Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

V. Liguine

Sur les aires des trajectoires décrites dans le mouvement plan d'une figure de forme invariable

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 306-333

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_306_1>

MÉLANGES.

SUR LES AIRES DES TRAJECTOIRES DÉCRITES DANS LE MOUVEMENT PLAN D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE;

PAR M. V. LIGUINE,

Professeur à l'Université d'Odessa.

1. Dans l'étude géométrique du mouvement d'une figure plane invariable dans son plan, on s'est principalement occupé des relations qui ont lieu entre les tangentes, les normales et les rayons de courbure des trajectoires décrites par les différents points de la figure mobile, ainsi qu'entre les vitesses et les accélérations de divers ordres de ces points, et, au point de vue de ces problèmes, la théorie des mouvements plans constitue peut-être le chapitre le plus achevé de la Cinématique pure. Mais, en suivant un ordre de recherches généralement admis dans la géométrie des courbes, deux autres questions se présentent tout naturellement après celles des tangentes, des normales et des rayons de courbure des trajectoires : ce sont, d'une part, l'étude des relations qui ont lieu entre les *aires* des lignes engendrées par les différents points de la figure mobile dans un même mouvement plan, et, d'autre part, l'étude

des relations entre les *périmètres* de ces lignes. Le premier de ces deux intéressants problèmes a été, pendant les quarante dernières années, abordé à plusieurs reprises par divers savants, pour des cas plus ou moins particuliers, ce qui a conduit à un certain nombre de propriétés élégantes, mais peu répandues, relatives aux aires de quelques genres de roulettes. Tout récemment, deux géomètres anglais, MM. Leudesdorf et Kempe, ont de nouveau appelé l'attention sur cette question par la découverte de deux importants théorèmes d'un caractère plus général. Je me propose dans cette Note de résumer d'abord, dans un aperçu historique, les principaux résultats obtenus jusqu'à présent dans ce champ relativement peu cultivé de recherches, et de compléter ensuite, sous certains rapports, les travaux récents de MM. Leudesdorf et Kempe.

I.

2. Commençons par rappeler et établir quelques définitions, pour pouvoir ensuite abréger le discours.

Tout mouvement plan d'une figure invariable revient, comme on sait, à un roulement sans glissement d'une certaine ligne α, invariablement liée à la figure mobile, sur une autre ligne fixe β. Nous nommerons la première de ces deux lignes, lieu des points de la figure mobile qui coïncident successivement avec le centre instantané de rotation, le *centroïde mobile*, et la seconde, lieu des centres instantanés sur le plan fixe, le *centroïde fixe* ([1]). Toutes les trajectoires dans un mouvement plan peuvent donc être considérées comme engendrées par des points invariablement liés à une ligne α qui roule sur une autre ligne fixe β, et représentent par conséquent des *roulettes* dont β est la *base* et α la *courbe roulante*.

Lorsqu'un mouvement plan est tel que la figure mobile revient à la fin du déplacement à sa position primitive, je dirai que le mouvement est *fermé*. Cela peut arriver de deux manières distinctes, selon que la figure mobile accomplit un certain nombre N de révolutions complètes, ou qu'elle ne tourne que d'un angle θ moindre

([1]) La dénomination concise de *centroïde* est due à M. Clifford. On dira de même *axoïdes* pour les lieux des axes instantanés dans l'espace.

que 2π et subit ensuite un mouvement de retour. Je distinguerai ces deux cas en disant que dans le premier le mouvement est *fermé continu*, et dans le second *fermé alternatif*. Il est évident que, dans tout mouvement fermé continu, les deux centroïdes α et β sont des courbes fermées et telles que leurs périmètres ont un rapport commensurable.

Enfin je dirai qu'une courbe fermée α accomplit un *roulement complet* sur une ligne β, lorsque α vient, à la fin de son roulement, toucher la ligne β par le même point par lequel il la touchait au commencement.

3. Les premières recherches sur les relations entre les aires des roulettes décrites dans le roulement relatif d'une même paire de courbes, ou, ce qui revient au même, entre les aires des trajectoires dans le mouvement plan, sont dues à Steiner et se trouvent exposées dans son admirable Mémoire *Sur le centre de gravité des courbures des courbes planes*, publié en 1840 [1]. Le célèbre géomètre s'occupe dans ce Mémoire des trois questions principales que voici : 1° des relations entre les aires des différentes podaires Π d'une même courbe convexe α, prises par rapport aux différents points P du plan de la courbe; 2° des relations entre les aires des roulettes décrites, dans le roulement d'une courbe convexe α sur une droite fixe, par différents points invariablement liés à α; 3° des relations entre les aires des roulettes décrites, dans le roulement d'une courbe convexe α sur une courbe fixe β, par différents points liés à α. La solution de ces questions, développée par l'auteur, repose sur la considération d'un point particulier S du plan d'une courbe donnée, qui est le centre de gravité de cette courbe, lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux courbures, ou inversement proportionnels aux rayons de courbure respectifs de la courbe en ces points. En vertu de cette propriété, le point en question a été nommé, par Steiner, *centre de gravité des courbures* (*Krümmungs-Schwerpunkt*) de la courbe donnée.

Je ne m'arrêterai pas sur les recherches de Steiner relatives à la première question, étrangère au sujet de cette Note, et je me bor-

[1] *Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener Curven.* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, herausgegeben von Crelle, t. XXI, 1840, p. 33-63, 101-133.)

nerai à en signaler seulement ce théorème élégant et bien connu : *L'aire d'une roulette décrite dans un roulement complet d'une courbe convexe et fermée* α *sur une droite fixe par un point quelconque* P *lié à* α *est double de l'aire de la podaire* Π *de* α *par rapport à* P. On doit entendre ici, ainsi que dans tous les théorèmes de Steiner, par l'aire d'une roulette l'aire comprise entre cette courbe, ses deux normales extrêmes et la ligne fixe β.

Pour ce qui concerne les deux autres questions, traitées séparément par Steiner, il suffira ici de résumer les résultats relatifs au cas général du roulement d'une courbe sur une autre courbe, puisque ceux qui se rapportent au roulement d'une courbe sur une droite n'en sont évidemment que des cas particuliers. Les deux propriétés les plus générales trouvées par Steiner relativement aux aires des roulettes peuvent être énoncées comme il suit :

1° *Si une courbe fermée et continuellement convexe* α *roule dans son plan sur une courbe quelconque fixe et convexe* β *jusqu'à ce qu'elle vienne à toucher la dernière par le même point qu'au commencement du mouvement, chaque point* P *lié invariablement à la courbe* α *décrit une figure* [*quadrilatère mixtiligne* (¹)], *dont l'aire* (p) *est minimum* (p_m) *quand le point décrivant coïncide avec le point* S_1 *qui représente le centre de gravité de la courbe* α, *lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux sommes des angles de contingence des lignes* α *et* β *en leurs points correspondants ou proportionnels aux sommes des courbures correspondantes de ces deux lignes. Les points* P *également distants du centre de gravité* S_1, *c'est-à-dire situés sur une circonférence décrite de ce dernier point comme centre, engendrent des figures d'aire constante, et réciproquement ; l'excès de cette aire sur l'aire minimum* (p_m) *est toujours égal à l'aire du secteur circulaire qui a pour rayon la distance entre les points* P *et* S_1 *et pour angle au centre l'angle constant* φ, *formé par les normales à la courbe* β *aux extrémités de l'arc sur lequel a roulé la courbe* α, *augmenté de* 2π.

