Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

G. Darboux

Sur le mouvement d'une figure invariable ; propriétés relatives aux aires, aux arcs des courbes décrites et aux volumes des surfaces trajectoires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 333-356

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_333_1>

SUR LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE INVARIABLE; PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX AIRES, AUX ARCS DES COURBES DÉCRITES ET AUX VOLUMES DES SURFACES TRAJECTOIRES;

PAR M. G. DARBOUX.

Le travail très-intéressant de M. Liguine a rappelé mon attention sur des recherches que j'ai faites, il y a assez longtemps, sur ce sujet et qui ont été communiquées, dans la séance du mercredi 5 avril 1876, à la *Société Mathématique de France*. Plusieurs des propositions qui vont suivre ont été introduites dans mon enseignement et données comme exercices aux élèves de l'École Normale. Quelques-unes ne me paraissent pas avoir été publiées par d'autres géomètres : je prends donc la liberté de les reprendre et de les développer ici (²).

(¹) Voir, par exemple, TODHUNTER, *A Treatise on the Integral Calculus*, 4ᵉ édition, 1874, p. 163, ex. 37.

(²) Pour compléter l'historique de M. Liguine, nous signalerons deux énoncés très-remarquables, dus à M. Zeuthen et publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathéma-*

I.

Considérons d'abord une figure plane mobile dans son plan et rapportons-la à deux axes rectangulaires Ox, Oy, liés invariablement avec elle. Soient, au contraire, $O'x_1$, $O'y_1$ deux axes rectangulaires fixes. Un point M de la figure mobile aura, par rapport aux axes Ox, Oy, des coordonnées constantes, que je désignerai par x, y, et par rapport aux axes $O'x_1$, $O'y_1$, des coordonnées variables, que je désignerai par x_1, y_1. On aura entre x, y, x_1, y_1 des relations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = (x - \alpha)\cos\omega - (y - \beta)\sin\omega, \\ y_1 = (x - \alpha)\sin\omega + (y - \beta)\cos\omega, \end{cases}$$

α, β, ω étant des fonctions d'une même variable. On peut considérer, si l'on veut, α, β comme des fonctions de ω, dont la connaissance détermine la nature du mouvement de la figure mobile dans son plan.

Les plus intéressants des mouvements que l'on a à considérer jouissent d'une propriété remarquable : ils sont périodiques ou fermés, suivant l'expression adoptée par M. Liguine. On reconnaîtra aisément, quand le mouvement sera défini par les formules (1), s'il est périodique. Si les fonctions α, β reprennent la même valeur lorsque ω augmente de $2n\pi$, n étant entier, la figure mobile, après avoir accompli n révolutions, viendra occuper sa position primitive. n peut être positif, nul ou négatif; je n'insiste pas sur ces distinctions, qui ont été indiquées dans le Mémoire précédent.

Ces remarques préliminaires étant faites, considérons deux positions distinctes P_0, P_1 de la figure mobile, caractérisées par les valeurs ω_0, ω_1 de la variable ω. Nous allons déterminer l'aire comprise entre l'arc M_0M_1, décrit par un point M de la figure mobile, dans le passage de la première position à la seconde, et les deux rayons vecteurs $O'M_0$, $O'M_1$, qui joignent le point fixe O' aux ex-

---

tiques, 1871, p. 90. Le premier des théorèmes de ce savant géomètre, convenablement développé, pourrait donner tout ce que l'on sait sur les aires décrites par les différents points d'une figure plane mobile dans son plan.

trémités de l'arc $M_0 M_1$. Cette aire $\mathcal{A}$ sera donnée par la formule

$$(2)\qquad 2\mathcal{A} = \int_{M_0}^{M_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1),$$

x_1, y_1 étant les coordonnées du point décrivant par rapport aux axes fixes. Or, si l'on pose

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha + \dfrac{d\beta}{d\omega}, \\ \eta = \beta - \dfrac{d\alpha}{d\omega}, \end{cases}$$

ξ, η sont les coordonnées par rapport aux axes mobiles du centre instantané de rotation, et l'on a

$$\begin{aligned} dx_1 &= -(x-\xi)\sin\omega\, d\omega - (y-\eta)\cos\omega\, d\omega, \\ dy_1 &= (x-\xi)\cos\omega\, d\omega - (y-\eta)\sin\omega\, d\omega, \end{aligned}$$

et par suite

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = (x-\alpha)(x-\xi)\,d\omega + (y-\beta)(y-\eta)\,d\omega,$$

ce qui donne

$$(4)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{A} = (x^2+y^2)\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega - x\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha+\xi)\,d\omega \\ \qquad\qquad - y\displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1}(\beta+\eta)\,d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1}(\alpha\xi+\beta\eta)\,d\omega. \end{cases}$$

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \omega_1 - \omega_0 = \theta, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha+\xi)\,d\omega \;= 2\mathrm{A}, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\beta+\eta)\,d\omega \;= 2\mathrm{B}, \\ \displaystyle\int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha\xi+\beta\eta)\,d\omega = 2\mathrm{C}. \end{cases}$$

θ sera l'angle dont la figure mobile aura tourné dans le passage de la première position à la seconde, et l'on aura

$$(6) \qquad \mathcal{A} = \frac{\theta}{2}(x^2 + y^2) - Ax - By + C,$$

A, B, C étant des intégrales plus ou moins difficiles à calculer, mais indépendantes de x et de y. La formule précédente exprime donc le théorème suivant :

Quand une figure plane qui se meut dans son plan passe d'une position P_0 *à une autre position* P_1, *l'aire qu'a décrite, dans le passage de la première position à la seconde, le rayon vecteur qui joint un point quelconque* M *de la figure mobile à un point fixe du plan, est égale à la moitié de l'angle dont la figure a tourné, multipliée par la puissance du point* M *par rapport à un cercle déterminé de la figure mobile.*

Il y a plusieurs remarques à présenter sur ce théorème.

