BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 393-433

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_393_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUSSINESQ (J.). — CONCILIATION DU VÉRITABLE DÉTERMINISME MÉCANIQUE AVEC L'EXISTENCE DE LA VIE ET DE LA LIBERTÉ MORALE, précédé d'un rapport de M. PAUL JANET à l'Académie des Sciences morales et politiques, extrait des Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille, année 1878, t. VI, 4e série.

Sans savoir bien précisément ce qu'était Buridan, tout le monde connaît l'anecdote hypothétique de son âne. Cette vieille histoire, inventée par les maîtres en philosophie pour exercer à la dispute et au sophisme les débutants dans l'art de Lulle, semble avoir inspiré récemment l'auteur d'un Mémoire qui, par l'inutile étalage de formules très-savantes, pourrait écarter ou éblouir un lecteur peu versé dans les études mathématiques. Au lieu de supposer une volonté neutralisée et contrainte à abdiquer entre deux désirs rigoureusement égaux, cet auteur considère un système matériel tellement défini, qu'entre deux routes différentes, les lois de la Mécanique, qui les permettent toutes deux, ne lui en imposent aucune; il faut bien cependant qu'un choix se fasse, et ce système inerte doit impérieusement prendre une décision. Qui pourrait la dicter quand les équations restent muettes? L'intervention d'une volonté libre est donc nécessaire, elle seule peut sauver la difficulté, et, sans demander d'autres preuves, l'auteur admet son existence. Buridan, par la combinaison ingénieuse des conditions dans lesquelles il place son âne, croit pouvoir supprimer chez lui la liberté. M. Boussinesq, au contraire, conçoit savamment un système matériel et inerte qui se trouverait tout à coup doué de volonté et capable de choisir entre deux mouvements possibles, par la seule raison que les équations sont indéterminées et qu'il est indispensable de suppléer à leur insuffisance.

Je veux ici dégager le principe proposé de l'appareil algébrique qui l'enveloppe et le cache sans y rien changer. On prête trop aisément aux produits des équations une rigueur et une précision absolues; l'Analyse mathématique cependant, comme le disait Poinsot, et lors même qu'elle est nécessaire, ne peut donner que ce qu'on y a mis, et la certitude des équations est simplement celle des principes qu'elles traduisent.

Les théories dynamiques présentent deux classes de problèmes très-inégalement difficiles. On peut se donner le mouvement d'un système et calculer les forces, ou définir les forces et chercher le mouvement. Les problèmes de la première classe sont résolus par des formules élémentaires et classiques; ceux de la seconde, au contraire, mettent en jeu l'habileté du géomètre, et leur solution, quand on peut l'obtenir, est souvent difficile et compliquée.

La remarque dont M. Boussinesq croit pouvoir tirer des conséquences relatives à l'existence de la vie et à la liberté morale consiste en ce que la seconde classe de problèmes présente quelquefois, pour des circonstances exactement définies, plusieurs solutions distinctes.

Commençons par exposer, sur les exemples mêmes choisis par l'auteur, mais en écartant les formules inutiles, ce paradoxe depuis longtemps connu :

Supposons un point matériel placé, sous l'influence de forces données, dans une position d'équilibre instable. Il sera, si l'on veut, sollicité par la pesanteur et posé sans vitesse au sommet d'une courbe infiniment polie, ou attiré vers deux centres fixes et situé, sur la ligne qui les joint, dans la position précise pour laquelle les deux attractions égales et contraires se détruisent mutuellement.

Un tel point, d'après les lois incontestées de la Statique, demeurera en équilibre; mais une force, si petite qu'on veuille la supposer, procurera un mouvement qui ne cessera plus, et, si l'on cherche par le calcul la plus petite force capable d'un tel effet, on trouvera qu'elle est rigoureusement nulle. Comme il semble évident qu'un point matériel, sans que rien soit changé pour lui, peut indifféremment être ou n'être pas sollicité par une force nulle, il peut, indifféremment aussi, sans que les conditions du problème soient changées, rester en place indéfiniment ou partir, à telle époque que l'on voudra, pour suivre une route connue suivant une loi déterminée.

On peut compliquer ce paradoxe, sans y rien changer d'essentiel, en supposant le point placé dans des conditions aisées à préciser et telles que, sous l'influence de forces désignées, il parvienne sans vitesse à la position d'équilibre instable. Arrivé là, il pourra satisfaire aux lois du mouvement, soit en restant en place indéfiniment, soit en poursuivant sa route avec une vitesse initiale nulle, soit enfin en faisant, dans la position d'équilibre, une station aussi longue ou aussi courte qu'on le voudra, avant de reprendre son mouvement pour le continuer indéfiniment; la théorie exprime par les mêmes formules les forces nécessaires à la réalisation de l'une ou de l'autre hypothèse.

En étudiant les effets des forces nommées par Newton *centripètes*, c'est-à-dire dirigées vers un centre fixe et variant suivant une loi donnée en fonction de la distance, on a remarqué depuis longtemps la possibilité d'étudier la loi des distances du point mobile au centre en laissant de côté, pour la déterminer par un calcul distinct, la rotation du rayon vecteur. La recherche de la distance se confond alors avec celle d'un mouvement rectiligne, et, d'après les remarques précédentes, on peut préparer l'énoncé de telle sorte que ce mouvement fictif conduise à une position d'équilibre instable. Le point pourra donc, sans cesser d'obéir aux formules, s'arrêter en cette position, y rester pendant un temps arbitraire, et repartir ensuite pour continuer les oscillations. Le point réel dont il sert à étudier le mouvement pourra, par conséquent, tout en respectant aussi les formules, se mouvoir sur un cercle qui correspond au cas où la distance au centre reste constante, et quitter ce cercle à un instant quelconque pour suivre une courbe très-différente, qui lui est osculatrice au point de départ. La force nécessaire pour substituer un de ces mouvements à l'autre est égale à zéro, et le temps de son action est nul. Les formules, tout au moins, le disent formellement. Tels sont les exemples allégués par M. Boussinesq; ils prouvent, ce qui est depuis longtemps connu, que les équations différentielles du mouvement peuvent avoir, dans des conditions précises et déterminées, deux solutions différentes.

Qu'en a-t-on conclu jusqu'ici? Rien de bien grave assurément. La Mécanique n'en semble nullement troublée, et la Science de l'âme n'en a tiré aucun profit. Deux corps identiques, placés dans des conditions identiques, n'en prennent pas moins, sans hésiter jamais, des mouvements complétement identiques, et le mystère de l'âme immatérielle reste impénétrable. Mais, dira-t-on, si les équations permettent deux routes distinctes, comment le point choisira-t-il? Un tel choix peut embarrasser l'écolier qui, après avoir appris la règle, reçoit la tâche de l'appliquer; mais l'existence des deux solutions montre et démontre à son maître que les formules sont dans ce cas insuffisantes et incomplètes, et qu'il faut se garder de les substituer à la nature sans y admettre aucune distinction. Quoique la Mécanique soit, entre les Sciences physiques, la plus approchante de la vérité, elle n'y atteint pas en toute rigueur. Puisque les lois exprimées par les équations permettent deux routes différentes, lorsque les lois physiques n'en peuvent réaliser qu'une, elles en sont, de nécessité, distinctes. La plus petite altération des formules peut, aussi bien que la plus petite force, faire disparaître l'ambiguïté.

Or il n'est ni démontré, ni démontrable, ni vraisemblable, ni possible, ni vrai par conséquent, que les équations de la Dynamique aient objectivement la rigueur absolue des théorèmes d'Euclide. L'édifice ne peut être plus solide et plus ferme que les fondements, et tout esprit rigoureux et sévère, s'il veut suivre par ordre la démonstration des principes, ne manquera pas d'y apercevoir plus d'une abstraction irréalisable dans la rigueur mathématique. On suppose, par exemple, la continuité dans la variation d'une force, en admettant qu'elle ne conserve, pendant un temps si court qu'il soit, ni la même intensité ni la même direction. Il n'en peut être ainsi : toute tentative pour imaginer le mécanisme des actions exercées conduit à supposer des impulsions successives et discontinues dont la durée ne saurait être nulle. Qu'elle soit celle de la vibration d'une molécule d'éther ou, si l'on veut, mille milliards de fois plus petite encore, les lois admises seront altérées, sans devenir fausses ou incertaines, précisément comme on altérerait un cercle en lui substituant un polygone régulier de cent millions de côtés. Les solutions multiples disparaissent alors ; avec elles s'évanouissent la nécessité d'un choix librement exercé par une molécule indécise, et la pensée qu'il puisse exister du contingent dans les effets sans qu'il sans rencontre dans les causes.

Des difficultés analogues ont été signalées déjà dans l'étude des corps solides et très-aisément expliquées. Quand une table rigide et pesante repose par plus de trois pieds sur un sol parfaitement dur, l'effort supporté par chaque pied est indéterminé. Le calcul l'affirme, mais ni les physiciens ni les géomètres ne l'ont cru un instant ; ils se sont bien gardés surtout de supposer à chaque pied la faculté de choisir, en lui prêtant une volonté devenue indispensable. Personne, malgré l'exemple récemment donné, n'y songera à l'avenir. On sait depuis longtemps qu'il n'existe pas de corps durs et que cette fausse supposition produit toute l'indétermination.

M. Boussinesq, intrépidement confiant dans les formules, pense que la matière inerte resterait embarrassée comme elles quand les équations différentielles refusent de prononcer; rien ne pouvant alors contraindre le point matériel, il devient libre, et, pour déterminer son choix, une volonté est nécessaire : il n'en faut pas davantage pour la faire naître et pour classer la molécule inerte parmi les êtres vivants.

M. Janet, dans son Rapport, regrette que son incompétence dans les Sciences mathématiques ne lui permette pas de suivre le développement du principe dans les démonstrations qu'en donne l'auteur. Notre savant confrère n'a rien à regretter; les formules de M. Boussinesq ne démontrent rien au delà des explications précédentes. Après avoir rencontré, dans le cas d'un point isolé, la difficulté que j'ai signalée, l'auteur, sans le rendre certain par aucune preuve ni vraisemblable par aucune explication, sans indiquer comment et par quelle voie on pourrait les rencontrer, conclut *qu'il se pourrait* que des systèmes existassent où les difficultés, au lieu de se produire une fois, se renouvellent incessamment, en laissant un nombre immense de fois un nombre immense de voies possibles; et aussitôt, par une assimilation téméraire, sans approfondir ni esquisser les différences essentielles entre une telle machine et un corps organisé, il fait de cette indétermination le caractère nécessaire des êtres vivants, la condition d'existence d'une volonté libre et la définition suffisante de la vie.