Ces propriétés découlent immédiatement des relations suivantes

(¹) Ce quadrilatère est formé par la trajectoire de P, ses deux normales extrêmes et la ligne β.

établies par Steiner par des considérations d'une nature tout à fait élémentaire :

$$(1) \quad \begin{cases} (p) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{P\gamma}^2(\varepsilon + \varepsilon_1) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{S_1\gamma}^2(\varepsilon + \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(2\pi + \varphi)\overline{PS_1}^2, \\ (p_m) = (\alpha) + \frac{1}{2}\Sigma\overline{S_1\gamma}^2(\varepsilon + \varepsilon_1), \\ (p) = (p_m) + \frac{1}{2}(2\pi + \varphi)\overline{PS_1}^2, \end{cases}$$

(α) désignant l'aire de la courbe α, $P\gamma$ le rayon vecteur variable mené de P aux différents points γ de α, $S_1\gamma$ le rayon analogue pour le point S_1, ε et ε_1 les angles de contingence correspondants des lignes α et β.

Si la courbe α roule sur le côté concave de β, et si en deux points correspondants quelconques de ces deux courbes la première α a toujours une courbure plus grande que la seconde β, les relations (1) subsistent en y remplaçant seulement ε_1 et φ par $-\varepsilon_1$ et $-\varphi$. Un changement analogue rendrait ces formules applicables au cas où la courbe α, roulant toujours sur le côté concave de β, a en chaque point une courbure moindre que la base β au point correspondant.

Des propriétés semblables, mais plus générales, ont lieu quand on supprime la restriction que la courbe α soit fermée et accomplisse un roulement complet sur β.

2° *Si un arc courbe quelconque continuellement convexe $\alpha\alpha_1$ roule dans son plan sur le côté convexe d'un autre arc courbe fixe et continuellement convexe $\beta\beta_1$, chaque point* P *lié à $\alpha\alpha_1$ décrit une figure dont l'aire (p) est minimum et égale à (p_m), quand le point décrivant coïncide avec un point particulier S_2, qui peut être facilement construit lorsqu'on connaît la position du point S_1 du premier théorème relatif à l'arc $\alpha\alpha_1$, la corde h de cet arc $\alpha\alpha_1$, l'angle φ entre les normales à la courbe $\alpha\alpha_1$ menées en ses extrémités α et α_1, et l'angle ψ entre les normales à la ligne $\beta\beta_1$ menées en ses extrémités β et β_1. Les points* P *également distants du point S_2, c'est-à-dire situés sur une circonférence décrite de ce dernier point comme centre, engendrent des figures d'une aire constante, et réciproquement ; cette aire surpasse l'aire minimum (p_m) de l'aire d'un secteur circulaire ayant la distance S_2P pour rayon, et dont l'angle au centre est égal à $\varphi + \psi$.*

Dans ce cas, les relations (1) sont remplacées par celles-ci :

$$(2)\quad\begin{cases}(p) = U + \dfrac{1}{2}\Sigma\overline{P\gamma}^2(\varepsilon + \varepsilon_1),\\ (p_m) = W + \dfrac{1}{2}\Sigma\overline{S\gamma}^2(\varepsilon + \varepsilon_1) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\varphi\psi}{\varphi+\psi}\overline{SS'}^2 - \dfrac{1}{4}h\left[2d + \dfrac{h}{2(\varphi+\psi)}\right],\\ (p) = (p_m) + \dfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\overline{PS_2}^2,\end{cases}$$

où $P\gamma$, ε, ε_1 ont la même signification que dans les formules (1); U désigne l'aire du secteur $P\alpha\alpha_1 P$; W l'aire du segment compris entre l'arc $\alpha\alpha_1$ et sa corde; $S\gamma$ le rayon vecteur variable mené aux différents points γ de $\alpha\alpha_1$ à partir du centre de gravité des courbures S relatif à l'arc $\alpha\alpha_1$; SS′ la distance du point S au point S′ qui représente le centre de gravité de l'arc $\alpha\alpha_1$ lorsqu'on attribue à ses différents points des poids proportionnels aux courbures de l'arc $\beta\beta_1$ aux points correspondants, et d la longueur de la perpendiculaire abaissée du point S_1 du premier théorème, pris relativement à l'arc $\alpha\alpha_1$ sur la corde $\alpha\alpha_1 = h$.

Le point particulier S_2 qui décrit la figure d'aire minimum s'obtient en prenant sur le prolongement de la perpendiculaire d, au delà de S_1, un point S_2, tel que l'on ait

$$(3)\qquad S_1S_3 = \frac{h}{2(\varphi+\psi)}.$$

La seule difficulté dans les applications des théorèmes I et II consistera dans la détermination du point S_1 et, plus généralement, du point S_2. Steiner signale plusieurs cas remarquables où le point S_2 peut être trouvé immédiatement. Parmi ces cas, le plus général est celui-ci :

3° *Lorsque chacune des deux courbes α, β est fermée, la courbe α est douée d'un centre, et les périmètres de ces courbes sont entre eux comme deux nombres entiers m, n premiers entre eux, m étant pair; et lorsque le roulement considéré de α sur β est un mouvement fermé continu, de manière que tous les points* P *engendrent des courbes fermées, alors le point* S_2 *coïncide avec le centre de la courbe roulante α.*

Dans ce cas, la troisième des formules (2) devient

$$(4)\qquad (p) = (p_m) + (m+n)\pi.\overline{PS_2}^2.$$

Le théorème III et la formule (4) ont encore lieu quand la courbe α est une circonférence, le nombre entier m étant un nombre quelconque, pair ou impair, seulement différent de 1, les nombres m, n étant toujours premiers entre eux; ou quand, α ayant les propriétés énoncées dans le théorème III, la courbe β possède aussi un centre, et les nombres m, n sont tous deux impairs et toujours premiers entre eux.