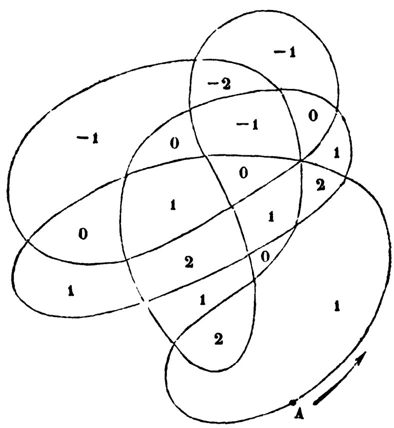
D'abord il peut se faire que les trajectoires des points de la figure mobile aient une forme compliquée, que ces trajectoires se coupent elles-mêmes en un ou plusieurs points, et l'on peut se demander quelle sera alors la signification géométrique de l'intégrale

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int(x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1),$$

que nous avons calculée. Voici la règle que l'on doit à Gauss, et qui permet de répondre à cette question :

Considérons en premier lieu une courbe fermée, par exemple celle qui est représentée (*fig.* 1), et supposons que l'intégrale soit prise, la courbe étant parcourue dans le sens de la flèche. Alors on connaît le sens dans lequel doit être parcouru chacun des traits de courbe qui séparent les différentes régions dans lesquelles le plan est divisé. On déterminera des coefficients pour chacune de ces régions de la manière suivante : on adoptera le coefficient o pour l'aire extérieure, et l'on conviendra que, pour deux régions quelconques séparées par un des traits de la courbe, la différence des coefficients sera l'unité, le plus grand coefficient étant affecté à l'aire située à la gauche du trait de courbe, c'est-à-dire à la gauche d'un observateur qui parcourt, dans le sens indiqué par la flèche, la portion de la courbe qui sépare les deux régions. Par exemple, si l'on part du point A, l'aire extérieure ayant le coefficient 0, la région située à gauche de A devra être affectée du coefficient 1. En continuant à parcourir la courbe et en appliquant la règle toutes

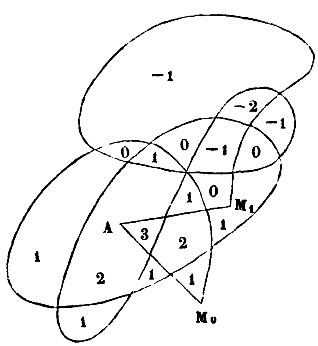
Fig. 1.



les fois qu'il y aura lieu, on déterminera successivement les coefficients qui conviennent à chaque région.

Cette opération étant terminée, l'intégrale $\mathcal{A}$ représentera la

Fig. 2.



somme des aires de toutes les régions, multipliées chacune par le coefficient qui lui appartient, et c'est à cette somme que nous donnerons le nom d'*aire de la courbe*. On voit qu'elle est indépendante de l'origine des coordonnées choisies.

Si la courbe n'est pas fermée et qu'elle s'étende d'un point M_0 à un point M_1, comme dans la *fig.* 2, on la fermera en ajoutant les deux rayons vecteurs que joignent les points M_0, M_1 à l'origine des coordonnées A, et en supposant qu'on revienne de M_1 à M_0 par le chemin $M_1 A M_0$.

Après avoir rappelé la signification géométrique de l'intégrale $\mathcal{A}$, il nous reste à dire quelques mots des coefficients A, B, qui figurent dans la formule (6) et qui sont définis par les équations (5). On a

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} (\alpha\, d\omega + d\beta),$$

et, par suite, β_0, β_1 désignant les valeurs de β pour $\omega = \omega_0$, $\omega = \omega_1$, on a

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \alpha\, d\omega = \beta_0 - \beta_1 + \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega,$$

ce qui donne

$$A = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}.$$

On aura de même

$$B = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\, d\omega + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}.$$

Les intégrales qui figurent dans ces expressions de A, B ont une signification très-simple.

Nous avons vu que ξ et η sont les coordonnées du centre instantané rapportées aux axes mobiles. Si l'on considère la courbe lieu du centre instantané dans la figure mobile, le centroïde mobile de M. Liguine, soient R son rayon de courbure et R' celui de la courbe sur laquelle elle roule, ou centroïde fixe. On sait que, lorsqu'on passe de la position actuelle de la figure mobile à la position infiniment voisine, on a

$$d\omega = ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

ds étant la différentielle de l'arc de l'une quelconque des deux centroïdes. Par suite, si l'on suppose que l'arc du centroïde mobile ait en chaque point une densité égale à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$, le centre de gravité d'un arc de cette courbe aura ses coordonnées ξ', η' déterminées par les formules

$$(7) \qquad \xi'(\omega_1 - \omega_0) = \xi'\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega, \quad \eta'\theta = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\, d\omega.$$

Ce point ξ', η' est précisément celui que Steiner a nommé *centre de gravité des courbures*. Les valeurs de A et de B deviendront

$$A = \theta\xi' + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2},$$

$$B = \theta\eta' + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2},$$

et par conséquent la formule (6) pourra s'écrire

$$\mathcal{A} = \frac{\theta}{2}\left[x^2 + y^2 - 2\left(\xi' + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2\theta}\right)x - 2\left(\eta' + \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\theta}\right)y\right] + C.$$

Tous les cercles lieux des points de la figure mobile, dont les rayons vecteurs auront décrit la même aire dans le passage de la position P_0 à la position P_1, auront donc pour centre le point dont les coordonnées, par rapport aux axes mobiles, sont