L'étude des équations introduites dans le Mémoire n'aurait donc rien appris au savant rapporteur. Mais cela importe peu, car, au cas même ou la partie mathématique, au lieu de s'arrêter au seuil du problème, aurait été traitée avec un plein succès, et où l'auteur prouverait qu'il a deviné juste en admettant l'existence des systèmes mécaniques dont, sans chercher la connaissance pleine et distincte, il imagine les propriétés singulières, la thèse philosophique n'aurait rien à y gagner. La difficulté devant laquelle les philosophes s'inclinent et reculent, sans entrevoir de solution plausible, est l'action de l'âme sur le corps. Par quel miracle perpétuel, en effet, l'âme immatérielle et distincte du corps peut-elle produire ou troubler le mouvement de la matière et faire naître une force physique? Quand les formules de la Mécanique assignent *zéro* pour valeur numérique de cette force, s'il fallait en conclure qu'elle est un pur rien et que, n'ayant aucun rôle à jouer, elle peut disparaître sans que rien soit changé, l'âme n'ayant plus à agir sur le corps, la difficulté, sans être résolue, serait supprimée. Il n'en est pas ainsi : un effet reste nécessaire, et le point, sans lui, ne suivrait pas la route qu'avec lui il suit réellement. C'est donc bien une force qui doit naître dans la propre et étroite signification du mot; c'est une force seulement dont l'existence, d'après les saines notions de Mécanique, serait contradictoire : cela ne diminue en rien la difficulté. L'auteur lui-même abandonne d'ailleurs la distinction entre la force nulle et la force mesurable au dynamomètre, quand « le bon sens » le porte à penser (p. 107) « que la nature ne distingue pas des circonstances dont il a parlé celles qui n'en diffèrent qu'au point de vue abstrait, c'est-à-dire suffisamment peu *analytiquement,* pour pouvoir être qualifiées de physiquement pareilles, ou pour que l'application de forces supplémentaires *fictives,* extrêmement petites pour le géomètre, mais en réalité dépourvues de toute valeur objective, y rendît les bifurcations possibles *mathématiquement* ». En termes plus simples, la force nulle peut être remplacée par une force extrêmement petite sans rien changer aux conclusions; or la difficulté philosophique est aussi grande pour la cent millième partie d'un cent millionième de milligramme que pour une force d'un kilogramme.

Non-seulement l'auteur, en supposant chez les êtres vivants des conditions mécaniques que rien ne démontre et ne rend plausibles, propose pour les forces vitales l'explication que l'on vient d'indiquer, mais, allant beaucoup plus loin encore, il place dans l'existence des solutions multiples des équations du mouvement la condition suffisante de la vie et l'origine d'un principe directeur capable de volonté et de choix.

Il n'y a pas ici de malentendu; l'auteur reproduit son assertion avec trop d'insistance pour que le doute soit possible. « Un être animé », dit-il (p. 40), « serait, par conséquent, celui dont les équations du mouvement admettraient des intégrales singulières provoquant, à des intervalles très-rapprochés ou même d'une manière continue par l'indétermination qu'elles feraient naître, l'intervention d'un *principe directeur* spécial....................

» Le jeu habituellement trop étroit des lois du mouvement l'empêcherait (ce principe directeur) de se manifester dans d'autres cas, c'est-à-dire dans les corps privés de vie. »

Cela est très-clair : c'est le jeu *habituellement* trop étroit des lois du mouvement qui empêche le principe directeur d'intervenir chez les corps privés de vie. Il ne manquerait pas de prendre naissance dans les cas exceptionnels où le jeu de ces forces remplirait les conditions déclarées possibles, mais *habituellement* irréalisées.

Nous lisons, en effet, page 113 : « La définition que je donne de la vie présente l'avantage de rattacher ce mode supérieur d'existence à des conditions géométriques précises. De plus, elle dégage ou met en relief l'élément essentiel de l'opinion commune que s'en forment les hommes, et qui consiste dans l'idée d'un principe d'action non évaluable à la manière des forces mécaniques. Et elle ne me paraît pas en désaccord avec les notions qu'en proposent les naturalistes, les philosophes et les théologiens, qui tous admettent que la vie jaillit inévitablement, que *l'âme n'est jamais refusée* quand se réalisent certaines conditions matérielles très-déterminées. »

L'auteur d'une telle déclaration, ayant longuement défini les conditions toutes géométriques et mécaniques dont il parle, devrait en conclure la possibilité de la génération spontanée. Il estime cependant qu'on n'a *probablement* pas à craindre d'ouvrir la porte à une telle doctrine, parce que les circonstances d'état initial compatibles « avec l'existence de solutions singulières paraissent assez spéciales pour n'avoir qu'une probabilité pratiquement nulle de se produire fortuitement. Elles sont peut-être », dit-il, « aussi impossibles à réaliser d'une manière artificielle, sinon plus, qu'il est de faire tenir sans appui un cône sur la pointe ».

Il serait superflu de multiplier les citations. L'auteur croit avoir démontré que, dans les conditions initiales où les équations du mouvement d'un système présentent des solutions multiples, l'âme, qui n'est jamais refusée quand se réalisent certaines conditions, ne manquerait pas pour diriger la machine. La probabilité d'une telle rencontre est, il est vrai, à ses yeux *pratiquement* nulle, mais il la croit métaphysiquement possible, et cela seul nous intéresse.

Expliquera qui pourra comment l'auteur, parlant toujours de la même force directrice et des mêmes conditions, a pu écrire (p. 41) :

« Je n'ai pas besoin de faire observer que l'existence de ces conditions n'aurait nullement pour effet de dicter à la volonté son choix. Leur réalisation la mettrait, au contraire, en pleine possession d'elle-même, en état de s'abstenir ou d'agir à sa guise. »

Agir à sa guise, c'est bien la thèse que j'ai voulu faire connaître; mais s'abstenir! nullement, cela ne se peut. Imaginez, en effet, le point placé dans les conditions indiquées; il approche de la position critique, deux routes sont possibles, les équations différentielles ne prescrivent rien, la puissance directrice s'abstient, le temps presse cependant : que va-t-il arriver? J. B.

АЛЕКСѢЕВЪ (Н.). — Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. Выпускъ I-й. — Москва, 1878 (1).

(Analyse faite par l'auteur.)

L'Ouvrage que je viens de publier sous ce titre forme la suite du *Calcul intégral,* dont le premier volume a paru en 1873. Le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2) a fait une exposition détaillée du contenu de ce premier volume, en approuvant l'entreprise et en faisant des vœux pour sa continuation.

Le présent volume contient la théorie de l'intégration des équations différentielles ordinaires; il est divisé en onze Chapitres :

Chapitre I (p. 1). — Définition des équations différentielles, de l'intégrale générale et particulière; le nombre d'intégrales premières d'une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre. Existence de l'intégrale d'une équation différentielle.

Chapitre II (p. 25). — Intégration des équations différentielles

(1) N. Alexéief, *Intégration des équations différentielles,* 1re livraison; 1 vol. grand in-8°, VI-312 pages. Moscou, 1878.

(2) Voir *Bulletin*, t. X, p. 168.

du premier ordre et du premier degré. Séparation des variables dans une équation différentielle. Intégration des équations homogènes; intégration d'une équation linéaire. Intégration des équations différentielles exactes.

Chapitre III (p. 42).— Intégration des équations différentielles du premier degré et du premier ordre au moyen d'un facteur.

Dans ce Chapitre (p. 60, § 33), je trouve les conditions nécessaires pour que le premier membre de l'équation

$$M\,dx + N\,dy = 0,$$

divisé par

$$\lambda = M^2 \frac{dN}{dy} - MN\left(\frac{dN}{dx} + \frac{dM}{dy}\right) + N^2 \frac{dM}{dx},$$

soit une différentielle exacte. Ces conditions sont

$$\frac{d^2N}{dy^2} = 0, \quad 2\frac{d^2N}{dx\,dy} + \frac{d^2M}{dy^2} = 0, \quad 2\frac{d^2M}{dx\,dy} + \frac{d^2N}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2M}{dx^2} = 0.$$

On voit que l'expression du diviseur est admissible lorsque M et N sont des fonctions linéaires de x et de y, et que la même forme du diviseur peut être employée pour l'équation de Jacobi. Cette remarque donne le moyen d'intégrer l'équation de Jacobi en formant le diviseur d'après les coefficients donnés.

Chapitre IV (p. 71). — Intégration des équations implicites du premier ordre.

En différentiant l'équation du premier ordre, qui n'est pas du premier degré et qui peut être mise sous la forme $y = f(x, y')$, on a une équation de premier degré par rapport aux variables x et y' :

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx}.$$

Le facteur λ qui la rend intégrable, est défini par l'équation

$$-\lambda = \frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dx} - \left(\frac{df}{dx} - y'\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

Si l'on suppose que ce facteur soit fonction de x seul, on a

$$-\lambda = \frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dx}.$$

La condition nécessaire pour que cela ait lieu est que f soit fonction linéaire de y'. Donc les équations différentielles linéaires sont les seules qui admettent un facteur fonction de x seul.

Si l'on suppose que λ soit fonction de y' seul, on a

$$\lambda = \left(\frac{df}{dx} - y'\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

La condition nécessaire est que f soit une fonction linéaire par rapport à x. Pour l'équation

$$y = x.\varphi y' + \psi y', \quad \text{on a} \quad \lambda = e^{\int \frac{dy'}{\varphi y' - y'}}.$$

L'équation de Clairaut fait exception à cette règle.

Si, en revenant à l'équation

$$y' = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

on cherche les conditions pour que cette équation ait un facteur qui soit fonction homogène de x et de y', on a, en posant $\frac{y'}{x} = u$ et $\lambda = x^n \theta u$, où l'exposant n et la forme de la fonction θ sont à déterminer,

$$\frac{\theta' u}{\theta u} = \frac{\left(n\frac{df}{dy'} + x\right)x}{x\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy'} - xy'}.$$

La détermination de la fonction θu est possible si la seconde partie de l'équation précédente est fonction de u seul, ce qui n'aura lieu que lorsque la fonction f sera homogène et du deuxième degré. On a, dans ce cas,

$$\lambda = x^n e^{\int \frac{\left(n\frac{df}{dy'} + x\right)x}{2f - xy'} du}.$$

En posant successivement $n = 0$ et $n = 1$, on trouve l'intégrale

$$x e^{\int \frac{x\frac{df}{dy'} du}{2f - xy'}} = \text{const.}$$

Si l'équation différentielle peut se réduire à la forme

$$x = f(x, y'),$$

en la différentiant, on a

$$\left(\frac{df}{dy}-\frac{1}{y'}\right)dy+\frac{df}{dy'}dy'=0.$$

Le facteur λ, qui rend la dernière équation intégrable, est déterminé par l'équation

$$\frac{\lambda}{y'^2}=\frac{df}{dy'}\frac{d\lambda}{dy}-\left(\frac{df}{dy}-\frac{1}{y'}\right)\frac{d\lambda}{dy'}.$$

Cette équation peut servir à déterminer λ, si l'on suppose que λ soit fonction homogène de y et y', en posant $y'=uy$, $\lambda=y^n.\theta u$, et si l'on suppose encore que f soit fonction du rapport u.

Par exemple, pour l'équation

$$x^m y^n = ay'^n + by^{n-1}y' + cy^n,$$

on a

$$y = Ce^{\frac{1}{m}\int (au^n+bu+c)^{\frac{1-m}{m}}(nau^{n-1}+b)u\,du}.$$

Au § 46, je montre que l'intégrale d'une équation de la forme $f(x, y')=0$ peut s'exprimer quelquefois par deux équations, en introduisant une variable définie par l'équation $y'=x\theta$. En effet, l'équation $f(x, y')=0$ étant irrésoluble, l'équation $f(x, x\theta)=0$ peut avoir une solution $x=\varphi(\theta)$; alors on a

$$x=\varphi(\theta),\quad y=\int \theta\,\varphi\theta\,\varphi'\theta\,d\theta + C;$$

ces deux équations expriment par leur ensemble l'intégrale.