Les théorèmes I et II se simplifient beaucoup lorsque la base β est une droite. Le point S_1 devient alors simplement le centre de gravité des courbures S de la courbe roulante, et le point S_2 s'obtient par une construction analogue à la construction exposée pour le cas général, mais en y remplaçant le point S_1 par S et la formule (3) par

$$SS_2 = \frac{h}{2\varphi}.$$

On voit ainsi que les résultats trouvés par Steiner donnent la loi cherchée de la variation des aires décrites par les différents points d'une figure plane mobile dans son plan, pour un nombre très-étendu, mais toujours limité, de mouvements plans, savoir lorsque les deux centroïdes α et β de ces mouvements sont des courbes continuellement convexes, le déplacement de la figure pouvant d'ailleurs être fermé ou quelconque. Pour résoudre la question dans toute sa généralité, il restait à étudier les cas plus complexes où les centroïdes α, β du mouvement sont arbitraires, ce qui, comme on le verra, n'a encore réussi complétement aux géomètres qui se sont occupés du sujet après Steiner que pour le cas des mouvements plans fermés.

4. C'est M. Gilbert qui paraît s'être occupé le premier, d'une manière tout à fait générale, de la question sur les aires des trajectoires dans le mouvement plan, dans une *Note sur les aires des roulettes,* qui termine son beau Mémoire intitulé : *Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans* (1). Il y énonce le théorème très-simple et très-fécond que voici :

Désignons par (p) l'aire comprise entre la courbe fixe β, la

(1) *Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles,* t. XXX, présenté à l'Académie le 7 novembre 1857.

trajectoire d'un point P, *et deux normales à cette dernière; par* U *le secteur compris, sur la figure mobile, entre les positions correspondantes de ces normales et la courbe roulante* α; *par* V *enfin le secteur correspondant dans une courbe décrite en prenant pour rayon vecteur la normale variable à la trajectoire et pour angle polaire l'angle dont la figure mobile a tourné à partir de sa position primitive jusqu'à la position que l'on considère. On aura*

$$(5) \qquad (p) = \mathrm{U} \pm \mathrm{V},$$

suivant que la rotation de la normale dans la figure mobile et sa rotation autour du centre instantané ont lieu en sens contraire ou dans le même sens.

On voit immédiatement que la relation (5) est une généralisation de la première des formules (2) de Steiner, U ayant la même signification dans les deux équations, et V étant exprimé par

$$\frac{1}{2}\Sigma \overline{\mathrm{P}\gamma}^2 d\omega,$$

où $d\omega$ désigne l'angle de rotation instantanée de la figure mobile, angle qui est évidemment égal à la somme ou à la différence des angles de contingence ε, ε_1 des deux centroïdes α, β aux points correspondants.

Ajoutons que chaque fois que le centroïde mobile α est fermé et que l'on considère un roulement complet de α sur β, le secteur U est égal à l'aire totale (α) de la courbe roulante.

5. Peu après la publication du théorème de M. Gilbert, des considérations d'un tout autre ordre conduisirent un auteur anglais, M. Holditch, à un théorème très-particulier (¹), mais qui, généralisé ensuite de plus en plus par d'autres géomètres, amena récemment à des propriétés très-étendues et très-importantes, relatives aux aires des roulettes. Le théorème de M. Holditch s'énonce ainsi :

Lorsqu'une corde d'une longueur donnée et invariable se meut dans une courbe fermée en parcourant la circonférence totale de la courbe par ses extrémités A, B, *et si l'on considère la courbe*

(¹) *Lady's and Gentleman's Diary for the Year* 1858.

décrite par un point P *de cette corde qui la divise en deux parties* $AP = c_1$, $BP_2 = c_2$, *l'aire comprise entre les deux courbes fermées est égale à* $\pi c_1 c_2$.

Une première généralisation de ce théorème fut énoncée par M. Williamson dans son *Traité élémentaire de Calcul intégral* (¹). Considérons une droite invariable; soient A, B, P trois points de cette droite, tels que le point P partage la distance AB en deux parties $AP = c_1$, $PB = c_2$; soient enfin (A), (B), (P) les aires *totales* limitées par les courbes fermées, décrites respectivement par les points A, B, P dans un mouvement fermé continu de la droite (²); il existe alors, comme l'a démontré M. Williamson, la relation

$$(6) \qquad (P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - \pi c_1 c_2.$$

En supposant que les deux points A, B décrivent une même courbe dont l'aire est (A), on retombe évidemment sur le théorème de M. Holditch.

Plus tard, M. Elliott (³) donna l'extension de la relation (6) au cas où les distances entre les points A, B, P varient pendant le mouvement, de manière que le rapport des segments AP, PB reste constant et égal à $c_1 : c_2$. La formule (6) est alors remplacée par celle-ci :

$$(P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} k,$$

k étant l'aire décrite par AB relativement au point A, c'est-à-dire l'aire limitée par la trajectoire d'un point qui se trouve constam-

---

(¹) *An elementary Treatise on the Integral Calculus*, by Benjamin Williamson, M. A. London, Longmans, 1877, p. 200.

(²) On remarquera la différence entre ces aires et celles dont il a été question plus haut, considérées par Steiner et M. Gilbert. Pour les distinguer, nous designons l'aire *totale* comprise dans la courbe fermée, decrite par un point P de la figure mobile pendant un mouvement fermé de cette dernière par la même majuscule ordinaire mise entre parenthèses (P), et l'aire entre la même courbe et le centroide fixe β par la minuscule correspondante entre parenthèses (p). Il est clair, d'ailleurs, qu'il ne peut être question des aires (P) que dans le seul cas des mouvements fermés.

(³) *A theorem in areas including Holditch's, with its analogue in three dimensions.* (*The Messenger of Mathematics*, t. VII, 1878, p. 150.

ment situé par rapport à un point fixe, comme B est situé par rapport à A.

