montre ensuite par une série de démonstrations élémentaires des plus ingénieuses, dont l'ensemble forme une étude complète du mouvement elliptique des planètes.

Le Chapitre II traite, nous l'avons déjà dit, de la loi de l'attraction universelle. Après avoir rapidement analysé les travaux mécaniques de Galilée sur le pendule, la chute des corps et le mouvement des projectiles, M. Gyldén consacre une quinzaine de pages au développement des notions de Mécanique sur la composition des forces et des vitesses, sur la force centrifuge ou centripète dans les mouvements curvilignes, qui lui sont indispensables pour l'interprétation des lois de Kepler et l'exposé de la loi de l'attraction dans le mouvement elliptique des planètes. Passant alors à la gravitation universelle, l'auteur démontre successivement que la force avec laquelle le Soleil attire les planètes est inversement proportionnelle au carré des distances, que la pesanteur est un cas particulier de cette attraction, et, enfin, que l'attraction

---

([1]) Cette question a été discutée avec un soin particulier par M. Schiaparelli, « *I precursori di Copernico nell' antichità,* » dans le n° III des *Publications de l'Observatoire de Milan* (1873).

newtonienne est la loi générale de l'action mutuelle des corps planétaires. La conséquence nécessaire de cet examen est l'explication des marées.

La loi de Newton a, d'ailleurs, d'autres conséquences non moins importantes pour la théorie des mouvements planétaires. Un volume entier serait nécessaire pour les établir toutes, et M. Gyldén s'est proposé d'écrire un ouvrage élémentaire; aussi n'examine-t-il qu'un seul de ces problèmes, celui qui est relatif à l'action mutuelle des trois corps planétaires. Sans entrer dans le détail du calcul des perturbations, l'auteur indique cependant la nature exacte du problème, les diverses méthodes qui peuvent conduire à sa solution, et il développe les calculs de manière à obtenir les premiers termes des formules complètes. Comme conséquence, il établit alors que les grands axes des orbites planétaires et les moyens mouvements des planètes ne sont sujets à aucune perturbation séculaire; qu'il y a dans les inclinaisons une variation d'une période très-longue, en quelque sorte séculaire; que les longitudes des périhélies et celles des nœuds sont assujetties à une variation séculaire.

Les calculs qui conduisent à ces conséquences importantes, au point de vue de la stabilité de notre système, ont été exposés par M. Gyldén avec le plus grand soin et une clarté qui ne laisse rien à désirer; ils pourraient être facilement développés devant des candidats à la licence mathématique, et l'ouvrage de l'astronome suédois est ainsi de nature à rendre les plus grands services à notre enseignement des Facultés.

Le troisième Chapitre des *Grundlehren der Astronomie* est consacré à l'étude des procédés modernes d'observations. Après avoir défini les divers systèmes de coordonnées, planes ou sphériques, qui peuvent être employés pour déterminer la position d'un astre, et montré leurs relations géométriques ou trigonométriques, M. Gyldén donne, en quelques lignes, les formules de parallaxe qui permettront de réduire au centre de la Terre les observations faites à sa surface.

Le second paragraphe de ce même Chapitre traite ensuite de la lunette méridienne, du cercle mural, de l'équatorial et des corrections que demandent les observations faites à ces divers instruments. Ni la description, ni la théorie de ces appareils ne sont assez complètes pour être utiles à des astronomes de profession qui auraient à faire des observations réelles; mais elles renferment tout ce qui est indispensable à des étudiants : c'est, d'ailleurs, à cette catégorie de lecteurs que s'adresse le volume que nous avons sous les yeux.

Le Chapitre III se termine, enfin, par quelques pages relatives aux changements périodiques que la vitesse de la lumière, combinée avec le mouvement de la Terre, produit dans la position apparente des étoiles.

Le Chapitre IV, entièrement consacré aux recherches astronomiques modernes, résume, d'une manière rapide, l'état de nos connaissances sur les distances absolues des corps de notre système solaire, sur la distance de ce système aux étoiles, et, enfin, sur le mouvement des groupes stellaires, doubles ou multiples; quelques considérations sur le mouvement propre des étoiles, leur éclat et leur distribution dans l'espace le terminent.

Tel est le résumé, un peu bref peut-être, de l'Ouvrage de M. H. Gyldén; il suffira, je l'espère, à caractériser le plan de l'auteur, et à montrer combien est rationnelle la méthode qu'il a employée. Mais il est une chose qu'une analyse est dans l'impossibilité de faire apprécier : c'est le charme de l'exposition et la rigueur de l'enchaînement des démonstrations; à ce double point de vue, les *Grundlehren der Astronomie* méritent une place d'honneur dans la bibliothèque des professeurs d'Astronomie. G. R.