De même, en posant $y'=y\theta$ dans une équation de la forme $f(y, y')=0$, on peut trouver quelquefois $y=\psi(\theta)$, et alors l'intégrale est exprimée par ces deux équations

$$x=\int\frac{\psi'\theta\,d\theta}{\theta.\psi\theta}+C,\quad y=\psi\theta.$$

Chapitre V (p. 101). — Sur les solutions singulières des équations différentielles.

Chapitre VI (p. 113). — Équations différentielles des ordres supérieurs au premier.

Au § 62, je montre que l'intégration d'une équation

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

qu'on peut écrire comme il suit, $f(q, p) = 0$, en posant $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, peut s'effectuer quelquefois même dans le cas où l'équation précédente est irrésoluble, pourvu qu'on trouve des expressions de p et q en fonction d'une variable ω, qui satisfassent à l'équation donnée.

Par exemple, pour l'équation

$$q^3 - 2p^3 + 3pq = 0,$$

en posant $q = p\omega$, on a

$$p = \frac{3\omega}{2 - \omega^3} \quad \text{et} \quad q = \frac{3\omega^2}{2 - \omega^3}.$$

Puisque $q = \frac{dp}{dx}$, on a

$$dx = \frac{2d\omega(1 + \omega^3)}{\omega^2(2 - \omega^3)},$$

$$dy = p\,dx = \frac{6d\omega(1 + \omega^3)}{\omega(2 - \omega^3)^2}.$$

Si l'on peut satisfaire à l'équation $F\left(\frac{d^2y}{dx^2}, y\right) = 0$ en posant $y = f\omega$, et $\frac{d^2y}{dx^2} = q = \varphi\omega$, on a

$$dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = f'\omega\,d\omega,$$

d'où

$$p\,dp = \varphi\omega f'\omega\,d\omega$$

et

$$p = \sqrt{2\int\varphi\omega f'\omega\,d\omega + C}, \quad x = \int\frac{f'\omega\,d\omega}{\sqrt{2\int\varphi\omega f'\omega\,d\omega + C}} + C_1.$$

Il est facile de voir que ce procédé d'intégration s'applique dans certains cas aux équations

$$F\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = 0.$$

Chapitre VII (p. 158). — Intégration des équations linéaires.

Dans ce Chapitre, après avoir montré la formation de l'intégrale générale d'une équation sans second membre au moyen de ses intégrales particulières, on donne la démonstration du théorème de Liouville (Tissot), et l'on déduit en général les relations qui existent entre les coefficients de l'équation donnée et ses solutions particulières (§ 82).

Pour le cas des coefficients constants dans l'équation $\Phi(y) = 0$ [1], on sait que la solution particulière de l'équation $\Phi(y) = V$ a l'expression suivante :

$$X = \sum \frac{e^{m_i x}}{f'(m_i)} \int e^{-m_i x} V dx,$$

où $fm = 0$ est l'équation caractéristique, et la somme $\sum_i$ se rapporte à toutes les racines de l'équation précédente. Mais, lorsque l'équation $fm = 0$ a des racines égales, l'expression de x doit être transformée; en vue de cette transformation, je donne une nouvelle démonstration de l'expression de X, qui s'applique aussi au cas des racines égales de l'équation $fm = 0$.

Posons

$$e^{mx} \int e^{-mx} V dx = V_1(m, x);$$

en différentiant cette équation n fois de suite par rapport à x, on a

$$\begin{aligned}
V'_1\ (m, x) &= m V_1(m, x) + V, \\
V''_1\ (m, x) &= m^2 V_1(m, x) + mV + V', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
V_1^{(n)}(m, x) &= m^n V_1(m, x) + m^{n-1} V + m^{n-2} V' + \ldots + V^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

En y ajoutant l'identité $V_1(m, x) = V_1(m, x)$, il est facile d'en déduire l'équation suivante :

$$(\mathrm{V})\quad \Phi[V_1(m, x)] = fm . V_1 + f_{n-1} . V + f_{n-2} . V' + \ldots + f_1 . V^{(n-2)} + V^{(n-1)}.$$

---

[1] Dans tout ce qui se rapporte aux équations linéaires, j'emploie la notation précédente, due à M. Serret.

Dans cette équation, les fonctions f_{n-1}, f_{n-2}, ... ont la signification que leur a donnée Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1775, 1792).

Puisque l'équation (V) est une identité par rapport à m, on a, en la différentiant k fois par rapport à m,

$$\Phi\left(\frac{d^k V_1}{dm^k}\right) = f^{(k)}.V_1 + (k)_1 f^{(k-1)}.\frac{dV_1}{dm} + (k)_2 f^{(k-2)}.\frac{d^2V_1}{dm^2} + \ldots$$
$$+ fm.\frac{d^kV_1}{dm^k} + V\frac{d^kf_{n-1}}{dm^k} + V'\frac{d^kf_{n-2}}{dm^k} + \ldots + V^{(n-k-1)}\frac{d^kf_k}{dm^k}.$$

Si dans cette équation on pose successivement $k = 0, 1, \ldots, k$, on a les $k+1$ équations

$$\Phi(V_1) = fm.V_1 + \sum_{i=0}^{i=n-1} V^{(i)} f_{n-i-1},$$

$$\Phi\left(\frac{dV_1}{dm}\right) = f'm.V_1 + fm.\frac{dV_1}{dm} + \sum V^{(i)} f'_{n-i-1},$$

. . . .,

$$\Phi\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right) = f^{(k)}m.V_1 + \ldots + fm.\frac{d^kV_1}{dm^k} + \sum V^{(i)} f^{(k)}_{n-i-1}.$$

En mettant α_k au lieu de m, α_k étant une des racines de l'équation $fm = 0$, dont le degré de multiplicité est égal à $k+1$, on a les équations suivantes :

$$\Phi_{m=\alpha_k}(V_1) = \sum V^{(i)} f_{n-i-1}(\alpha_k),$$

$$\Phi_{m=\alpha_k}\left(\frac{dV_1}{dm}\right) = \sum V^{(i)} f'_{n-i-1}(\alpha_k),$$

. . . .,

$$\Phi\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right) = \sum V^{(i)} f^{(k)}_{n-i-1}(\alpha_k),$$

les sommes $\sum$ s'étendant de $i = 0$ à $i = n - 1$. On aura un groupe pareil d'équations pour une autre racine $\alpha_{k'}$, dont le degré de multiplicité est $k'+1$. En général, on aura autant de groupes d'équations qu'il y a de racines différentes dans l'équation $fm = 0$.

Multiplions ces équations par des facteurs indéterminés

$$\lambda_k^0,\ \lambda'_k,\ \ldots,\ \lambda_k^k,$$
$$\lambda_{k'}^0,\ \lambda'_{k'},\ \ldots,\ \lambda_{k'}^{k'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et posons pour la détermination de ces λ les équations suivantes :

$$(\lambda)\quad\left\{\begin{array}{l}\lambda_k^0 f_{n-1}(\alpha_k)+\lambda'_k f'_{n-1}(\alpha_k)+\ldots+\lambda_k^k f_{n-1}^{(k)}(\alpha_k)+\lambda_{k'}^0 f_{n-1}(\alpha_{k'})+\lambda'_{k'} f'_{n-1}(\alpha_{k'})+\ldots=1,\\ \lambda_k^0 f_{n-2}(\alpha_k)+\lambda'_k f'_{n-2}(\alpha_k)+\ldots+\lambda_{k'}^0 f_{n-2}(\alpha_{k'})+\lambda'_{k'} f'_{n-2}(\alpha_{k'})+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \lambda_k^0 f_0(\alpha_k)+\lambda'_k f'_0(\alpha_k)+\ldots+\lambda_{k'}^0 f_0(\alpha_{k'})+\lambda'_{k'} f'_0(\alpha_{k'})+\ldots=0.\end{array}\right.$$

On a l'équation suivante :

$$\Phi\left[\lambda_k^0 V_1(\alpha_k)+\lambda'_k\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{m=\alpha_k}+\ldots+\lambda_k^k\left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right)_{m=\alpha_k}\right.$$
$$\left.+\lambda_{k'}^0 V_1(\alpha_{k'})+\ldots+\lambda_{k'}^{k'}\left(\frac{d^{k'}V_1}{dm^{k'}}\right)_{m=\alpha_{k'}}+\ldots\right]=V;$$

d'où l'on voit que la solution particulière a pour expression

$$X=\lambda_k^0 V_1(\alpha_k)+\lambda'_k\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{m=\alpha_k}+\ldots+\lambda_{k'}^0 V_1(\alpha_{k'})+\ldots.$$

La théorie des déterminants donne le moyen d'éliminer les λ des équations (λ) et de l'expression de X; alors on a, pour la détermination de X, l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{n-1}(\alpha_k), & f'_{n-1}(\alpha_k), & \ldots, & f_{n-1}^{(k)}(\alpha_k), & f_{n-1}(\alpha_{k'}), & f'_{n-1}(\alpha_{k'}), & \ldots, & f_{n-1}^{(k')}(\alpha_{k'}), & \ldots & 1\\ f_{n-2}(\alpha_k), & & & & & & & & \ldots & 0\\ \ldots & & & & & & & & & \\ f_0(\alpha_k), & & & & & & & & \ldots & 0\\ V_1(\alpha_k), & \left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{\alpha_k}, & \ldots, & \left(\frac{d^kV_1}{dm^k}\right)_{\alpha_k}, & V_1(\alpha_{k'}), & & & & \ldots & X\end{vmatrix}=0.$$

Comme exemple, je prends l'équation suivante :

$$y^{\text{vi}}-3y^{\text{v}}+by'''-3y''-3y'+2y=V.$$

Équation caractéristique :

$$fm = m^6 - 3m^5 + 6m^3 - 3m^2 - 3m + 2 = (m-1)^3(m+1)^2(m-2) = 0.$$

$$\begin{array}{lll}
f_5 m = m^5 - 3m^4 + 6m^2 - 3m - 3, & f'_5 m = 5m^4 - 12m^3 + 12m - 3, & f''_5 m = 20m^3 - 36m^2 + 12, \\
f_4 m = m^4 - 3m^3 + 6m - 3, & f'_4 m = 4m^3 - 9m^2 + 6, & f''_4 m = 12m^2 - 18m, \\
f_3 m = m^3 - 3m^2 + 6, & f'_3 m = 3m^2 - 6m, & f''_3 m = 6m - 6, \\
f_2 m = m^2 - 3m, & f'_2 m = 2m - 3, & f''_2 m = 2; \\
f_1 m = m - 3, & f'_1 m = 1, & \\
f_0 m = 1, & f'_0 m = 0, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll|ll|l}
f_5(1) = -2, & f'_5(1) = 2, & f''_5(1) = -4, & f_5(-1) = 2, & f'_5(-1) = 2, & f_5(2) = -1, \\
f_4(1) = 1, & f'_4(1) = 1, & f''_4(1) = -6, & f_4(-1) = -5, & f'_4(-1) = -7, & f_4(2) = 1, \\
f_3(1) = 4, & f'_3(1) = -3, & f''_3(1) = 0, & f_3(-1) = 2, & f'_3(-1) = 3, & f_3(2) = 2, \\
f_2(1) = -2, & f'_2(1) = -1, & f''_2(1) = 2, & f_2(-1) = 4, & f'_2(-1) = -5, & f_2(2) = -2, \\
f_1(1) = -2, & f'_1(1) = 1, & f''_1(1) = 0, & f_1(-1) = -4, & f'_1(-1) = 1, & f_1(2) = -1.
\end{array}$$

Les valeurs de V_1, $\frac{dV_1}{dm}$, $\frac{d^2V_1}{dm^2}$, lorsqu'on y pose successivement $m = 1, -1, 2$, sont faciles à calculer; ce sont, en général, des fonctions de x. Nous poserons, pour abréger,

$$V_1(1) = A, \quad V_1(-1) = A', \quad V_1(2) = A'',$$

$$\left(\frac{dV_1}{dm}\right)_1 = B_1, \quad \left(\frac{dV_1}{dm}\right)_{-1} = B', \quad \left(\frac{d^2V_1}{dm^2}\right)_1 = C.$$

Pour la détermination de la solution particulière, on a

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
X & A & B & C & A' & B' & A'' \\
1 & -2 & 2 & -4 & 2 & 2 & -1 \\
0 & 1 & 1 & -6 & -5 & -7 & 1 \\
0 & 4 & -3 & 0 & 2 & 9 & 2 \\
0 & -2 & -1 & 2 & 4 & -5 & -2 \\
0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right| = 0.$$

Chapitre VIII (p. 222). — Sur les solutions singulières des équations d'ordre supérieur au premier. Propriétés de ces solutions.