Une généralisation d'un autre ordre et beaucoup plus importante du théorème de M. Williamson fut énoncée par M. Leudesdorf dans un Mémoire intitulé : *Theorem in Kinematics* [1]. Du moins, il paraît très-probable que ce nouveau théorème, fondamental dans la question des aires engendrées dans le mouvement plan fermé d'une figure plane invariable, a été suggéré à M. Leudesdorf par la considération de la relation (6). Soient A, B, C trois points de la figure mobile non situés en ligne droite, P un quatrième point de cette figure, X, Y, Z les coordonnées triangulaires du point P par rapport au triangle de référence ABC $\left(X = \frac{BPC}{ABC}, Y = \frac{APC}{ABC}, Z = \frac{APB}{ABC}\right)$, et $BC = a$, $AC = b$, $AB = a$; alors, si l'on désigne par (A), (B), (C), (P) les aires totales des trajectoires décrites par les points A, B, C, P dans un mouvement fermé de la figure mobile, ces aires sont liées par la relation

$$(7) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P) + \pi(a^2YZ + b^2XZ + c^2XY)$$

ou

$$(8) \qquad (P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + \pi t^2,$$

t^2 étant le carré de la tangente menée du point P au cercle qui passe par A, B, C. Telle est la forme sous laquelle M. Leudesdorf énonça primitivement son théorème; sa démonstration suppose que la figure mobile, pour retourner à sa position initiale, subit une révolution complète de zéro à 2π dans le plan fixe. M. Kempe fit bientôt la remarque [2] que cette restriction n'est pas nécessaire. La figure peut revenir à sa position primitive, soit en ayant subi un nombre entier quelconque N de révolutions complètes, soit en n'ayant tourné que d'un angle θ moindre que 2π et accompli ensuite un mouvement de retour. Dans le premier cas, celui d'un mouvement fermé continu, le dernier terme du second membre dans les formules (7) et (8) doit être affecté du facteur N, et dans le second, celui d'un mouvement fermé alternatif, ce terme disparaît, N étant

(1) *The Messenger of Mathematics*, t. VII, 1877, p. 125.
(2) *Note on Mr. Leudesdorf's theorem in Kinematics*. (*Ibid.*, p. 165).

égal à zéro. On a donc définitivement

$$(9) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P) + N\pi(a^2YZ + b^2XZ + c^2XY)$$

ou

$$(10) \qquad (A)X + (B)Y + (C)Z = (P),$$

suivant que le mouvement fermé se compose de N révolutions complètes ou d'une révolution partielle et d'un mouvement de retour, les formules (7) et (8) ayant lieu dans le seul cas de $N = 1$.

6. Le théorème de M. Leudesdorf conduit immédiatement à un corollaire très-intéressant relatif à la distribution sur le plan mobile des points qui décrivent des aires données sur le plan fixe dans un mouvement fermé quelconque, corollaire qui fut énoncé par M. Kempe ([1]), bientôt après la publication de la relation (7), dans les termes suivants : *Lorsqu'un plan qui glisse sur un autre plan fixe se meut à partir d'une position déterminée d'une manière quelconque, en faisant un certain nombre de révolutions complètes, et revient à sa position initiale, on peut trouver dans le plan mobile une circonférence dont tous les points décrivent sur le plan fixe des courbes d'aire nulle, et, si l'on prend dans le plan mobile une autre circonférence quelconque, concentrique à la première, les aires décrites par tous les points de cette nouvelle circonférence sont constantes et proportionnelles à l'aire comprise entre cette circonférence et celle des aires nulles. Dans le cas où le plan revient à sa position initiale sans avoir accompli une révolution complète, le système des circonférences concentriques est remplacé par un système de droites parallèles, l'aire décrite par un point d'une droite quelconque étant proportionnelle à la distance entre cette droite et la droite des aires nulles.* Les aires dont il s'agit ici sont toujours les aires totales embrassées par les trajectoires fermées.

Dans une Note postérieure sur le même sujet ([2]), M. Kempe a

([1]) *A theorem in Kinematics.* (*Ibid.*, p. 190.)

([2]) *A kinematical Theorem.* (*Nature*, t. XVIII, n° 449, année 1878, p. 148; *voir* aussi *Messenger*, t. VIII, p. 42.)

donné, pour le cas de N révolutions complètes, la formule

$$(11) \qquad (P) = N\pi(r^2 - q^2),$$

(P) étant l'aire décrite par un point P du plan mobile qui se trouve à une distance r du centre des circonférences concentriques, et q désignant le rayon de la circonférence dont tous les points engendrent des aires égales à *zéro* et que nous nommerons la *circonférence des aires nulles*. Cette formule exprime que l'aire décrite par un point P de la figure mobile est égale à N fois l'aire de l'anneau compris entre la circonférence des aires nulles et la circonférence concentrique passant par P. Il faut ajouter que, dans ces considérations, les aires des courbes analogues à la figure d'un 8, ainsi que celles des trajectoires décrites par un mouvement de va-et-vient, sont regardées comme égales à zéro; car, dans le premier cas, l'aire est composée de deux parties égales et de signes contraires, et, dans le second, une même ligne non fermée est parcourue deux fois en sens inverse.

Je ferai voir, dans la suite de ce travail, que le théorème de M. Kempe, pour être applicable à tous les cas, doit être modifié et complété sous plusieurs rapports. Toutefois ces modifications ne touchent pas à la partie relative à la distribution des points engendrant des aires égales sur des circonférences concentriques. En n'y considérant que cette partie et en la comparant aux théorèmes de Steiner énoncés plus haut, on remarquera la différence entre les résultats des deux géomètres. Le théorème de M. Kempe n'implique, relativement à la forme des deux centroïdes du mouvement, que la seule restriction que ces courbes soient toutes deux fermées et aient des périmètres dont le rapport soit commensurable. Les propriétés dues à Steiner ont lieu pour des centroïdes fermés ou non fermés, mais continuellement convexes. Ensuite les aires dont il s'agit chez les deux auteurs ne sont pas les mêmes : M. Kempe considère l'aire totale de la trajectoire fermée; Steiner n'en considère qu'une partie comprise entre cette trajectoire et le centroïde fixe β, ces deux espèces d'aires ne différant d'ailleurs entre elles que d'une quantité constante, qui est l'aire totale de la courbe β ou un multiple de cette aire.

Quoi qu'il en soit, autant qu'il s'agit des mouvements plans fermés, le théorème de M. Kempe, modifié comme on le verra plus loin, est complétement général et du même ordre d'importance pour l'étude des aires des trajectoires dans les mouvements fermés, que les théorèmes connus sur l'existence du centre instantané de rotation, des centres des accélérations, de la circonférence des inflexions, etc., le sont pour l'étude des vitesses, des accélérations, des courbures des trajectoires, etc.

Tels sont les principaux résultats obtenus relativement aux aires des trajectoires dans les mouvements plans. J'ai l'intention, dans ce qui va suivre, d'ajouter à cette étude quelques développements dont voici une analyse succincte.