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \xi' + \dfrac{\beta_0 - \beta_1}{2\theta}, \\ y = \eta' + \dfrac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\theta}. \end{cases}$$

Ces formules se simplifient dans deux cas :

1° Si l'on suppose que le point O', origine des rayons vecteurs, soit le centre de la rotation finie par laquelle on peut amener la figure mobile de la première position à la seconde, on aura $\beta_0 = \beta_1$, $\alpha_0 = \alpha_1$ et, par suite

$$x = \xi', \quad y = \eta',$$

ce qui donne le théorème suivant :

L'aire décrite dans le passage d'une position P_0 *de la figure mobile à toute autre* P_1, *par le rayon vecteur que joint un point quelconque* M *de la figure mobile au centre de la rotation finie qui peut amener la figure de* P_0 *en* P_1, *est égale à la moitié de la* *rotation totale de la figure multipliée par la puissance du point* M *par rapport à un cercle déterminé ayant son centre au centre de gravité des courbures de l'arc de la roulette mobile décrit par le centre instantané dans le passage de la première position à la seconde.*

2° Si le mouvement est périodique et que l'on considère toute la période pendant laquelle les différents points décrivent des courbes finies, on aura encore ici $\beta_1 = \beta_0$, $\alpha_0 = \alpha_1$. Donc :

Quand un mouvement est périodique, les aires des courbes fermées décrites par les différents points de la figure mobile sont égales respectivement à la moitié de la rotation totale multipliée par la puissance du point décrivant par rapport à un cercle fixe de la figure mobile dont le centre est le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

C'est le théorème démontré par Steiner dans le cas où les roulettes sont des courbes convexes.

Après avoir étudié les différentes formes de la proposition générale, examinons les conséquences qu'on peut en déduire.

Soient S_1, S_2, S_3 les aires relatives à trois points de la figure mobile en ligne droite M_1, M_2, M_3. Nous pouvons supposer que ces points soient sur la droite $y = 0$; en désignant leurs abscisses par x_1, x_2, x_3, nous aurons

$$S_1 = \frac{\theta}{2} x_1^2 - A x_1 + C,$$

$$S_2 = \frac{\theta}{2} x_2^2 - A x_2 + C,$$

$$S_3 = \frac{\theta}{2} x_3^2 - A x_3 + C,$$

et, en éliminant A et C,

$$S_1(x_2 - x_3) + S_2(x_3 - x_1) + S_3(x_1 - x_2) = \frac{\theta}{2}(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3),$$

ou, en désignant par (ik) la distance M_i, M_k, prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant le sens dans lequel elle est portée,

$$(9) \qquad S_1(23) + S_2(31) + S_3(12) + \frac{\theta}{2}(12)(23)(31) = 0.$$

Par exemple, si l'on suppose que les points 2, 3 décrivent une même courbe convexe analogue à l'ellipse, on a $S_2 = S_3$, $\theta = 2\pi$, et, par suite,

$$S_2 - S_1 = \pi(12)(31).$$

C'est le théorème de M. Holditch.

Soient maintenant S_1, S_2, S_3, S_4 les aires relatives à quatre points 1, 2, 3, 4 de coordonnées $x_1, y_1, \ldots, x_4, y_4$. En écrivant les expressions de ces aires au moyen de la formule (6), et éliminant les constantes A, B, C, on aura la relation

$$\begin{vmatrix} S_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ S_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ S_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ S_4 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\theta}{2} \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on peut développer comme il suit : si l'on désigne par (123) l'aire du triangle formé par les points 1, 2, 3, prise avec le signe + ou le signe —, suivant que le sens (123) autour du triangle sera celui des rotations positives ou négatives, on aura

$$(10) \qquad S_1(234) + S_2(341) + S_3(412) - S_4(123) = (123)\frac{\theta}{2}P,$$

P désignant la puissance du point 4 par rapport au cercle circonscrit au triangle (123). C'est la généralisation du théorème démontré par M. Leudersdorf pour les mouvements fermés.

II.

Après avoir étudié les aires décrites par les différents points de la figure mobile, nous allons considérer les différentes courbes enveloppées par les droites de cette figure.

Soit

$$(11) \qquad ux + vy + w = 0$$

l'équation d'une droite rapportée aux axes mobiles. On peut toujours supposer que l'on ait

$$u^2 + v^2 = 1.$$

L'équation de cette droite, rapportée aux axes fixes, sera

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 = 0, \tag{12}$$

où l'on aura

$$u_1 = u \cos\omega - v \sin\omega,$$
$$v_1 = u \sin\omega + v \cos\omega,$$
$$w_1 = w + u\alpha + v\beta,$$

et, par conséquent,

$$u_1^2 + v_1^2 = 1.$$

Le point où la droite mobile touche son enveloppe est défini par l'équation (12), jointe à la suivante :

$$x_1\, du_1 + y_1\, dv_1 + d\omega_1 = 0,$$

ce qui donne, pour les coordonnées de ce point,

$$x_1 = \quad v_1 \left(u \frac{d\alpha}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega}\right) - u_1 w_1,$$
$$y_1 = -u_1 \left(u \frac{d\alpha}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega}\right) - v_1 w_1.$$

En différentiant ces formules, on obtiendra

$$\left\{\begin{aligned} dx_1 &= \quad v_1 \left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega, \\ dy_1 &= -u_1 \left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d\ \beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

ω étant considéré comme la variable indépendante.

Ces relations conduisent à différentes conséquences que je me contenterai d'énoncer; car elles sont bien connues et se démontrent aussi facilement par la Géométrie que par l'Analyse.