Chapitre IX (p. 238). — Intégration des équations dont les premiers membres sont des différentielles exactes. Intégration des équations linéaires au moyen d'un facteur.

La théorie de l'intégration des équations linéaires au moyen d'un facteur est pour la première fois introduite dans un cours. Cette théorie est fondée sur les théorèmes donnés par Euler. Je ne puis pas la donner ici *in extenso;* l'exposition succincte en serait très-difficile; c'est pourquoi je ne fais qu'indiquer le contenu de ce Chapitre.

Chapitre X (p. 255). — Intégration des équations aux différentielles totales à plusieurs variables.

Après avoir exposé la théorie connue de l'intégration des équations aux différentielles totales à trois variables du premier ordre et du premier degré, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile de donner des règles générales pour l'intégration des équations à trois variables du second degré et du second ordre. Je donne ici quelques problèmes de ce Chapitre avec les solutions.

1°

$$(x^2+y^2)\,d^2z + 2y\,dy\,dz + 2x\,dx\,dz = 0.$$

Solution :

$$z = \mathrm{M} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{y} + \mathrm{K}.$$

2°

$$(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)\,d^2z = (x\,dy - y\,dx)^2\,dz - 2\,dz\,(x\,dx+y\,dy)^2.$$

Solution :

$$z = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{N}.$$

3°

$$d^2z = dz^2.$$

Solution :

$$ax + y = b + ce^{-z}.$$

4°

$$d^2z = \left(\frac{p}{x} - \frac{p^2}{z}\right)dx^2 + 2\left(\frac{2p}{y} + \frac{2q}{x} - \frac{pq}{z} - \frac{2z}{xy}\right)dx\,dy + \left(\frac{q}{y} - \frac{q^2}{z}\right)dz^2.$$

où

$$p = \left(\frac{dz}{dx}\right), \quad q = \left(\frac{dz}{dy}\right).$$

Solution :

$$z^2 = ax^2y^2 + bx^2 + cy^2.$$

Chapitre XI (p. 287). — Sur les équations simultanées.

N. ALEXÉIEF.

GÜNTHER (S.). — STUDIEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN UND PHYSIKALISCHEN GEOGRAPHIE. — Halle a/S, 1er fascicule, 1877. In-8°, 56 pages.

Un de nos collaborateurs a fait ressortir, à propos d'un récent Ouvrage de M. Gunther, la tendance toute spéciale d'un géomètre qui ne reste pas indifférent aux questions relatives à l'origine et à l'évolution des idées mathématiques. Il semble que M. Gunther ait pris à tâche de reconstituer, un à un, les divers Chapitres de leur histoire. Les laborieuses recherches qu'il lui a fallu entreprendre dans ce but ne lui auraient toutefois pas encore permis de refondre l'histoire entière des Mathématiques. Il est possible qu'un seul écrivain ne suffise pas à une entreprise aussi vaste; mais la véritable difficulté serait de trouver des géomètres prenant plaisir à faire marcher de front les recherches abstraites et les recherches littéraires. Cette heureuse disposition existe chez M. Gunther; elle explique comment nous lui sommes redevables de travaux sur les points les plus divers de l'histoire des Sciences mathématiques chez les anciens et au moyen âge.

Il existait déjà des ouvrages très-étendus et certainement d'un très-grand mérite; M. Günther l'a affirmé lui-même, mais il a eu soin aussi d'y relever les erreurs qu'il avait reconnues dans le cours de ses propres études. L'occasion se présentera sans doute un jour de coordonner l'ensemble de ces Mémoires isolés et de reconstituer, sur des bases nouvelles et solides, l'histoire des Mathématiques, l'histoire des progrès de la raison humaine.

Nos lecteurs ont pu remarquer dans les derniers volumes du *Bulletin* au moins l'indication des questions dont M. Günther a poursuivi l'évolution historique et philosophique. Nous nous bornerons à rappeler que nous lui devons des contributions nouvelles aux sujets d'étude suivants : carrés magiques, fractions continues, méthodes d'approximation chez les anciens; mais, aujourd'hui, notre attention devra se porter sur un Ouvrage entièrement utile et curieux, qui ne manquera pas de provoquer et d'éveiller, chez d'autres amis des Sciences, le goût des recherches bibliographiques. Plus que partout ailleurs, ces recherches s'imposent dans l'histoire des Sciences exactes : l'appréciation personnelle des écrivains court grand risque de s'égarer si elle ne s'appuie pas sur des textes soigneusement établis et discutés. M. Günther a su éviter cet écueil; il ne s'en rapporte pas à son jugement seul, et il est attentif à réunir le plus de textes possibles et à citer les auteurs dans leur propre langue.

Le travail d'érudition auquel vient de se livrer M. Günther à propos de l'histoire de la Géographie nous donne la mesure de ce que ce géomètre allemand nous réserve pour l'avenir. Les doctrines enseignées longtemps à l'égard de la forme et du mouvement de la Terre ne pouvaient manquer de lui donner un des plus curieux exemples d'une idée qui a rencontré les plus grandes difficultés pour se faire jour. C'était donc un sujet d'études méritant à juste titre, de fixer son attention, et il n'est point surprenant que l'auteur y ait trouvé matière à de grands développements.

L'Ouvrage de M. Günther se compose déjà de cinq fascicules; mais, comme on pourra en juger par leurs sommaires, il ne s'agit encore que de l'évolution des idées relatives à la forme et au mouvement de la Terre chez les Occidentaux, les Arabes et les Juifs, des hypothèses anciennes et modernes sur le déplacement séculaire du centre de gravité du globe sous l'action des eaux, des théories exposées dans divers manuscrits des bibliothèques de Munich, et enfin des connaissances de Jean Werner, de Nuremberg, relatives à la Géographie mathématique et physique. Cette étude est donc incomplète; mais, dès à présent, il est possible d'en saisir l'ensemble et le caractère général, et de juger de l'intérêt qui s'attache à ce genre de recherches.

Chap. I. — *La doctrine de la sphéricité et du mouvement de la Terre au moyen âge chez les Occidentaux.* (1-56, 5 fig.).

Les erreurs que les premiers savants chrétiens ne cessèrent d'enseigner à ce sujet doivent être mises au compte des idées qu'ils avaient reçues de leurs contemporains et devanciers. Un lien trop intime, bien que non justifié, tenait dans une étroite dépendance les dogmes religieux et des théories physiques d'une exactitude fort contestable. L'influence du dogme prit le dessus et servit d'obstacle infranchissable aux tentatives des savants, qui, n'ayant d'autre guide que la raison, se consumèrent en vains efforts, pendant tout le moyen âge, avant de réussir à proclamer la vérité. On se souvient des persécutions qu'il leur fallut endurer, précisément au sujet de la forme et du mouvement de notre planète. L'ancienne hypothèse des Grecs, qui enseignait la sphéricité de la Terre, allait donc être rejetée comme hétérodoxe, et la théorie contraire et complétement erronée devait régner à son tour, sans la moindre contestation, pendant une longue série de siècles.

Nous allons reconnaître qu'elle a donné lieu aux conceptions les plus étranges.

Draper a parfaitement qualifié la Géographie et la Cosmologie de cette première époque. Les Pères de l'Église leur ont donné un caractère tout spécial, qui peut se résumer en quelques traits. « La Terre est une surface plane, entourée de l'eau des mers, et sur laquelle s'élèvent les piliers de la voûte cristalline du ciel. La sphéricité avait été condamnée par les Pères, et entre autres par Lactance et Augustin. Ces doctrines furent enseignées, pour la plus grande partie, comme passages des Livres saints, dont le sens véritable avait été capricieusement altéré. C'est ainsi que Cosmas Indicopleustès, dont la Géographie patristique fit autorité durant près de huit cents ans, croyait avoir trouvé une objection irréfutable à la sphéricité de la Terre en demandant comment, au jour du jugement dernier, les hommes placés sur l'autre partie d'une sphère pourraient voir le Seigneur au milieu de sa gloire. »

C'est bien, en effet, sous cette forme que se révèle le caractère général des théories exposées dans les écrits de S. Augustin, de Lactance, d'Isidore de Séville, du Chaldéen Patricius et de son disciple Thomas d'Édesse, devenu plus tard S. Thomas d'Aquin.

Nous donnerons, comme exemple, l'hypothèse du moine égyptien, Cosmas d'Alexandrie, auquel un voyage aux Indes avait fait donner le surnom d'Indicopleustès. Voici en quels termes la résume Peschel, historien de la Géographie, le meilleur guide que nous puissions consulter pour la période spéciale : « Des anges dirigent les constellations du ciel le long de leurs orbites circulaires et président aux alternatives du jour et de la nuit, de même qu'aux éclipses de Soleil et de Lune. La Terre, suivant sa doctrine, a perdu toute forme sphérique : elle s'élève au milieu de l'Océan, qui l'entoure, et ressemble à une cloche à base quadrangulaire. Le Soleil se meut au-dessus de cet ensemble et jamais au-dessous, mais se tient seulement toujours à l'intérieur de la voûte, sur la terre ferme. Au-dessus des continents, de l'Océan et des étoiles, embrassant tout ce qui est solide, s'élève le cristal du firmament. »

On peut signaler, comme se rapportant au même ordre d'idées, les écrits de cosmographes de ce temps, Aethicus et l'anonyme de Ravenne, dont les œuvres ont été publiées par les soins de Wuttke et de Pinder Parthey.

Il est assez étrange de constater que, dans l'histoire des œuvres humaines, personne n'ait pensé à dire quel philosophe avait le premier cherché à ébranler de pareilles doctrines. Peschel lui-même ne cite nulle part le nom d'un audacieux adversaire du saint-siége, l'évêque Virgile. Il est vrai que l'on n'a pu découvrir de témoignage écrit donnant la preuve matérielle que Virgile ait proclamé la sphéricité de la Terre, mais le fait ne paraît pas douteux, à en juger par le bref dans lequel le pape Zacharie, s'adressant au nonce apostolique d'Allemagne, S. Boniface, condamne les théories de Virgile et les déclare hérétiques. Poggendorff, G.-J. Bauer et Jocher n'ont pas oublié ce détail.