7. Je m'occupe d'abord du théorème de M. Kempe. Je développe l'équation du système des circonférences concentriques en coordonnées cartésiennes rectangulaires, et je trouve les expressions pour les coordonnées de leur centre commun Z, et pour le rayon de la circonférence dont les points engendrent des aires d'une grandeur assignée k. J'indique les limites entre lesquelles k peut varier dans un mouvement donné, et je démontre une nouvelle propriété remarquable du point Z, qui consiste en ce que ce point décrit toujours l'aire minimum. Je passe ensuite à la circonférence des aires nulles, et je fais voir que cette circonférence n'existe pas en réalité dans tout mouvement plan fermé continu, comme l'admet M. Kempe dans l'énoncé de son théorème; au contraire, dans un grand nombre de cas, il n'y a pas de points dans le plan mobile qui engendrent des aires égales à zéro, ce qui prouve en même temps que ce n'est pas à la circonférence des aires nulles, mais plutôt au point Z (existant toujours) qu'appartient le rôle principal dans l'étude des relations entre les aires des trajectoires. Je donne les conditions de l'existence réelle de la circonférence des aires nulles et je démontre que, dans les cas où elle devient imaginaire, la formule (11) de M. Kempe pour la détermination d'une aire (A) décrite par un point A, situé à une distance r de Z, subsiste en y remplaçant la différence $r^2 - q^2$ par la somme $r^2 + q^2$, q désignant maintenant le coefficient réel de l'expression que l'on trouve pour le rayon du cercle imaginaire.

Après avoir appliqué ces résultats à quelques exemples, je considère le cas $N = 0$, c'est-à-dire celui d'un mouvement fermé alternatif, et je trouve l'équation en coordonnées rectangulaires du système des droites parallèles et celle de la droite des aires nulles, qui remplacent dans ce cas les circonférences concentriques et la circonférence des aires nulles.

Je donne ensuite une nouvelle démonstration très-simple et purement géométrique du théorème de M. Leudesdorf, fondée sur la notion du centre instantané; enfin je termine par quelques observations sur l'application pratique du théorème VI de M. Williamson à la quadrature des courbes fermées.

II.

8. Pour trouver le lieu des points P du plan mobile qui, dans un mouvement fermé continu de ce plan, engendrent des figures d'une aire constante égale à k, il faut poser $(\mathrm{P}) = \text{const.} = k$ dans l'équation (9). La relation

$$(12)\quad \mathrm{N}\pi(a^2\mathrm{YZ} + b^2\mathrm{XZ} + c^2\mathrm{XY}) - (\mathrm{A})\mathrm{X} - (\mathrm{B})\mathrm{Y} - (\mathrm{C})\mathrm{Z} + k = 0$$

est donc l'équation du lieu cherché en coordonnées triangulaires X, Y, Z relatives au triangle de référence ABC. Pour discuter cette équation, il est préférable d'y remplacer X, Y, Z par les coordonnées cartésiennes rectangulaires. A cet effet, remarquons d'abord qu'en posant $\mathrm{PA} = a'$, $\mathrm{PB} = b'$, $\mathrm{PC} = c'$, on a (¹)

$$a^2\mathrm{YZ} + b^2\mathrm{XZ} + c^2\mathrm{XY} = a'^2\mathrm{X} + b'^2\mathrm{Y} + c'^2\mathrm{Z},$$

et que, par conséquent, l'équation (12) peut être mise sous la forme

$$(13)\quad \mathrm{N}\pi(a'^2\mathrm{X} + b'^2\mathrm{Y} + c'^2\mathrm{Z}) - (\mathrm{A})\mathrm{X} - (\mathrm{B})\mathrm{Y} - (\mathrm{C})\mathrm{Z} + k = 0.$$

Soient maintenant respectivement x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 les coordonnées cartésiennes des points P, A, B, C, par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, pris d'une manière quelconque dans le plan mobile et invariablement liés à ce plan. En désignant par S l'aire du triangle ABC et par $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$ les aires

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Leudesdorf (*Messenger*, t. VII, p. 216).

des triangles OBC, OAC, OAB, ce qui revient à poser

$$(14)\qquad x_2y_3 - x_3y_2 = \alpha,\quad x_3y_1 - x_1y_3 = \beta,\quad x_1y_2 - x_2y_1 = \gamma,$$

$$(15)\qquad \alpha + \beta + \gamma = 2S,$$

on aura évidemment

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + \alpha}{2S},\\ Y &= \frac{x(y_3 - y_1) - y(x_3 - x_1) + \beta}{2S},\\ Z &= \frac{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + \gamma}{2S}.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} a'^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,\\ b'^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2,\\ c'^2 &= (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2.\end{aligned}\right.$$

Enfin, soient encore

$$\mathrm{OA} = r_1,\quad \mathrm{OB} = r_2,\quad \mathrm{OC} = r_3,$$

ou

$$(18)\qquad x_1^2 + y_1^2 = r_1^2,\quad x_2^2 + y_2^2 = r_2^2,\quad x_3^2 + y_3^2 = r_3^2.$$

En portant les valeurs (16) et (17) dans l'équation (13), on obtient, eu égard aux relations (14), (15), (18), et toutes réductions faites, l'équation du lieu cherché en coordonnées rectangulaires x, y sous la forme

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &2N\pi S(x^2 + y^2) + \big\{[(A) - N\pi r_1^2](y_2 - y_3) + [(B) - N\pi r_2^2](y_3 - y_1)\\ &\qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2](y_1 - y_2)\big\}x\\ &\qquad - \big\{[(A) - N\pi r_1^2](x_2 - x_3) + [(B) - N\pi r_2^2](x_3 - x_1)\\ &\qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2](x_1 - x_2)\big\}y\\ &\qquad + [(A) - N\pi r_1^2]\alpha + [(B) - N\pi r_2^2]\beta\\ &\qquad\qquad + [(C) - N\pi r_3^2]\gamma - 2kS = 0.\end{aligned}\right.$$

Ce lieu est donc une circonférence. Si l'on attribue à la constante k différentes valeurs particulières, l'équation (19) représente un système de circonférences concentriques. En d'autres termes, les points du plan mobile qui engendrent des figures d'aire constante sont distribuées dans ce plan sur des circonférences concentriques, dont chacune correspond à une valeur déterminée de k, ce qui constitue une partie du théorème de M. Kempe. On trouve, pour les coordonnées ξ, η du centre commun Z de ces circonférences, les expressions

$$(20)\quad \begin{cases} \xi = -\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(A)-N\pi r_1^2}{N\pi S}(y_2-y_3)+\dfrac{(B)-N\pi r_2^2}{N\pi S}(y_3-y_1)+\dfrac{(C)-N\pi r_3^2}{N\pi S}(y_1-y_2)\right], \\ \eta = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{(A)-N\pi r_1^2}{N\pi S}(x_2-x_3)+\dfrac{(B)-N\pi r_2^2}{N\pi S}(x_3-x_1)+\dfrac{(C)-N\pi r_3^2}{N\pi S}(x_1-x_2)\right], \end{cases}$$

et pour le rayon R de la circonférence, dont les points engendrent des figures d'une aire égale à k,

$$(21)\quad R = \sqrt{\xi^2+\eta^2-\left[\frac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\frac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\frac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma-\frac{k}{N\pi}\right]}.$$

9. Les formules (20) montrent que le point remarquable Z, centre des circonférences concentriques (19), existe toujours et se trouve à distance finie tant que N est différent de zéro, c'est-à-dire dans tout mouvement fermé continu, et que la détermination de ce point exige, en général, la connaissance des aires (A), (B), (C) décrites par trois points A, B, C de la figure mobile non situés en ligne droite. Ce point Z jouit encore d'une propriété importante qui sera démontrée plus loin.