Si à un instant donné on considère toutes les droites de la figure mobile, celles qui touchent leur enveloppe en un point de rebroussement passent par un point A *dont les coordonnées, par rapport aux axes mobiles, sont*

$$x = \alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}, \quad y = \beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}.$$

Le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite quelconque est *le pied de la perpendiculaire abaissée du point* A *sur la normale à l'enveloppe.*

Le point A *est défini géométriquement par la propriété suivante. Le cercle ayant pour diamètre la droite qui réunit le point* A *au centre instantané, cercle qui est le lieu des points de rebroussement des enveloppes de droites, est symétrique, par rapport à ce centre, du cercle lieu des points dont les trajectoires ont une inflexion.*

Nous nous bornerons à développer ce qui concerne les arcs des courbes enveloppes. On aura, en employant les formules (13),

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

ds désignant la différentielle de l'arc, et par suite, si l'on veut avoir l'arc de l'enveloppe quand la figure mobile passe de la position P_0 à la position P_1, on trouvera

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

et par conséquent

$$s = w\theta + u\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega + v\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right),$$

θ désignant toujours $\omega_1 - \omega_0$. Posons

$$(14)\qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) d\omega = \xi''\theta, \qquad \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right) d\omega = \eta''\theta.$$

L'expression de l'arc deviendra

$$(15)\qquad s = \theta(w + u\xi'' + v\eta'');$$

d'où résulte le théorème suivant :

Si l'on considère la ligne mobile dans deux quelconques de ses positions P_0, P_1, *l'arc enveloppé par une droite quelconque de la figure mobile, dans le passage de la première position à la seconde, est égal à l'angle dont la figure a tourné, multiplié par* *la distance d'un point* (ξ'', η'') *déterminé de la figure mobile à cette droite* [1].

Il est bon de remarquer, pour les applications, qu'ici l'arc a un signe qui change lorsque la concavité de la courbe cesse d'être dirigée du même côté, c'est-à-dire quand on passe par un point de rebroussement de l'enveloppe.

En vertu des formules qui déterminent ξ'', η'', on trouvera

$$\theta\xi'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \xi\, d\omega - \eta_1 + \eta_0,$$

$$\theta\eta'' = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \eta\, d\omega + \xi_1 - \xi_0,$$

ou, en se rappelant les formules (7),

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi'' = \xi' - \dfrac{\eta_1 - \eta_0}{\theta}, \\[2mm] \eta'' = \eta' + \dfrac{\xi_1 - \xi_0}{\theta}. \end{cases}$$

On voit donc que le point (ξ'', η'') dépend encore du centre de gravité des courbures de Steiner. Du reste, les formules précédentes permettent de construire immédiatement le point cherché. Soient A_0, A_1 les deux positions initiale et finale du centre instantané de la figure mobile, et soient C' le centre de gravité de courbure, C'' le point (ξ'', η'') à construire. Pour avoir la direction et le sens de $C'C''$, il faudra faire tourner A_0A_1 de 90 degrés dans le sens des rotations positives. Quant à la grandeur de $C'C''$, on a

$$\overline{C'C''} = \frac{\overline{A_0A_1}}{\theta}.$$

On voit, en particulier, que, si le mouvement est périodique, le

---

[1] Dans un article interessant insere au *Bulletin de la Société Philomathique* (1869, p. 12), M. Ribaucour a enonce la même proposition sous la forme suivante :

Lorsqu'une figure se meut d'une manière quelconque dans son plan, pour un mouvement déterminé, toutes les droites de cette figure enveloppent des courbes dont les longueurs sont les mêmes que si le système avait tourné du même angle autour d'un certain point de la figure.

point correspondant à une période se confond avec le centre de gravité des courbures.

On peut aussi obtenir des propositions analogues à celles de M. Leudersdorf. Considérons d'abord trois droites concourantes de la figure mobile D, D_1, D_2, représentées par les équations

$$\begin{aligned} y\cos\varphi - x\sin\varphi &= 0,\\ y\cos\varphi_1 - x\sin\varphi_1 &= 0,\\ y\cos\varphi_2 - x\sin\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

On aura, pour les arcs s, s_1, s_2 des enveloppes de ces trois droites, les formules

$$\begin{aligned} s &= \theta(\eta''\cos\varphi - \xi''\sin\varphi),\\ s_1 &= \theta(\eta''\cos\varphi_1 - \xi''\sin\varphi_1),\\ s_2 &= \theta(\eta''\cos\varphi_2 - \xi''\sin\varphi_2), \end{aligned}$$

ce qui donne, en éliminant η'', θ'',

$$s(12) + s_1(20) + s_2(01) = 0, \tag{17}$$

(ik) désignant le sinus de l'angle des droites D_i, D_k.

Cette formule si simple permet de résoudre le problème suivant :

Étant données deux courbes (C), (C_1), *trouver une nouvelle courbe* C_2, *dont l'arc soit égal à la somme des arcs des deux courbes.*

En effet, menons à (C), (C_1) respectivement deux tangentes D, D_1, faisant un angle constant A, et considérons la bissectrice D_2 de l'angle formé par D, D_1. Les trois droites D, D_1, D_2 constituent une figure invariable, et, si l'on applique la formule précédente, on aura

$$2\cos\frac{A}{2}\,s_2 = s + s_1.$$

L'arc s_2 de la courbe enveloppée par la bissectrice est donc proportionnel à $s + s_1$. Une courbe semblable aura un arc exactement égal à $s + s_1$ [1].

---

[1] Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIV, 2e série), M. Fouret a fait connaître un cas particulier de cette construction, celui où l'angle constant a ses deux côtés tangents à une même courbe.