L'immense compilation de Calvisius renferme aussi un extrait qui peut être cité comme document historique. Dans un Chapitre intitulé : *Notice sur les monuments de Salzburg*, nous remarquons, dans une épitre du pape Zacharie au R. F. Boniface, le passage suivant : « Il est enfin une cause perverse de désaccord et une doctrine absurde par laquelle Virgile offensait Dieu et son âme à la fois, lorsqu'il enseignait l'existence des antipodes. Il assurait qu'il y a des hommes qui habitaient une autre face du monde et un autre hémisphère. »

Cet évêque dissident se trouva donc taxé d'hérésie, et, si la manifestation de sa libre pensée n'éveilla pas l'attention au moyen âge, il le faut attribuer à l'ignorance de ses contemporains, qui mirent volontiers sur le compte du prince de la poésie latine les idées reprochées à un prélat du temps de Pepin.

Mais bientôt l'Église elle-même devait donner le signal d'un commencement de réforme dans les idées scientifiques. Suivant la remarque judicieuse de Peschel, « l'Église du moyen âge, privée de moyens exacts de mesure du temps et de calendriers bien ordonnés, devait un jour, plus ou moins éloigné, se trouver dans la nécessité de recourir à l'observation des phénomènes astronomiques et à la recherche approfondie des vérités mathématiques. Notre science semblait sommeiller dans le sein de l'Église; mais on allait bientôt assister à sa résurrection. »

C'est ainsi que l'on voit Beda revenir entièrement aux sphères de Ptolémée et avouer nettement la sphéricité de la Terre.

Alcuin s'est probablement associé aux théories de Beda, mais il ne paraît pas qu'elles aient servi à l'établissement des calendriers du temps de Charlemagne. Celui de 781, que possède le Musée du Louvre, a été fait d'après des règles plus anciennes, attribuées à Isidore de Séville plutôt qu'à Beda, au témoignage de Heis.

Cependant les derniers écrivains de la période carlovingienne se montrèrent encore profondément imbus des préjugés reçus, et, par exemple, l'abbé de Fulde, Rhabanus Maurus, cherchait à concilier la forme circulaire de l'horizon avec la forme quadrangulaire dont il a été question. De même, les cartes rondes des IX^e^ et X^e^ siècles, sur lesquelles une naïveté touchante a désigné Jérusalem comme centre de l'univers entouré par l'Océan, semblent apporter à l'envi la preuve manifeste de leur imperfection.

Les essais de représentation de la surface terrestre n'aboutirent longtemps qu'à des peintures naïves, comme celles dont tout le moyen âge paraît avoir eu la spécialité.

Les X^e^ et XI^e^ siècles nous donnent de nombreux témoignages de la rénovation accomplie dans le point de vue scientifique par la diffusion des connaissances venues des Byzantins et des Maures espagnols. D'après Peschel, Adam de Brême s'est distingué par son savoir et sa circonspection. Son Ouvrage a été publié dans les *Gesta Hammaburgensia* de Pertz. Adam de Brême connaissait parfaitement les vieux auteurs; en outre, l'expérience de ses propres voyages lui avait suggéré, comme jadis à Pythéas de Marseille, des idées exactes sur le cours apparent du Soleil, et, tandis que l'on ne trouve chez Virgile autre chose que des réflexions métaphysiques, Adam de Brême a considérablement relevé le point auquel s'arrêtait jusqu'alors la connaissance de la nature.

Un autre progrès à constater, et qui dénote une idée plus nette du sphéroïde terrestre, nous est manifesté par le passage graduel des cartes rondes aux cartes géographiques véritables. Les anciens ne se proposaient que de représenter directement, à une échelle réduite, les contrées habitées. Mais, au début même du XI^e siècle, on voit commencer les essais de projection des surfaces courbes. Les historiens spéciaux ne semblent pas avoir saisi la portée de cette transformation; et, en effet, ils n'y seraient parvenus qu'après une étude approfondie des richesses manuscrites que le moyen âge nous a laissées dans les sciences cosmographiques. M. Günther nous a dit, à ce propos, qu'il a eu déjà l'occasion d'en montrer la preuve basée sur la discussion des nombreux manuscrits de la Bibliothèque de Munich. Il y a bien encore des lacunes et des imperfections dans ces premières tentatives des cartographes, mais il faut bien reconnaître l'image exacte d'une forme sphérique sur un plan, divisée en zones correspondant à celles de la Terre. On y trouve encore le germe des cartes marines du Génois Andalò di Negro et du célèbre patriote vénitien Marino Sanuto.

On ne sait pas encore, d'une manière positive, à qui devoir attribuer le premier énoncé dogmatique de la sphéricité de la Terre. Le pape Sylvestre II (Gerbert) avait déjà connaissance de moyens de déterminer la grandeur de notre planète; mais il ne semble pas que l'on ait songé à les mettre à profit.

L'excellente idée que l'on a voulu réaliser en publiant d'une manière suivie, et rendant ainsi accessibles, les trésors des bibliothèques de Paris a mis au jour, dès le début, un manuscrit du XIII^e siècle, qui montre clairement combien la doctrine exacte du globe terrestre avait pris, à cette époque déjà, de profondes racines. On a retrouvé un petit Ouvrage intitulé : *Bild der Welt* (Description de l'univers), que l'éditeur Legrand d'Aussy attribue à un certain Omons. L'auteur se montre versé dans les Mathématiques et dans la littérature grecque. Il possède Aristote, Ptolémée, Platon, de sorte que son livre représente une somme de connaissances respectable pour l'époque. L'Astronomie se trouve, à juste titre, fondée uniquement sur les principes de l'Almageste. Il sera intéressant de citer surtout le passage relatif à la Terre. « La

Terre, dit-il, est enveloppée du ciel, ainsi que le jaune de l'œuf l'est du blanc », métaphore que nous aurons l'occasion de retrouver dans les écrits des Orientaux. Cette comparaison cosmologique appartient encore à l'Astronomie, tandis que la Géographie commence ainsi : « La Terre se trouve placée au milieu du ciel, comme le point l'est au centre qu'a tracé le compas. Elle est ronde, de sorte qu'un homme qui partiroit d'un point quelconque de sa surface pourroit, s'il ne rencontroit point d'obstacle, tourner tout autour, de même qu'un insecte qu'on verroit se promener sur la circonférence d'un fruit rond.... » A cette peinture très-correcte de la sphère terrestre, il ajoute, comme conclusion, une petite pièce de vers, dont l'éditeur a traduit ainsi le sens assez difficile à saisir : « Tellement que quand il arriveroit au point qui est directement sur nous » (qui correspond à celui où nous sommes placés), « il croiroit que nous sommes sous lui, car il auroit les pieds tournés vers les nôtres et la tête portée vers le ciel, de même que la nôtre l'est ». Mais, bientôt après, l'auteur arrive au point réellement important, et poursuit en ces termes : « Si c'étoient deux hommes à-la-fois qui partissent ainsi d'un point donné, et qu'ils s'avançassent, l'un vers l'orient, l'autre vers l'occident,

Si que andui egaument alassent,
Il comendroit qu'il s'encontrassent
Dessus le leu dont il se mûrent. »

C'est ce que l'on peut évidemment énoncer ainsi : Deux personnes, partant d'un même point du globe, avec la même vitesse, et suivant deux directions contraires, doivent se retrouver au point diamétralement opposé. Lorsque nous voyons Legrand d'Aussy remarquer, à ce sujet, que « voilà la sphéricité de la Terre et les antipodes énoncés bien clairement », nous ne croyons avoir rien à ajouter. On peut encore observer, avec Omons, que la hauteur des montagnes les plus élevées s'évanouit, en quelque sorte, si on la compare au rayon du globe terrestre : « Les hauteurs ni les vallées n'ôtent rien à la Terre de sa rondeur ».

Jean de Sacro Bosco publia dans le même temps une vaste compilation dans laquelle la doctrine de la sphère terrestre devenait véritablement scientifique. Mais il nous faudra constater que tout le moyen âge s'est écoulé sans que personne ait osé aborder de front la difficulté, regardée comme insurmontable, d'assigner à la surface de l'Océan une forme sphérique. Les écrits de Dante peuvent donner une idée de cette confusion perpétuelle entre l'erreur et la vérité, et de cette facilité de conception de théories plus singulières les unes que les autres, ayant pour objet la constitution mécanique des deux parties constitutives de l'univers, la terre et les eaux.

Certains passages du poëme dantesque ont donné lieu de croire que l'auteur avait eu la notion de la sphéricité. Le XXXIV^e chant de l'*Enfer* contient une sorte d'anticipation au fameux puits de Maupertuis. Dans le II^e chant du *Purgatoire*, on peut remarquer aussi le passage suivant : « L'Èbre, la ville de Jérusalem, le Gange et le point situé à 90 degrés vers le nord du Purgatoire des âmes représentent les quatre sommets d'un carré inscrit dans un parallèle de la Terre ». Au XXXIII^e chant, il fait encore voir qu'il n'a qu'une idée fort confuse de la sphéricité, et qu'il n'en comprend pas les conséquences. Les quelques idées justes qu'il a exprimées se trouvent noyées au milieu de théories fantaisistes et compliquées. Ainsi, après un essai infructueux de réfutation de l'hypothèse d'un gonflement des mers, il discute les conséquences mécaniques de la différence de position des centres de gravité de la masse des continents et de celle de l'Océan; il exprime clairement, d'après W. Schmidt, que le niveau de la mer est toujours l'expression de forces particulières s'exerçant sur elle, et que la surface libre, à part les légères perturbations qu'elle éprouve, se dispose constamment autour de son centre de gravité comme autour d'un centre. Il est à observer toutefois que, même à la fin du XVI^e siècle, l'hypothèse d'un défaut de coïncidence entre les centres de la Terre et des eaux comptait des partisans. Le philosophe Fr. Patrizio était de ce nombre.

Lorsque Christophe Colomb eut conçu le plan de sa traversée de l'océan Atlantique, on tenta de lui objecter qu'il aurait à franchir une gigantesque montagne liquide située au large, à l'occident. Comme nous le dit Ruge, Christophe Colomb ne s'inquiéta pas beaucoup de cette difficulté; mais il chercha des preuves directes de l'exactitude de cette hypothèse, et, lorsqu'il découvrit les bouches de l'Orénoque, il se figura en présence du point le plus élevé de la masse des eaux et d'un véritable renflement de la surface de la Terre et de l'Océan.

La sphéricité de la Terre n'a plus trouvé, jusqu'au début du

XVI^e siècle, de sérieux adversaires, et il nous faut maintenant résoudre les deux questions suivantes :

Quelle fut l'opinion des Occidentaux, ou mieux des chrétiens du moyen âge, sur la doctrine du mouvement de la Terre ?

Cette doctrine trouva-t-elle des représentants, et à quel titre ceux-ci peuvent-ils passer pour précurseurs de Copernic ?

L'hypothèse du mouvement de la Terre ne paraît pas avoir eu cours avant le XIII^e siècle, et il faut arriver au roi Alphonse de Castille pour trouver les premières phases de l'évolution des idées grecques et arabes.

La période d'éclat des idées de la scolastique peut se résumer dans la recherche du système théorique de l'univers dans la science des Grecs et en partie dans celle des Arabes. C'est encore parmi les théologiens qu'il faut chercher les premières idées de réforme dans la Géographie astronomique.

Le savant dominicain de Bollstädt, Albert le Grand, occupe un rang élevé parmi les philosophes de son temps. Il a, comme Aristote et Alexandre de Humboldt, conçu un plan de description générale de l'univers.