Dans certains cas particuliers, le point Z peut être reconnu immédiatement sans aucune recherche. C'est ce qui arrive, par exemple, pour tout mouvement fermé continu dont les deux centroïdes sont des circonférences; car il est visible qu'alors les points de chaque circonférence concentrique au cercle roulant engendrent des courbes identiques entre elles et renfermant, par conséquent, des aires égales; donc le point Z est le centre du cercle roulant.

Pour pouvoir discuter l'expression de R (21), tâchons d'abord de la mettre sous une forme plus simple. Puisque le point Z existe toujours et se trouve à distance finie, rien n'empêche d'y transporter l'origine des axes Ox, Oy, qui a été prise dans le plan mobile d'une manière tout à fait arbitraire. Mais alors

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et les équations (19), (21) se réduisent à

$$(22)\quad x^2+y^2=\frac{k}{N\pi}-\left[\frac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\frac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\frac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma\right],$$

$$(23)\quad R=\sqrt{\frac{k}{N\pi}-\left[\frac{(A)-N\pi r_1^2}{2N\pi S}\alpha+\frac{(B)-N\pi r_2^2}{2N\pi S}\beta+\frac{(C)-N\pi r_3^2}{2N\pi S}\gamma\right]},$$

r_1, r_2, r_3 désignant maintenant les distances des points A, B, C au point Z. Imaginons ces trois points A, B, C pris sur une même circonférence ayant Z pour centre et r pour rayon; dans ce cas, $r_1=r_2=r_3=r$, et, d'après ce qui a été trouvé plus haut,

$$(A)=(B)=(C).$$

La formule (23) devient donc, eu égard à la relation (15),

$$(24)\qquad R=\sqrt{\frac{k-[(A)-N\pi r^2]}{N\pi}},$$

où r est la distance du point A au point Z.

Cette expression n'est pas toujours réelle; elle devient imaginaire dans les cas suivants :

1° Si $(A)>0$, $(A)>N\pi r^2$ pour les valeurs de k positives et moindres que $(A)-N\pi r^2$, et pour les valeurs de k négatives et quelconques;

2° Si $(A)>0$, $(A)<N\pi r^2$, pour les valeurs de k négatives et numériquement plus grandes que $N\pi r^2-(A)$;

3° Si $(A)<0$, pour les valeurs de k négatives et numériquement plus grandes que $N\pi r^2-(A)$, une aire quelconque (A) étant regardée comme positive ou comme négative, suivant qu'elle est décrite dans un sens identique ou contraire à celui du mouvement considéré de la figure mobile.

Cette discussion conduit facilement aux conclusions suivantes :

Quand on prend à volonté, parmi les différentes aires engendrées dans un mouvement fermé continu déterminé, composé de N révolutions complètes, une aire (A) décrite par un point A du plan mobile situé à une distance r du point Z, alors : 1° si $(A)>0$ et $(A)>N\pi r^2$, c'est-à-dire si l'aire (A) est positive et plus grande que N fois l'aire du cercle de rayon r, les aires décrites par les différents points du plan mobile sont toutes positives et ne peuvent pas être moindres que la différence $(A) - N\pi r^2$; 2° si $(A) > 0$ et $(A) < N\pi r^2$, ou si $(A) < 0$, c'est-à-dire si l'aire (A) est positive et moindre que N fois l'aire du cercle de rayon r, ou bien si (A) est négative et d'ailleurs quelconque, les aires décrites par les points du plan mobile sont en partie positives et en partie négatives, les aires positives pouvant être d'une grandeur quelconque et les aires négatives ne pouvant pas surpasser numériquement la différence $N\pi r^2 - (A)$. Il s'ensuit que, dans tout mouvement fermé continu, l'aire décrite minimum k_m est

$$k_m = (A) - N\pi r^2. \tag{25}$$

En prenant pour le point A le point Z, pour lequel $r = 0$, et en désignant par (Z) l'aire engendrée par ce point, on trouve

$$(Z) = k_m.$$

En d'autres termes, le *point* Z jouit de cette remarquable propriété qu'*il décrit l'aire minimum*. La relation (25) peut encore s'écrire

$$(A) = (Z) + N\pi r^2, \tag{26}$$

formule très-simple, qui relie les aires décrites par le point Z et par un point quelconque A de la figure; elle exprime que l'aire engendrée par un point A excède l'aire minimum engendrée par le point Z de N fois l'aire d'un cercle ayant la distance des points A et Z pour rayon.

10. Passons maintenant à la circonférence des aires nulles. On obtient le rayon R_0 de cette circonférence en posant $k = 0$ dans la formule (24), ce qui donne

$$R_0 = \sqrt{\frac{N\pi r^2 - (A)}{N\pi}}. \tag{27}$$

Lorsque l'aire (A) est négative et quelconque, ou positive et moindre que $N\pi r^2$, cette expression a une valeur réelle q; mais, si l'aire (A) est positive et plus grande que $N\pi r^2$, on trouve pour R_0 une valeur imaginaire

$$R_0 = \sqrt{-\frac{(A) - N\pi r^2}{N\pi}} = q\sqrt{-1}, \tag{28}$$

q désignant toujours une quantité réelle; dans ce dernier cas, la circonférence des aires nulles n'existe plus. Donc il existe dans le plan mobile des points qui engendrent des aires nulles, et qui se trouvent alors sur une circonférence ayant Z pour centre et q pour rayon, lorsque, (A) étant une aire décrite par un point quelconque du plan situé à une distance r du point Z, cette aire est négative et quelconque, ou positive et moindre que N fois l'aire du cercle de rayon r; si, au contraire, l'aire (A) est positive et plus grande que N fois l'aire du cercle de rayon r, tous les points du plan engendrent des aires différentes de zéro. Enfin, si $(A) = N\pi r^2$, la formule (27) donne $R_0 = 0$; la circonférence des aires nulles se réduit au point Z.

Les formules (24) et (27) font voir que, pour pouvoir déterminer le rayon R de la circonférence, lieu des points du plan mobile décrivant des aires égales à k, et, en particulier, le rayon R_0 de la circonférence des aires nulles, si cette circonférence existe, il faut connaître l'aire (A) décrite par un point quelconque du plan.