Enfin, si nous considérons trois droites D, D_1, D_2 formant un triangle, et représentées par les équations

$$x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - p_i = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

on aura, en employant la formule (15) et en éliminant ξ'', η'' des trois équations obtenues,

$$\begin{vmatrix} s & \cos\varphi & \sin\varphi \\ s_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ s_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} + \theta \begin{vmatrix} p & \cos\varphi & \sin\varphi \\ p_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ p_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il n'est pas difficile de transformer cette formule et de voir qu'on peut l'écrire

$$as + bs_1 + cs_2 = 2\theta S, \tag{18}$$

a, b, c désignant les longueurs des trois côtés, et S la surface du triangle formé par les trois droites D, D_1, D_2.

Pour terminer ce qui se rapporte aux enveloppes des droites de la figure mobile, cherchons les aires de ces enveloppes. Les formules qui donnent x_1, y_1, dx_1, dy_1 nous conduisent à la relation suivante :

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 = (w + u\alpha + v\beta)\left[w + u\left(\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right) + v\left(\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)\right] d\omega,$$

et l'on a, par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0}^{\omega_1} (x_1 dy_1 - y_1 dx_1) = w^2\theta &+ uw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\alpha + \frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega \\ &+ vw\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(2\beta + \frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega + u^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha^2 + \alpha\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega \\ &+ v^2\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\beta^2 + \beta\frac{d^2\beta}{d\omega^2}\right)d\omega + uv\int_{\omega_0}^{\omega_1}\left(\alpha\beta + \alpha\frac{d^2\beta}{d\omega^2} + \beta\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega. \end{aligned}$$

L'aire de l'enveloppe sera donc de la forme

$$w^2\frac{\theta}{2} + Auw + A'vw + Bu^2 + B'v^2 + Cuv,$$

et par conséquent les droites, dont les enveloppes ont une aire constante k, satisfont à l'équation

$$w^2 \frac{0}{2} + \mathrm{A}uw + \mathrm{A}'vw + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{B}'v^2 + \mathrm{C}uv = k = k(u^2 + v^2).$$

C'est l'équation tangentielle d'une série de coniques homofocales. Ainsi :

Si l'on considère les droites de la figure mobile pour lesquelles le rayon vecteur qui joint un point fixe du plan à leur point de contact avec leur enveloppe décrit une aire donnée quand la figure mobile passe de la position P_0 *à la position* P_1, *ces droites enveloppent une conique de la figure mobile dont les foyers demeurent fixes quand la valeur constante de l'aire donnée varie.*

Dans le cas où le mouvement est périodique, si l'on applique le théorème précédent à une période entière, le centre de la conique coïncide avec le centre de gravité des courbures, ce qui donne le théorème suivant :

Dans un mouvement périodique, les droites de la figure mobile dont les enveloppes ont une aire donnée sont tangentes à une série de coniques homofocales dont le centre commun est le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.

III.

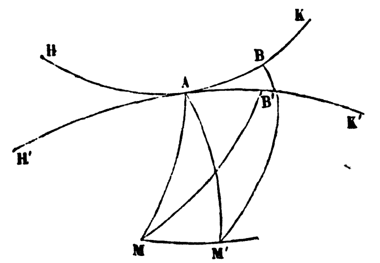
Les théorèmes des deux premiers articles s'étendent au mouvement d'une figure invariable sur la sphère. On sait que ce mouvement peut toujours être produit par le roulement d'une courbe sphérique invariablement liée à la figure mobile sur une courbe fixe. Nous ne considérerons ici que des mouvements périodiques, pour lesquels, par conséquent, les deux roulettes sont des courbes fermées.

Supposons (*fig.* 3) que la courbe H′K′ roule sur la courbe HK; alors un point M invariablement lié à la courbe mobile décrira une courbe MM′, et nous allons chercher à évaluer l'aire comprise entre cette courbe et la roulette fixe HK.

Quand la courbe H′K′, actuellement tangente en A à HK, aura tourné d'un angle infiniment petit, le point B′ de cette courbe viendra en B, et les deux roulettes seront tangentes en B. L'aire que nous voulons évaluer sera l'intégrale de l'aire infiniment petite ABMM' comprise entre les deux arcs AM, BM'.

Le quadrilatère curviligne qu'il s'agit d'évaluer peut se décom-

Fig. 3.



poser en deux triangles AMM', ABM'. Le premier de ces triangles peut être considéré évidemment comme ayant pour angle en A précisément l'angle dont la courbe H'K' a tourné, angle que, pour un instant, nous appellerons $d\omega$. On a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\text{aire AMM'} = d\omega\,(1 - \cos \text{AM}),$$

le rayon de la sphère étant supposé égal à l'unité.

Quant au second triangle ABM', il est évidemment égal, si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, au triangle AB'M. On a donc

$$\int \text{ABMM'} = \int d\omega\,(1 - \cos \text{AM}) + \int \text{AMB'}.$$

Le premier membre est égal évidemment à l'aire S de la trajectoire de M', moins l'aire Σ de la roulette fixe HK. Le dernier terme du second nombre, M étant invariablement lié à la figure mobile, est égal à la somme des secteurs AB'M ou à l'aire de la roulette mobile Σ'. On a donc

$$S - \Sigma - \Sigma' = \int d\omega\,(1 - \cos \text{AM}).$$

Or, ρ et ρ' désignant les deux rayons de courbure géodésique des courbes HK, H'K' au point A, l'angle $d\omega$, dont la roulette mobile a tourné, est donné par la formule

$$d\omega = ds\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right),$$

ds désignant la différentielle de l'arc d'une quelconque des deux roulettes. On a donc

$$S = \Sigma + \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho} + \int \frac{ds}{\rho'} - \int \cos AM \, ds \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right).$$