Un passage de ses œuvres nous permettra d'apprécier le caractère de ses idées. Il y est question de la notion du plan indéfini, qu'il appuie de considérations qui touchent au paradoxe : « Le mouvement dans un espace indéfini doit exiger un temps indéfini ; si donc nous prenons un point à l'orient, la distance de l'orient à l'occident sera infinie. Pour se mouvoir de l'orient vers l'occident, le Soleil emploiera un temps infini, ce qui est absurde, puisque nous voyons qu'il parcourt tout cet espace dans l'intervalle de vingt-quatre heures. » On reconnaît que le plus léger doute au sujet de l'immobilité de la Terre renversait immédiatement cette preuve spécieuse de la forme limitée de l'espace.

Roger Bacon s'est distingué en Astronomie non moins qu'en Philosophie, et, en maints endroits de ses écrits, il s'est écarté des sentiers battus de la scolastique de son temps. L'*Opus majus* renferme un riche trésor de preuves de cette émancipation. Dans une habile réfutation du passage d'Albert déjà relaté, Bacon s'exprime ainsi : « Ptolémée a montré dans l'Almageste et tous les astronomes savent que la Terre entière ainsi que les enfers sont situés, à l'égard du ciel, comme le centre par rapport à la circonférence ;

et la moindre des étoiles discernables à la vue est plus grande que la Terre, ainsi que l'a dit Alfragan dans les prémisses de son Livre. » Toutefois, on n'osait pas proclamer l'isolement de la Terre dans l'espace, et plus tard les catholiques et les protestants devaient opposer des passages de la Bible à la théorie de Copernic. La légende biblique de Josué ne pouvait échapper à ce génie pénétrant. « L'histoire que rapporte le prophète Isaïe et un autre passage de Salomon dans l'Ecclésiaste resteront », dit-il, « incompréhensibles et seront une source de contradiction pour tout esprit mathématique. »

L'illustre et savant théologien Thomas d'Aquin a laissé une encyclopédie qui prouve la profondeur et la fécondité de son esprit. M. Günther a examiné en détail, dans un dernier Ouvrage analysé au *Bulletin*, les idées remarquables de Thomas d'Aquin sur la lumière et la chaleur; mais le *Docteur angélique* paraît avoir moins bien réussi en Astronomie, où il a supposé aux mouvements célestes une complication extraordinaire.

Les écrits d'un évêque de Cambrai, Pierre d'Ailly, méritent, comme ceux de Thomas d'Aquin, une mention toute spéciale. D'après Poggendorff, leur lecture a suggéré à Christophe Colomb la première idée d'atteindre l'orient en passant à l'occident; mais, en dehors de cette particularité, cet Ouvrage porte, comme tous ceux du XIII^e siècle, l'empreinte bien marquée du caractère de la Philosophie et des méditations scolastiques. L'Œuvre de Dante Allighieri doit être citée comme le plus parfait modèle.

« Nous n'avons pas réussi », dit M. Günther, « à trouver dans son poëme de traces d'une considération de l'univers affranchie de préjugés, de sorte qu'il faut être persuadé qu'une pareille tentative ne conduirait à de meilleurs résultats dans aucun des astronomes ou géographes de son temps. Une analyse attentive de la trilogie de Dante nous donne la preuve que le poëte florentin ne saurait passer pour précurseur de Copernic. » Voici, par exemple, une réminiscence de quelque idée indo-égyptienne, qui place le mouvement des corps célestes dans les attributions d'intelligences spéciales. Aux V^e et VII^e chants de *l'Enfer*, le poëte se range à l'opinion scolastique : un ange ou même un dieu préside au cours de chaque planète. La même théorie se retrouve, plus nettement indiquée, dans le II^e chant du *Paradis*. Enfin la doctrine des sphères est exposée à diverses reprises dans les Ier, IIIe, XIe, XVe et XXVIe chants du *Purgatoire*. Ces sphères, au nombre de neuf, entourent chaque planète, d'après la théorie d'Eudoxe. Dante Allighieri les regarde comme des sphères de cristal translucides. Il adopte sans examen la plupart des systèmes imaginés par les Grecs. Pour lui, le premier mobile est la sphère qui se meut le plus rapidement; la sphère de la Lune possède le mouvement le plus lent. Il paraît ignorer les inclinaisons des orbites planétaires sur l'écliptique. *Le Banquet*, en particulier, renferme de meilleures indications théoriques, et Libri déclare que les éclipses, la rondeur de la Terre, les antipodes et la Voie lactée se trouvent décrits et expliqués avec beaucoup de justesse. L'auteur y donne la preuve qu'il connaît Pythagore, Aristote et Ptolémée, ainsi que les astronomes arabes Alfraganus, Avicenne, Algazal et Albumazar. Mais, comme on le voit, il n'est pas possible d'y trouver une base exacte et scientifique.

La ville de Florence a vu fleurir à la même époque un nouvel esprit réformateur en la personne de Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397-1482). Peschel a clairement établi l'influence que ce savant paraît avoir exercée sur la détermination du projet de Christophe Colomb. Les quelques arguments scientifiques produits par Colomb au synode de Salamanque puisaient leur source dans la correspondance que lui avait adressée autrefois Paolo Toscanelli, et surtout dans la communication qu'il lui avait faite de cartes marines dessinées suivant les règles d'Ératosthène.

Les importantes contributions du cardinal romain Nicolas de Cusa à l'histoire de la Géographie se trouvent indiquées avec détail dans le travail de M. Günther.

Nicolas Krebs (ou Chrypfs), né à Cues (ou Cusa), sur la Moselle, se distingua de bonne heure par son mérite extraordinaire et son talent incomparable. Disciple de Paolo dal Pozzo, il devint évêque de Trèves. Comme mathématicien, ses travaux dénotent une grande habileté dans les recherches abstraites. Schanz en a fait dernièrement ressortir les principaux résultats dans un Ouvrage qui permet de bien juger du rôle de Nicolas de Cusa comme novateur et réformateur scientifique. Ce rôle n'a pas été apprécié d'un commun accord par les historiens des Mathématiques. Montucla l'a considéré comme un véritable précurseur, Mädler comme un cerveau malade. Le jugement de R. Wolf, de Zurich, serait encore plus sévère. Il y a donc là une question à trancher.

La réforme et la révision fondamentale des vues cosmologiques devaient dépendre de l'adoption de deux hypothèses tout à fait dissemblables : fallait-il d'abord devancer suffisamment les observations et le calcul, pour laisser se dessiner simplement la nécessité absolue d'une réforme? ou bien fallait-il briser définitivement les liens philosophiques et religieux que la doctrine de Ptolémée avait étroitement réunis aux vues fondamentales de l'antiquité?

Peurbach, Müller, etc., appartiennent à la première école; Nicolas de Cusa rentrerait plutôt dans la seconde : aussi lui est-il resté la réputation d'un esprit indépendant.

L'Ouvrage d'après lequel on peut déterminer le caractère de sa Philosophie est le fameux Traité *De docta Ignorantia* (1565). L'auteur y énonce, pour la première fois, un singulier axiome dont il déduit qu'il ne saurait exister de centre de l'univers dans l'acception scolastique. Mais, s'il n'existe pas de centre, il ne pourrait y avoir de périphérie. Nous voyons ainsi exprimer une idée que l'on retrouve, sous une forme plus catégorique, dans les écrits de Bacon : l'univers peut être comparé à une sphère dont le centre est partout et la circonférence nulle part.

Nicolas de Cusa n'a pas enseigné la sphéricité de la Terre. Se basant évidemment sur des idées métaphysiques et non sur les résultats de l'observation la plus simple, il a contesté à la fois la sphéricité et le mouvement de notre planète.

De l'examen des doctrines de Cusa se dégage, comme conclusion, que la Terre a cessé d'occuper le centre absolu de l'univers et qu'elle devient une planète sur le même pied que les autres corps célestes. Aussi ne doit-on pas être surpris de voir Nicolas de Cusa partisan de la pluralité des mondes. Quant au mouvement de la Terre, il ne l'a pas proclamé d'une manière très-nette; il a pu faire allusion au mouvement de la Terre, mais il n'a pas parlé de son mouvement autour du Soleil. Nicolas de Cusa paraît avoir donné à ce mot le sens que nous lui retrouvons chez Nicole Oresme (mathématicien français, mort en 1382), qui, au Chapitre XLI de son *Traité de la sphère,* parle d'une *merveilleuse consideracion ou circuite de la Terre*.

Au milieu de toutes ces contradictions motivées par l'influence de la scolastique, il est intéressant de constater que Nicolas de Cusa a nié la constance de la précession et de la durée de l'année tropique.

Clément, zélé partisan de la philosophie de Cusa, a eu le mérite de se déclarer plus franchement pour le mouvement de la Terre. Bien que son travail ait été publié deux fois déjà, il se trouve reproduit dans la présente étude, en raison des importantes conclusions et théories qu'il renferme. « J'ai observé », dit-il, « qu'aucun mouvement ne saurait être circulaire et qu'il n'y a pas d'étoile qui décrive un cercle parfait. Le pôle du mouvement de la huitième sphère varie donc d'une manière continue. La Terre ne peut être fixe; elle se meut comme les autres étoiles. » Il attribue à Pythagore, bien que ce doive être à Philolaüs, la doctrine d'un mouvement de la Terre; mais, lorsqu'il l'étudie comme mouvement de rotation, il tombe dans la même erreur que tous les auteurs, sauf M. Th.-Henri Martin, ont commise. Cusa avait plus clairement adopté la rotation de la Terre autour de son axe. Quant au mouvement de la huitième sphère, Schanz paraît l'avoir très-exactement interprété : il faut y chercher la théorie de l'année tropique, relativement à l'année solaire moyenne. Le même géomètre a fort bien expliqué aussi les idées de Cusa relatives aux autres mouvements dont il est question dans le manuscrit de Clément. Voici les propositions de Cusa :

I. La Terre tourne, en vingt-quatre heures, de l'ouest vers l'est, autour d'un axe qui se confond avec l'axe du monde.

II. Elle est entraînée dans le même temps par la huitième sphère, qui tourne autour de l'axe, dans un sens opposé, et avec une vitesse angulaire double.

III. Le Soleil prend part à cette dernière révolution, mais avec un certain retard, qui, dans le cours d'une année, atteint juste 360 degrés.

Des affirmations aussi précises motivent une discussion approfondie, pour laquelle M. Günther a largement puisé dans le Mémoire de Schanz. Le mysticisme paraît avoir exercé son influence sur la métaphysique de Cusa; de là vient sans doute l'obscurité qui enveloppe quelques-unes de ses affirmations. Ce n'est pas le seul exemple que nous offre l'histoire des sciences. Combien de découvertes simplement entrevues ou pressenties, rejetées par les uns, reprises et proclamées par les autres! Nos contemporains, en possession de méthodes certaines, peuvent éviter aisément ce danger; mais, au moyen âge, l'esprit humain se trouve livré à lui-même, sans méthode pour se guider au milieu de préjugés de toute sorte.