Quand la circonférence des aires nulles a une existence réelle, on tire de (27), en désignant par q la valeur réelle de son rayon,

$$(29) \qquad (A) = N\pi(r^2 - q^2).$$

C'est la formule (11) de M. Kempe, qui exprime que l'aire décrite par un point quelconque A du plan mobile est égale à l'aire de l'anneau compris entre la circonférence des aires nulles et la circonférence concentrique qui passe par le point A. Mais, lorsque la circonférence des aires nulles est imaginaire, la formule (29) n'a plus lieu; il vient alors, d'après la formule (28),

$$(30) \qquad (A) = N\pi(r^2 + q^2),$$

q désignant maintenant le coefficient réel de l'expression imaginaire pour R_0.

L'équation (29) admet encore une autre interprétation géométrique. Pour tout point du plan mobile extérieur à la circonférence des aires nulles, (A) est positive, et la différence $r^2 - q^2$ est égale au carré de la tangente t menée du point A à cette circonférence. Pour tout point intérieur, (A) est négative, et la différence $q^2 - r^2$ représente le carré de la tangente t_1 menée à la circonférence passant par A, en ce point, jusqu'à la rencontre avec la circonférence des aires nulles. Donc, en désignant par A, A′ deux points du plan et par t, t' ou t_1, t'_1 les tangentes correspondantes, on a, d'après (29), pour les points extérieurs,

$$(A):(A') = t^2 : t'^2,$$

et pour les points intérieurs

$$(A):(A') = t_1^2 : t_1'^2.$$

Les aires décrites par les différents points A, A′, ... du plan mobile, quand la circonférence des aires nulles existe, sont donc entre elles comme les carrés des tangentes t, t', ..., ou t_1, t'_1, ..., suivant que ces points se trouvent à l'extérieur ou dans l'intérieur de la circonférence des aires nulles.

Si l'on pose $r = 0$ dans la formule (29), on trouve la relation

$$(Z) = -N\pi q^2,$$

qui servira à déterminer l'aire minimum décrite par le point Z dans les cas où l'on connaît *a priori* le rayon de la circonférence des aires nulles.

11. Appliquons ces résultats à quelques exemples.

(*a*) *Mouvement cardioïdal.* — Supposons que le plan mobile soit entraîné dans le roulement d'une circonférence de rayon ρ sur une autre circonférence égale à la première. Dans ce cas, si l'on considère un roulement complet, $N = 2$, et, d'après une remarque faite plus haut, le point Z coïncide avec le centre du cercle roulant. L'aire minimum (Z) est donc l'aire positive du cercle de rayon 2ρ engendré par ce centre; par conséquent $(Z) = 4\pi\rho^2$. Tout point A situé sur la circonférence mobile décrit une cardioïde; la formule (26) donne pour l'aire (A) de cette courbe, en y faisant $r = \rho$,

$$(A) = 6\pi\rho^2,$$

résultat connu. L'aire (A) étant positive et plus grande que $N\pi r^2$, toutes les autres aires le sont aussi. La circonférence des aires nulles est imaginaire; le coefficient réel q de l'expression (28) est égal à $\rho\sqrt{2}$. L'aire décrite par un point A′ situé à une distance p du centre Z est donc, d'après la formule (30),

$$(A') = 2\pi(p^2 + 2\rho^2),$$

ce qu'on trouverait aussi au moyen de la formule (26).

(*b*) *Mouvement hypocycloïdal de Cardan* [1]. — Considérons le mouvement plan fermé produit par un roulement complet d'une circonférence de rayon ρ dans l'intérieur d'une circonférence de rayon double. Actuellement $N = 1$. Le point Z est de nouveau au centre du cercle roulant; l'aire minimum (Z) est donc $-\pi\rho^2$, la circonférence de cette aire étant parcourue dans un sens opposé à celui du mouvement de la figure. Un point quelconque A situé à une distance p de Z décrit une ellipse dont l'aire (A) est donnée par la formule (26); cette aire est

$$(A) = -\pi(\rho^2 - p^2) \quad \text{ou} \quad A = \pi(p^2 - \rho^2),$$

suivant que A est dans l'intérieur ou l'extérieur du cercle roulant. Dans le premier cas $(A) < 0$, et dans le second

$$(A) > 0 \quad \text{et} \quad (A) < N\pi r^2;$$

donc les points de la figure mobile engendrent des aires positives de toutes grandeurs et des aires négatives qui numériquement ne surpassent pas $\pi\rho^2$. La circonférence des aires nulles existe; on trouve pour son rayon

$$R_0 = \rho;$$

elle coïncide donc avec la circonférence roulante, ce qui était facile à reconnaître *a priori*, car on sait que tous les points de cette circonférence oscillent sur des diamètres du cercle fixe.

(*c*) *Rotation autour d'un point fixe*. — Dans ce cas, pour un tour complet, $N = 1$. Le point Z coïncide évidemment avec le point fixe, $(Z) = 0$, et pour tout autre point A, situé à une distance r de Z, $(A) = \pi r^2$. La circonférence des aires nulles se réduit au centre de rotation.

12. Il reste à examiner le cas particulier d'un mouvement fermé alternatif. Dans ce cas $N = 0$ et l'équation (12) du lieu des points du plan mobile qui engendrent des figures d'aire const. $= k$ se trouve remplacée par la plus simple

$$(A)X + (B)Y + (C)Z - k = 0. \tag{31}$$

[1] Pour justifier cette dénomination, on se rappellera qu'une des principales propriétés du mouvement dont il s'agit ici a été découverte par Cardan.

Pour avoir l'équation de ce lieu en coordonnées rectangulaires, il suffit de poser $N = o$ dans l'équation (19); on trouve

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &[(A)(y_2-y_3)+(B)(y_3-y_1)+(C)(y_1-y_2)]x \\ &-[(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)]y \\ &\qquad\qquad +(A)\alpha+(B)\beta+(C)\gamma-2kS=o. \end{aligned}\right.$$

Le lieu cherché est donc une droite. Si l'on attribue à la constante k différentes valeurs particulières, l'équation (32) représente un système de droites parallèles, le long desquelles se trouvent distribués dans le plan mobile les points décrivant des figures d'aires constantes. Il existe, en général, une droite à distance finie pour chaque valeur finie positive ou négative de k. Parmi ces droites il y en a une qui correspond à $k = o$; l'équation de cette *droite des aires nulles* est

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &[(A)(y_2-y_3)+(B)(y_3-y_1)+(C)(y_1-y_2)]x \\ &-[(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)]y \\ &\qquad\qquad +(A)\alpha+(B)\beta+(C)\gamma=o. \end{aligned}\right.$$

Pour pouvoir déterminer une des droites (32) ou, en particulier, la droite des aires nulles (33), il faut connaître les aires (A), (B), (C) décrites par trois points A, B, C du plan mobile non situés en ligne droite.