Comme on a, en vertu d'un théorème connu,

$$\Sigma + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi, \quad \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho'} = 2\pi,$$

la relation précédente devient

$$4\pi - S = \int \cos AM \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds.$$

On peut écrire S′ au lieu de $4\pi - S$; S′ sera encore l'aire de la courbe décrite par le point M, cette aire étant maintenant étendue à la région de la sphère au delà de MM′. On aura donc

$$S' = \int \cos AM \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} \right) dS.$$

Appelons x, y, z les coordonnées du point M rapportées à des axes rectangulaires ayant leur origine au centre de la sphère et invariablement liés à la figure mobile, et soient ξ, η, ζ les coordonnées variables du centre instantané par rapport aux mêmes axes. La valeur de S′ sera

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} S' &= x \int \xi \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds \\ &\quad + y \int \eta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds + z \int \zeta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds &= \Omega, \\ \int \xi \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds &= x_0 \Omega, \\ \int \eta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds &= y_0 \Omega, \\ \int \zeta \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right) ds &= z_0 \Omega; \end{aligned} \right.$$

x_0, y_0, z_0 seront les coordonnées d'un point qu'on peut encore appeler *centre de gravité des courbures* de la roulette mobile. Car il est le centre de gravité de cet arc si l'on suppose que la densité, en chaque point de la roulette mobile, soit égale à la somme des courbures géodésiques des deux roulettes quand elles sont tangentes en ce point. La formule (19) pourra s'écrire

$$S' = \Omega(x_0 x + y_0 y + z_0 z),$$

ce qui conduit au théorème suivant :

Quand une figure invariable se meut sur la sphère qui la contient, le mouvement qu'elle prend étant périodique, l'aire de la courbe fermée, décrite par un point quelconque M *invariablement lié à la figure mobile, est égale à une constante fixe multipliée par le cosinus de l'arc qui réunit le point* M *à un point fixe* A *de la figure mobile. Le point* A *est l'extrémité du rayon qui contient le centre de gravité des courbures de la roulette mobile.*

Par conséquent, les points de la figure mobile qui décrivent des courbes de même aire sont sur un petit cercle de centre fixe [1].

En transformant ce théorème par la méthode des figures complémentaires, on obtient la proposition suivante :

Dans le mouvement défini précédemment de la figure mobile, tout arc de grand cercle enveloppe une courbe sphérique fermée. La différence entre la longueur de cette courbe et la circonférence d'un grand cercle est proportionnelle au cosinus de l'angle que fait le grand cercle de la figure mobile avec un autre grand cercle fixe dont le pôle est le point A, *déjà considéré.*

IV.

Nous allons maintenant considérer le mouvement d'une figure invariable dans l'espace. Nous examinerons seulement les déplacements étudiés surtout par M. Mannheim et dans lesquels la position de la figure mobile dépend de deux paramètres arbitraires. Par conséquent, tout point de cette figure est assujetti à demeurer sur une surface que l'on appellera, par analogie, sa *surface trajectoire*.

---

[1] Ce théorème devient inexact dans le cas exceptionnel de la rotation complète autour d'un axe fixe ; la démonstration donnée fait voir clairement pourquoi il en est ainsi, les deux équations

$$\Sigma + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi, \quad \Sigma' + \int \frac{ds}{\rho} = 2\pi$$

n'ayant plus aucun sens dans ce cas particulier.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la figure mobile, rapportées à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, invariablement liés à cette figure, et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même point rapportées à des axes rectangulaires O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 fixes dans l'espace. On aura des relations de la forme

$$(21)\qquad \begin{cases} x_1 = a\ (x-\alpha) + b\ (y-\beta) + c\ (z-\gamma), \\ y_1 = a'\ (x-\alpha) + b'\ (y-\beta) + c'\ (z-\gamma), \\ z_1 = a''\ (x-\alpha) + b''\ (y-\beta) + c''\ (z-\gamma), \end{cases}$$

$a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ étant les neuf cosinus liés par des relations bien connues. Si, dans les formules précédentes, on regarde ces neuf cosinus et α, β, γ comme des fonctions connues de deux variables indépendantes u et v, on aura défini un déplacement de la nature de ceux que nous voulons considérer ici.

Mais auparavant nous allons donner quelques formules préliminaires relatives aux neuf cosinus. Si l'on pose

$$(22)\qquad b\frac{\partial a}{\partial u} + b'\frac{\partial a'}{\partial u} + b''\frac{\partial a''}{\partial u} = r = \sum b\frac{\partial a}{\partial u},$$

et de même

$$(22)\qquad \begin{cases} \sum c\dfrac{\partial b}{\partial u} = p, & \sum b\dfrac{\partial a}{\partial v} = r_1, \\ & \sum c\dfrac{\partial b}{\partial v} = p_1, \\ \sum a\dfrac{\partial c}{\partial u} = q & \sum a\dfrac{\partial c}{\partial v} = q_1, \end{cases}$$

les dérivées des neuf cosinus seront données par les formules

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial u} = br - cq, & \dfrac{\partial a}{\partial v} = br_1 - cq_1, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = cp - ar, & \dfrac{\partial b}{\partial v} = cp_1 - ar_1, \\ \dfrac{\partial c}{\partial u} = aq - bp, & \dfrac{\partial c}{\partial v} = aq_1 - bp_1. \end{cases}$$

On aurait des formules analogues en accentuant les lettres a, b, c.