S'il fallait en croire ce que l'on a dit de Regiomontanus, ce réformateur de l'Astronomie théorique et pratique aurait remporté le prix par-dessus tous. Voici, par exemple, le témoignage d'un mathématicien et géographe de Nuremberg, Jean Schoner : « La doctrine de Jean de Kœnigsberg enseigne que la Terre se meut parce que ce mouvement permet d'expliquer toutes les apparences des corps célestes. Aussi, dès que l'on admet le mouvement de la Terre et l'immobilité du ciel, ne rencontre-t-on plus de difficulté. L'auteur de *la Sphère* (Jean de Sacro Bosco) est de l'avis contraire. » Doppelmayr, à qui nous empruntons ce passage, poursuit en ces termes : « Dans un de ses manuscrits posthumes, Prätorius dit que Grégoire Hartmann, mathématicien de Nuremberg, avait reçu des propres mains de Regiomontanus un *Traité d'Astronomie* dont il avait ainsi formulé la conclusion : « Il est donc nécessaire » que le mouvement des étoiles éprouve quelque petite variation à » cause du mouvement de la Terre, ce qui paraît démontrer clairement » que Regiomontanus avait proclamé le mouvement de notre » planète. » Le fait ne nous paraît pas vraisemblable, et, aussi longtemps que nous n'aurons pas trouvé de preuve plus concluante dans les propres écrits du grand astronome, nous n'aurons pas besoin de croire que ce soit celle que Ptolémée a décrite à l'appui de son système.

Nous devons une courte mention à Domenico Maria, de Ferrare, professeur à Bologne. Cet illustre précepteur de Copernic fut également astronome distingué, et ses relations avec Scipion Ferro témoignent de son talent comme géomètre. Il eut, dit Libri, presque en même temps qu'un jurisconsulte napolitain, l'idée d'un changement dans l'axe de rotation de la Terre.

Partant de ses recherches sur la Géographie mathématique des contrées entourées de mers, il croyait avoir motivé l'hypothèse d'un changement dans l'axe de rotation de la Terre depuis le temps des Grecs, de sorte que toutes les hauteurs du pôle fussent diminuées. Gassendi, qui a signalé ce fait et lui attribue une grande importance, est disposé à y reconnaître, à part certaines erreurs, un progrès marqué, eu égard au point de départ. Domenico a tiré lui-même de son hypothèse une curieuse conséquence : « Par suite de ce mouvement », dit-il, « les zones actuellement habitables deviendront désertes, et les pays que brûle aujourd'hui le Soleil éprouveront enfin la fraîcheur de nos climats; pareille révolution n'exigera pas moins de trois cent quatre-vingt-quinze mille ans. » Cette théorie a pu diviser les physiciens et les géologues. Adhémar et Stadius y ont ajouté foi; mais Guillaume Gilbert, inventeur de la théorie du grand aimant terrestre, a formellement rejeté l'hypothèse de Domenico Maria.

Ce dernier devait être éclipsé par un de ses contemporains, plus jeune que lui de dix ans, Girolamo Frascatoro, de Vérone (1483-1553), dont l'œuvre capitale parut sept ans avant les *Révolutions* de Copernic. Libri en a ainsi résumé la partie générale : « En combattant les épicycles, il a aplani la route au système de Copernic. »

Il a été publié une édition très-abrégée de la *Cosmologie* de Fracastor, intitulée *Homocentrica* (1538). On y trouve l'exposé d'un système dont le plan avait été tracé par un de ses amis et compatriotes, J.-B. Turrius, ravi à son affection par une mort prématurée. Il est à observer que Fracastor n'a pas songé à parler du mouvement de la Terre, mais il se montra ennemi du système de Ptolémée et devint, à ce titre, précurseur de Copernic.

La Préface de son Livre renferme le dilemme de l'Astronomie : ceux qui emploient les sphères homocentriques dans le sens d'Eudoxe et de Calippe ne peuvent les mettre en harmonie avec les faits observés; les partisans de la théorie d'Hipparque et de Ptolémée sont plus heureux à ce point de vue, mais l'hypothèse de cercles excentriques doit être rejetée comme contraire à l'esprit philosophique.

Cependant un examen plus attentif permet de constater que le principe de sa méthode ne s'écarte pas notablement des systèmes d'Eudoxe et de Calippe. « Personne ne doit douter que les étoiles soient établies et fixées à une certaine sphère qui, par suite, les entraîne avec elle. » On trouverait encore d'autres réminiscences des théories d'Aristote et d'Eudoxe, et en particulier, le fait

« qu'une sphère en entraîne une autre sans éprouver de résistance ». Une série de recherches de détail se relie à ce problème général, et l'on peut y remarquer, pour l'histoire de la Mécanique, une importante explication des principes phoronomiques élémentaires. La nouveauté la plus curieuse est une démonstration de ce que l'on appelait *mouvement de trépidation*, fondée sur l'emploi d'une orbite elliptique. On y trouve aussi une discussion sur un mouvement hélicoïdal se rapprochant d'oscillations hors du cercle.

La théorie pure est exposée dans un deuxième volume. On y constate que l'auteur avait une notion ingénieuse du système planétaire. Au Chapitre VIII, il étudie les causes de la diminution de la déclinaison du Soleil. Il montre que, depuis Ptolémée, l'obliquité de l'écliptique avait diminué de vingt-trois minutes. Il est le premier, dit Mädler, qui ait remarqué, pour l'obliquité de l'écliptique, une diminution que Peurbach avait simplement soupçonnée.

Fracastor peut être considéré comme précurseur de Laplace, qui établit la théorie mathématique de la variation séculaire périodique de l'obliquité de l'écliptique. Il ne faudrait toutefois rien exagérer, parce que l'insuffisance des moyens d'observation ne lui a pas permis de formuler de propositions bien catégoriques.

Léonard de Vinci n'a pas été célèbre seulement comme peintre, mécanicien et aviateur : il a eu d'ingénieux aperçus dans l'étude des sciences géographiques. Bien qu'il ait été plus ancien que Frascator, puisque les meilleures biographies fixent sa naissance en 1452 et sa mort en 1519, les études auxquelles il s'est livré dans les sciences tiennent une plus large place et méritent plus d'attention que celles de Fracastor. En Astronomie, dit Libri, il a soutenu, avant Copernic, la théorie du mouvement de la Terre. Mais le passage de Léonard de Vinci paraît avoir été mal interprété ; et, en effet, Groth nous dit nettement, bien que d'une manière trop concise, que Vinci avait déjà une notion de l'influence du mouvement de la Terre sur la chute libre des corps. Ceci toutefois ne paraît pas devoir être adopté sans restriction. Les lois de ce phénomène n'étaient pas encore étudiées, et il ne faut voir sans doute en cette assertion qu'une preuve que Léonard de Vinci aurait voulu pénétrer un sujet qui, deux siècles plus tard, allait être la pomme de discorde entre Newton et Hooke. L'explication que Venturi a cherché à en donner est encore d'une concision extrême ; Whewell paraît avoir beaucoup mieux saisi le sens véritable. « Léonard », dit-il, « démontra vers l'année 1510 comment un corps peut suivre, dans sa chute, une ligne spirale ou hélicoïdale, autour de l'axe d'une sphère qui tourne, tandis que le mouvement de ce corps, observé d'un point de la surface sphérique, reste dirigé suivant une ligne droite passant par le centre de la sphère. Il donne ainsi la preuve qu'il avait devant les yeux l'image du mouvement de la Terre, et qu'il voulait éloigner les difficultés qui devaient naître de la simultanéité de deux mouvements, celui du corps et celui de la sphère. »

Ce passage nous oblige à reconnaître que Léonard de Vinci avait accepté déjà l'hypothèse de la rotation. Il n'est question ici que du mouvement autour de l'axe de la Terre; mais, quant à saisir comment il se le représentait, et quelle base il lui donnait, il nous est impossible d'en juger. En tout cas, le fait dont nous parle Venturi doit être plutôt regardé comme preuve de l'érudition d'un savant distingué et de l'heureuse application du théorème bien connu du parallélogramme des mouvements à un exemple de nature à frapper les regards. Le problème dont il s'agit consiste, en effet, dans la construction de la courbe que décrirait un mobile, tombant librement d'un point situé sur le plan de l'équateur, et supposé entraîné par le mouvement uniforme d'un observateur placé à l'origine sur le même plan. Léonard de Vinci ne connaissait pas la loi de la chute des corps, et il a supposé le mouvement de chute uniforme. Le problème peut aisément se transformer, soit au point de vue géométrique, comme l'a traité Poleni, soit enfin au point de vue analytique, comme l'a défini Dienger; c'est, en effet, la courbe que décrit un chien qui court après son maître; en d'autres termes, c'est le premier exemple de la *courbe de poursuite*.

Une généralisation du problème a conduit Léonard de Vinci à la notion des courbes à double courbure, qu'il a su distinguer des courbes planes, seul progrès accompli dans cette voie depuis Pappus.

La conclusion à tirer de toutes les études qui précèdent, c'est que, longtemps avant la publication des œuvres de Copernic, les idées de ce grand astronome s'étaient fait jour, une à une, sans arriver à s'imposer définitivement à l'esprit humain. On les retrouve exprimées par Hieronimo Tallavia de Reggio, Widmannstadt, Celio Calcagnini. Enfin, au témoignage de Gassendi, le système héliocentrique comptait à Rome, avant 1536, de nombreux partisans.

Nous voici arrivés au terme de ce premier Mémoire, qui avait pour objet de montrer comment les deux doctrines fondamentales de la Géographie mathématique, exprimées par la sphéricité et le double mouvement de notre planète, se sont graduellement développées comme donnée scientifique et comme méthode de représentation. Le cachet d'érudition qui distingue ce travail lui donnera un crédit puissant auprès des personnes qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques. H. B.

WOLF (R.). — GESCHICHTE DER ASTRONOMIE. München, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. — 1 vol. in-8°, XVI-815 p.

Cet Ouvrage forme le seizième volume de la grandiose publication, entreprise sous les auspices du roi Maximilien II, d'une « Histoire des Sciences en Allemagne », dont nous avons déjà analysé, dans ce *Bulletin* (¹), le tome contenant l'*Histoire des Mathématiques*, par Gerhardt. Si notre jugement sur ce dernier livre a dû sembler peu favorable, nous ne saurions, en revanche, accorder trop d'éloges à celui dont nous nous occupons aujourd'hui, et que l'on peut certainement considérer comme une des gloires de notre littérature historique.

L'un des nombreux écueils auxquels Gerhardt s'est heurté, et qui ont failli faire échouer plusieurs de ses confrères, Wolf a su l'éviter par un hardi détour. N'étant pas lui-même Allemand, dans le sens géographique du mot, il s'est tout d'abord affranchi des restrictions étroites que le plan général de la publication semblait vouloir imposer aux auteurs chargés de la rédaction des diverses parties; le livre qu'il nous présente est une histoire universelle de l'Astronomie, dans laquelle, à la vérité, il offre une place d'honneur aux produits du génie allemand. Les deux Traités présentent encore une autre différence caractéristique. Tandis que Gerhardt

(¹) *Voir* p. 201 du présent volume.

se borne presque exclusivement à enregistrer les extensions fondamentales de notre science, en isolant ainsi de tous les termes intermédiaires chacune des grandes découvertes, de manière à les présenter comme des faits dépourvus de tout lien mutuel, Wolf, au contraire, attache à la recherche et à l'exposition de ces termes secondaires une importance toute particulière, et déroule pour cela devant le lecteur toute la richesse de ses connaissances historiques, enchaînant ainsi l'attention et la tenant continuellement en éveil. En troisième lieu, l'auteur allemand, de parti pris sans doute, ne fait pas la moindre mention de ses contemporains, tandis que l'auteur suisse a voulu que son Ouvrage pût aussi servir en quelque sorte de répertoire de tous les travaux, tant anciens que modernes, concernant la science historique, et ce consciencieux travail suffirait déjà à lui seul pour assurer à l'œuvre de l'auteur une importance hors ligne.

Le volume qui nous occupe est divisé en trois Livres, ayant pour objets respectifs «l'Astronomie chez les peuples de l'antiquité», «la Réforme de l'Astronomie», et «l'Astronomie moderne». L'auteur applique autant qu'il est possible à chacun de ces trois Livres le même système de subdivision en quatre Chapitres, dont le premier est consacré à l'Astronomie théorique, le second à l'Astronomie métrique, le troisième à l'Astronomie topographique, tandis que, dans le quatrième, sont énumérées et analysées les productions scientifiques de la période correspondante.

Un avantage capital par lequel le livre de M. Wolf se distingue des autres Ouvrages traitant de l'histoire des sciences exactes, c'est son mode d'exposition, qui satisfait à toutes les exigences de la rigueur mathématique, tout en restant à la portée du public ordinaire. Tandis que le texte du récit historique est écrit dans un langage intelligible pour tous, on trouve, dans les notes au bas des pages, une richesse extraordinaire de matériaux pour l'explication des détails spéciaux au sujet. C'est là que sont décrits minutieusement les instruments et les méthodes de calcul. Nous citerons, comme exemples, l'exposition de l'Arénaire d'Archimède (p. 36), l'analyse trigonométrique du mouvement épicycloïdal (p. 57), la digression sur le calcul des transversales de Ptolémée (p. 119), l'explication si claire du *torquetum* et du planisphère (p. 161 et suiv.), l'élucidation du procédé de Rothmann pour traiter le dernier cas de congruence de la Trigonométrie sphérique [1] (p. 345), la prostaphérèse (p. 348), etc., etc. Qu'un homme d'une érudition universelle comme M. Wolf, dans le cours des longues études préliminaires qu'il a consacrées pendant tant d'années à la recherche des matériaux de son livre, ait dû recueillir un grand nombre de faits nouveaux et importants, c'est à quoi l'on devait s'attendre; pour en donner quelques exemples, citons ses renseignements inattendus sur la Société astronomique de Cassel, que le landgrave Guillaume avait su rassembler autour de lui (p. 266 et suiv.), les documents qu'il donne sur l'invention du niveau (p. 573) et sur celle de la lunette montée parallactiquement (p. 589). Nous pourrions indiquer encore une foule de détails non moins remarquables; mais, par cette même raison, nous nous voyons forcé à les passer sous silence et à renvoyer le lecteur à l'Ouvrage lui-même.

Nous rappellerons seulement encore qu'ici le dessein poursuivi, mais avec un succès bien incomplet, par l'auteur dont nous nous sommes occupé précédemment se trouve entièrement réalisé par M. Wolf, qui a su faire ressortir la dépendance intime entre l'histoire de la science et celle de la culture générale; il suffira, pour s'en convaincre, de lire ses remarques sur les superstitions touchant les comètes, ainsi que les éclaircissements sur la sphère de Heynfogel.

Pour donner au lecteur de cette analyse qui n'aurait pas encore l'Ouvrage lui-même entre les mains une idée superficielle au moins de la marche de l'exposition, nous allons prendre un Chapitre quelconque et analyser les objets qui y sont traités. Nous choisirons le Chapitre VI, le deuxième du second Livre [2]. Ce Chapitre commence par les progrès du calcul numérique, inaugurés par Stifel, Stevin et Bürgi, où il est particulièrement question de la multiplication abrégée; l'auteur esquisse ensuite le développement de la Trigonométrie plane et sphérique; il s'étend avec détail sur le procédé de calcul par la prostaphérèse et sur l'invention des

---

[1] A côté de ce procédé, on peut citer, comme terme de comparaison, la théorie du cas polairement conjugué, chef-d'œuvre de simplicité mathématique, que l'on doit à Johann Werner, et dont l'auteur de cet article s'est longuement occupé dans le cinquième fascicule de ses *Studien zur Geschichte der mathematischen und physikalischen Geographie*.

[2] *Voir* la division indiquée plus haut.

logarithmes, qui en sont précisément la contre-partie, et il termine cette première Partie, principalement mathématique, par l'énumération des machines à calcul remarquables au point de vue historique. L'auteur passe de là aux instruments d'Optique, dont il tire au clair l'ancienne histoire, plus ou moins fabuleuse; il montre que les lunettes ont été ajustées aux instruments de mesure et ont été reconnues comme pouvant servir aux observations de jour. Arrivant au perfectionnement des méthodes de mesure, il donne un aperçu des idées de Nonius, de Brahe, de Vernier, et fait voir comment elles ont conduit à compléter le principal instrument de cette époque, le quadrant azimutal; vient alors une histoire détaillée de l'invention de l'horloge à pendule (1). A cette histoire succède la description des méthodes d'observation; les différents procédés employés alors pour la détermination des coordonnées géographiques sont examinés à fond; à une analyse des catalogues d'étoiles, trop peu appréciés jusqu'ici, dus aux astronomes hessois, se rattachent « les observations de Tycho et de Hevel », et à celles-ci « les mesures de degrés de Snellius, de Norwood et de Riccioli ». Enfin, dans les deux derniers paragraphes, l'auteur rend compte des progrès effectués dans les méthodes de projection des cartes et dans le calcul des parallaxes. On voit que la lecture de ce Chapitre nous offre une image claire de l'état de l'Astronomie pratique dans l'intervalle des années 1550 et 1650.

Vouloir adresser des critiques quelconques à un Ouvrage si riche en matériaux et si merveilleusement rempli, cela pourrait passer pour une entreprise tout à fait superflue. Et, en effet, nous n'aurions pas cru avoir qualité pour cela, si nous n'avions pas tenu à démontrer par là l'ardeur que nous avons apportée à l'étude approfondie de ce livre. D'ailleurs, l'examen des détails n'aurait eu au-

(1) L'auteur de cet article croit qu'il est de son devoir, dans l'intérêt de la vérité, de faire observer que l'opinion adoptée par lui dans ses *Vermischte Untersuchungen* (voir *Bulletin*, XI, 108), et partagée aussi par M. Wolf, suivant laquelle Galilée aurait complétement échoué dans ses tentatives pour l'invention d'un échappement automatique, n'est peut-être pas bien démontrée. Une certaine source de renseignements avait été indiquée alors par nous comme n'ayant pu être consultée, et d'après une communication verbale d'un des savants les plus versés dans l'histoire de Galilée, M. Wohlwill, à Hambourg, cette même source doit fournir d'importants éclaircissements sur cette question.

cune raison d'être s'il se fût agi d'un traité esquissant à grands traits la marche générale de l'histoire; mais, en face d'un auteur qui consacre tant d'attention à relever les plus minces détails dès qu'ils lui semblent présenter quelque intérêt historique, nous croyons par nos remarques entrer pleinement dans ses intentions.

A la page 113, l'auteur ne s'étant pas prononcé sur l'origine du mot *colure*, nous ferons observer que l'étymologie de ce mot, objet de tant de contestations, a été définitivement établie par Heis dans son journal hebdomadaire (*Wochenschrift*).

L'assertion de la page 101 : « Tandis que Hartmann était venu du dehors, Jean Schoener ou Schoner, au contraire, était un vrai enfant de Nuremberg », nous paraît douteuse; nous avions cru jusqu'ici que Schoner était natif de la petite ville de Karlstadt, dans le voisinage de Wurzbourg.

Lorsqu'il est question, page 245, de la part que Longomontanus fait au système de Copernic, en conservant du moins la rotation de la Terre autour de son axe, il eût été bon de faire ressortir encore davantage l'importance historique de ce système de conciliation : deux savants, dont M. Wolf n'a pas parlé, le mathématicien bohême Origanus et le physicien Patritius, ont donné leur adhésion à ce système.

L'article sur l'attraction des montagnes, malgré la haute importance que cette question a prise dans ces derniers temps au point de vue de la Géodésie astronomique, n'a pas été traité avec tous les développements désirables. Le fait que Bouguer a le premier observé ce phénomène n'aurait pas dû être passé sous silence, non plus que la monographie complète de Keller sur ce sujet (p. 628).

A la page 763, l'*Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, publié par Hindenburg, est cité avec cette mention, qu'il contient beaucoup de choses intéressantes pour l'Astronomie. On y rencontre, en effet, plusieurs Mémoires dont l'auteur ne s'est pas servi : par exemple, un Mémoire de Beitler, à Mitau, sur la détermination de la hauteur du pôle, et un travail qui n'est pas sans importance, d'un astronome amateur bien connu, le comte Brühl, sur les cercles astronomiques, travail qui, joint aux annotations de Zach sur les motifs qui ont à cette époque fait adopter les cercles entiers à la place des secteurs, offre au lecteur bien des points de vue nouveaux.

Au sujet de quelques autres désaccords entre l'auteur et nous, relatifs à d'autres parties du livre, nous nous étions déjà expliqué l'un et l'autre dans l'*Allgemeine Zeitung*.

Chaque fois que nous ouvrons l'*Histoire de l'Astronomie* de Wolf, c'est pour nous un sentiment de joie de voir que les études sur l'histoire des Mathématiques s'y trouvent enfin assises sur une base si sûre pour leurs progrès futurs. Nous espérons que les lecteurs du *Bulletin* retrouveront aussi dans notre article l'impression de ce sentiment. Nous terminerons maintenant en faisant des vœux pour que l'auteur chargé de l'*Histoire de la Physique*, qui doit encore paraître dans la grande collection bavaroise, fasse une œuvre digne de celle de son prédécesseur. Nous ne pouvons faire pour lui un meilleur souhait.

S. GÜNTHER.

ENNEPER (A.). — UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE FLÄCHEN MIT PLANEN UND SPHÄRISCHEN KRÜMMUNGSLINIEN (¹).

Dans ce travail étendu, l'auteur s'est proposé de reprendre à nouveau l'importante question de l'étude et de la recherche des surfaces à lignes de courbure planes et sphériques. Après un historique rapide dans lequel sont mentionnés les travaux de Joachimsthal, de MM. O. Bonnet et Serret, M. Enneper définit le but de son travail et indique la marche qu'il emploiera. Cette marche est toute différente de celle qui a été suivie par les inventeurs, et on peut la caractériser par ce fait, qu'au lieu d'avoir à intégrer des équations aux dérivées partielles, M. Enneper ne rencontre, dans sa méthode, que des équations différentielles ordinaires, équations que l'on peut toujours intégrer en donnant des formes convenables aux fonctions arbitraires qui y figurent. L'auteur étudie, d'une manière très-détaillée, les différentes espèces de surfaces à lignes de courbure planes; mais un seul article est consacré à des surfaces à lignes de courbure sphériques, celles pour lesquelles les lignes

(¹) *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, t. XXIII, 1878.

de courbure de l'un des systèmes sont planes et les autres sphériques.

Un dernier article du Mémoire est consacré à la généralisation de la notion des surfaces parallèles. On sait que Steiner, dans un Mémoire inséré au *Journal de Crelle*, a fait connaître une extension de la théorie des surfaces parallèles, qu'il a obtenue en considérant deux surfaces quelconques, et en appelant points correspondants sur ces deux surfaces les points pour lesquels les plans tangents sont parallèles. M. Enneper a établi, au sujet de ce mode de correspondance, un théorème curieux dont il fait l'application aux surfaces à lignes de courbure planes. G. D.