Les six quantités p, q, r, p_1, q_1, r_1 ne peuvent être des fonctions quelconques de u et de v. En exprimant que les deux expressions qu'on peut déduire des formules précédentes pour chacune des dérivées $\dfrac{\partial^2 a}{\partial u\,\partial v}, \dfrac{\partial^2 b}{\partial u\,\partial v}, \dfrac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}$ sont égales, on trouvera les relations très-importantes

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial v}-\frac{\partial p_1}{\partial u}&=qr_1-rq_1,\\ \frac{\partial q}{\partial v}-\frac{\partial q_1}{\partial u}&=rp_1-pr_1,\\ \frac{\partial r}{\partial v}-\frac{\partial r_1}{\partial u}&=pq_1-qp_1.\end{aligned}\right.$$

Ces propositions étant rappelées, revenons à l'étude du mouvement de la figure invariable et supposons que l'on associe tous les systèmes de valeurs de u et v, pour lesquels chaque point de la figure mobile peut occuper une portion finie de sa surface trajectoire. Par exemple, si un point de la figure mobile décrit une sphère, nous prendrons toutes les positions de la figure mobile pour lesquelles ce point est à l'intérieur d'une certaine courbe sphérique quelconque. Considérant alors un point quelconque de la figure mobile, nous allons évaluer le volume du cône ayant pour base curviligne la portion de sa surface trajectoire que ce point peut occuper, et pour sommet le point O_1, origine des axes fixes. Le volume V de ce cône sera donné par la formule

$$6V=\iint\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial z_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial z_1}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv,$$

l'intégrale double étant étendue à tous les systèmes de valeurs considérés de u et de v. Or on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u}=\quad & a\left[-\frac{\partial\alpha}{\partial u}+q(z-\gamma)-r(y-\beta)\right]\\ &+b\left[-\frac{\partial\beta}{\partial u}+r(x-\alpha)-p(z-\gamma)\right]\\ &+c\left[-\frac{\partial\gamma}{\partial u}+p(y-\beta)-q(x-\alpha)\right].\end{aligned}$$

En substituant cette valeur de $\frac{\partial x_1}{\partial u}$ et les valeurs analogues pour les autres dérivées, on trouvera

$$(25)\quad 6V=\iint\begin{vmatrix} x-\alpha, & y-\beta, & z-\gamma,\\ q(z-\gamma)-r(y-\beta)-\frac{\partial\alpha}{\partial u}, & r(x-\alpha)-p(z-\gamma)-\frac{\partial\beta}{\partial u}, & p(y-\beta)-q(x-\alpha)-\frac{\partial\gamma}{\partial u}\\ q_1(z-\gamma)-r_1(y-\beta)-\frac{\partial\alpha}{\partial v}, & r_1(x-\alpha)-p_1(z-\gamma)-\frac{\partial\beta}{\partial v}, & p_1(y-\beta)-q_1(x-\alpha)-\frac{\partial\gamma}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv.$$

x, y, z pourront être dégagés des signes d'intégration, et l'on voit que le volume cherché va devenir une fonction du troisième degré de x, y, z. Mais cette fonction présente dans tous les cas une propriété remarquable. Les termes du troisième degré seront donnés par l'intégrale

$$(26) \qquad \iint \begin{vmatrix} x & y & z \\ qz - ry & rx - pz & py - qx \\ q_1 z - r_1 y & r_1 x - p_1 z & p_1 y - q_1 x \end{vmatrix} du\, dv,$$

ou, en développant,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left[x \iint (qr_1 - rq_1)\, du\, dv \right.$$
$$\left. + y \iint (rp_1 - pr_1)\, du\, dv + z \iint (pq_1 - qp_1)\, du\, dv\right].$$

Le volume sera donc de la forme

$$(27) \qquad V = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax + A'y + A''z) + \varphi(x, y, z),$$

φ étant une fonction du second degré et A, A', A'' les intégrales définies par

$$(28) \qquad \begin{cases} 6A = \iint (qr_1 - rq_1)\, du\, dv, \\ 6A' = \iint (rp_1 - pr_1)\, du\, dv, \\ 6A'' = \iint (pq_1 - qp_1)\, du\, dv. \end{cases}$$

En d'autres termes, *le lieu des points de la figure mobile pour lesquels les cônes, ayant pour sommet un point fixe et pour base curviligne les portions de surfaces trajectoires décrites par ces points, ont un volume donné, est une cyclide du troisième degré, c'est-à-dire une cubique passant par le cercle imaginaire de l'infini.*

Les intégrales A, A', A'' ont une signification géométrique très-simple. En effet, supposons qu'au lieu des formules (1) on prenne les suivantes, dans lesquelles on a simplement annulé α, β, γ:

$$(29) \qquad \begin{cases} x_1 = ax + by + cz, \\ y_1 = a'x + b'y + c'z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z, \end{cases}$$

on aura défini ainsi le mouvement d'une figure invariable autour d'un point fixe, l'origine O_1 des coordonnées x_1, y_1, z_1. Si l'on compare les deux mouvements définis par les formules (21) et (29), on voit que, pour le même système de valeurs de u et de v, les positions de la figure mobile dans les deux mouvements auront la même orientation et se ramèneront l'une à l'autre par une simple translation. Or, dans le mouvement défini par les formules (29), d'une part, le volume V, déjà défini, se réduit à

$$(x^2 + y^2 + z^2)(Ax + A'y + A''z),$$

A, A', A'' étant donnés par les formules (28); d'autre part, les surfaces trajectoires des différents points étant des sphères, ce volume se réduit, pour un point M, à l'aire S de la portion de surface sphérique que ce point doit occuper, multipliée par le tiers du rayon de la sphère, ce qui donne la formule

$$S = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(Ax + A'y + A''z).$$

Prenons un point à la distance 1 de l'origine; on aura

$$(30) \qquad S = 3Ax + 3A'y + 3A''z.$$

Cette formule nous permet de reconnaître le signification de A, A', A''. Par exemple, A est le tiers de l'aire décrite par le point de la figure mobile dont les coordonnées sont $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

J'ajoute que nous trouvons, dans la formule précédente, la vérification des résultats démontrés par la Géométrie à l'article précédent. En effet, considérons les différentes portions correspondantes des surfaces trajectoires dont l'aire est déterminée par la formule (30). Si l'on imprime à la figure mobile un mouvement tel, que l'un des points de cette figure décrive le contour de cette portion de sa surface trajectoire dont on détermine l'aire, il en sera évidemment de même pour tous les autres points de la figure invariable. Ainsi les courbes qui limitent les portions correspondantes des sphères trajectoires des différents points peuvent être toutes décrites à la fois dans un certain mouvement de la figure invariable. La formule relative aux aires de ces courbes fermées doit donc être identique à celle de l'article précédent, et elle est, en effet, de forme tout à fait semblable.

Puisque A, A', A'' sont des aires sphériques, ces intégrales doubles doivent pouvoir être remplacées par des intégrales simples; on pourra ici effectuer aisément cette transformation, en se servant des formules (24). On aura

$$6A = \int\int (qr_1 - rq_1)\,du\,dv = \int\int \left(\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u}\right) du\,dv,$$

et par conséquent

$$6A = \int (p\,du + p_1\,dv),$$

l'intégrale simple étant étendue aux valeurs limites de u et de v.

La formule générale, relative au volume, est susceptible d'une simplification notable dans un cas très-étendu. Il existe des déplacements très-nombreux dans lesquels les surfaces trajectoires des différents points sont fermées, et pour lesquels A, A', A'' s'évanouissent. Le volume devient alors une fonction du second degré seulement des coordonnées x, y, z du point décrivant.

Supposons, par exemple, que lorsque v demeure constant, u prenant toutes les valeurs dont il est susceptible, le mouvement, qui se produit, de la figure invariable soit périodique, que les différents points décrivent des courbes fermées, qu'au commencement et à la fin de ce mouvement le corps occupe la même position, les rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 redevenant les mêmes; supposons que les mêmes conditions soient remplies lorsque, u restant fixe, v varie. Dans ce cas, les intégrales A, A', A'', étendues à toutes les positions de la figure mobile, sont identiquement nulles. On a, par exemple,

$$6A = \int\int \frac{\partial p}{\partial v}\,du\,dv - \int\int \frac{\partial p_1}{\partial u}\,du\,dv.$$

Si, dans la première intégrale du second membre, on commence l'intégration par rapport à v, le résultat obtenu est nul en vertu de nos hypothèses, et il en est de même pour la seconde intégrale, si l'on intègre d'abord par rapport à u.

La théorie des surfaces podaires nous donne un exemple remarquable de cette classe de mouvements. Soit (Σ) une surface quelconque. Prenons la surface symétrique de (Σ) par rapport à un quelconque de ses plans tangents. Lorsque ce plan variera, la surface (Σ') se déplacera en roulant sur (Σ). Un point M', invariablement lié à (Σ'), sera toujours le symétrique d'un point M invariablement lié à (Σ), c'est-à-dire d'un point fixe. La surface trajectoire de M' sera donc homothétique à la podaire de M par rapport à (Σ), le rapport d'homothétie étant 2.

Si la surface (Σ) est fermée, les différentes surfaces trajectoires seront fermées; les intégrales A, A', A'', étendues à toutes les positions de (Σ'), seront nulles; le volume des surfaces trajectoires, et par conséquent celui des surfaces podaires qui en est la huitième partie, deviendra une fonction du second degré des coordonnées de M′ par rapport à des axes invariablement liés à (Σ'), ou, ce qui est la même chose, des coordonnées de M par rapport à des axes fixes.

Le théorème relatif aux volumes des podaires, donné par M. Hirst au t. LXII du *Journal de Crelle*, est donc un cas particulier de la proposition générale relative au volume des surfaces trajectoires.

En terminant, j'indiquerai une proposition analogue à celle de M. Holditch, et relative aux volumes des surfaces trajectoires des différents points d'une droite.

Supposons que cette droite de la figure mobile ait été prise pour axe des x. L'expression du volume de la surface décrite par le point d'abscisse x sera

$$V = \frac{\Theta}{3} x^3 + A x^2 + B x + C. \tag{32}$$

Θ étant l'aire de cette portion de la sphère de rayon 1 qui contient les extrémités des parallèles menées par le centre de la sphère à la droite dans toutes ses positions.

Si l'on désigne par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes décrits par les points 1, 2, 3, 4 d'abscisses x_1, x_2, x_3, x_4, et que l'on pose

$$(12) = x_1 - x_2,$$

on aura

$$\frac{V_1}{(12)(13)(14)} + \frac{V_2}{(21)(23)(24)} + \frac{V_3}{(31)(32)(34)} + \frac{V_4}{(41)(42)(43)} = \frac{\Theta}{3}. \tag{33}$$

On pourra faire différentes applications de ces formules. Par exemple, les surfaces parallèles à une surface fixe peuvent être considérées comme les trajectoires des points d'une droite, et le résultat connu, relatif à ces surfaces, est bien d'accord avec la formule (32) [1].

---

[1] Dans le *Messenger of Mathematics* (février 1878, p. 150) M. Elliot a fait connaître une formule analogue à la formule (33), mais seulement pour le cas des mouvements fermés dans lesquels on a $\Theta = 4\pi$.