En désignant par τ l'angle formé par les droites (32) avec l'axe des abscisses, l'aire (P) engendrée par un point quelconque P, situé à une distance δ de la droite des aires nulles (33), est donnée par la formule

$$(P)=\frac{(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)}{2S\cos\tau}\delta,$$

ou, si l'on prend l'axe des abscisses parallèle aux droites (32),

$$(34)\qquad (P)=\frac{(A)(x_2-x_3)+(B)(x_3-x_1)+(C)(x_1-x_2)}{2S}\delta.$$

L'aire (P) est donc proportionnelle à la distance δ du point décrivant P à la droite des aires nulles, ce qui est conforme à l'énoncé de M. Kempe.

Le mouvement de la bielle dans la transmission ordinaire par bielle et manivelle fournit un exemple simple du mouvement fermé alternatif. La bielle oscille de part et d'autre de sa position moyenne, en décrivant par l'une de ses extrémités une circonférence dont l'aire est πf^2, f désignant la longueur de la manivelle, et par l'autre extrémité une droite, dont l'aire est nulle. Cette seconde extrémité est donc un des points de la droite des aires nulles, dont nous omettons ici la détermination complète. Les points de la bielle elle-même et de son prolongement au delà du bouton de la manivelle décrivent des aires positives, et les points de son prolongement au delà de l'articulation qui la relie à la tige guidée engendrent des aires négatives.

13. En résumant tout ce qui vient d'être dit sur les relations entre les aires décrites dans un mouvement fermé continu ou alternatif, on voit que le théorème de M. Kempe (n° 6) doit être remplacé par celui-ci :

Quand une figure plane se meut dans son plan à partir d'une position donnée et revient vers la fin du déplacement à sa position initiale, après avoir accompli un certain nombre N *de révolutions complètes, tous les points du plan invariablement liés à la figure mobile engendrent des lignes fermées dont les aires totales varient ainsi avec la position du point décrivant :*

Les points qui engendrent des lignes d'une aire constante sont situés sur une circonférence ; toutes les circonférences correspondantes aux différentes valeurs des aires décrites sont concentriques, et leur centre commun Z *est le point du plan qui engendre la ligne d'aire minimum. L'aire décrite par un point quelconque est égale à cette aire minimum augmentée de* N *fois l'aire du cercle ayant la distance du point considéré au point* Z *pour rayon. Dans certains cas il existe parmi les circonférences concentriques une dont les points engendrent des aires nulles ; cela arrive lorsqu'une des aires décrites, prise à volonté, est négative, ou positive, mais moindre que* N *fois l'aire du cercle ayant pour rayon la distance du point qui décrit l'aire choisie au point* Z. *Quand cette circonférence des aires nulles existe, les aires décrites par les différents points du plan sont en partie positives, en partie négatives, les aires positives pouvant être d'une grandeur quelconque et les aires négatives ne pouvant surpasser la valeur numérique* *de l'aire* (Z). *Si la circonférence des aires nulles n'existe pas, les aires décrites sont toutes positives et ne peuvent pas être moindres que* (Z). *Dans le cas où la circonférence des aires nulles a une existence réelle, l'aire décrite par un point quelconque est encore exprimée par* N *fois l'aire de l'anneau compris entre cette circonférence et une circonférence concentrique passant par le point considéré.*

Lorsque la figure ne tourne que d'un angle moindre que 2π *et revient ensuite à sa position initiale, les circonférences concentriques sont remplacées par un système de droites parallèles; parmi ces droites, il en existe une dont les points engendrent des aires nulles, et l'aire décrite par un point quelconque du plan mobile est proportionnelle à la distance de ce point à la droite des aires nulles.*

On voit par ce théorème, ainsi que je l'ai déjà remarqué plus haut, que ce n'est pas la circonférence des aires nulles, qui dans beaucoup de cas devient imaginaire, mais plutôt le point toujours réel Z, qui joue le rôle principal dans l'étude des aires engendrées dans les mouvements fermés continus.

14. La proposition du numéro précédent n'est qu'une conséquence du théorème de M. Leudesdorf exprimé par les équations (9) et (10). On a donné plusieurs démonstrations de ce dernier théorème [1]. En voici encore une qui me semble digne d'attention par sa simplicité. Soient P et M deux points du plan mobile, P′ et M′ leurs positions infiniment voisines, γ et γ' les positions correspondantes du centre instantané, (P) et (M) les aires totales, décrites par P et M dans le mouvement fermé du plan. La figure montre que

$$MM'P'P = M\gamma P + P\gamma P' - M\gamma M' - M'\gamma P'.$$

Mais, en vertu de la définition même du centre instantané, les lignes infiniment petites MM′, PP′ peuvent être considérées comme des arcs de cercle dont le centre commun est en γ; on a donc $\gamma M = \gamma M'$, $\gamma P = \gamma P'$; d'ailleurs $PM = P'M'$, puisque ce sont deux

---

[1] Voir *Messenger*, t. VII, p. 125, 166, et t. VIII, p. 11.

positions d'une même droite invariable. Les triangles $M\gamma P$, $M'\gamma P'$ sont égaux et par suite

$$MM'P'P = P\gamma P' - M\gamma M',$$

ou

$$MM'P'P = \tfrac{1}{2}\overline{P\gamma}^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\overline{M\gamma}^2 d\omega,$$

$d\omega$ étant l'angle de rotation élémentaire autour du centre instantané à l'instant considéré. Une équation analogue aura lieu pour chaque déplacement élémentaire du plan mobile. En faisant la somme de toutes ces équations pour le mouvement fermé total et en observant que la somme des premiers membres $\Sigma MM'P'P$ sera égale à la différence $(P)-(M)$, on trouve

$$(35)\qquad (P) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{P\gamma}^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2 d\omega.$$

On aura de même, pour trois autres points A, B, C du plan mobile, non situés en ligne droite,

$$(A) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{A\gamma}^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2 d\omega,$$
$$(B) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{B\gamma}^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2 d\omega,$$
$$(C) = (M) + \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{C\gamma}^2 d\omega - \tfrac{1}{2}\Sigma\overline{M\gamma}^2 d\omega.$$

Multiplions les trois dernières équations respectivement par les coordonnées triangulaires X, Y, Z du point P relatives au triangle de référence ABC, et retranchons ensuite leur somme de l'équation (35); eu égard à la relation évidente

$$X + Y + Z = 1,$$

il vient

$$P - (A)X - (B)Y - (C)Z = \tfrac{1}{2}\Sigma(\overline{P\gamma}^2 - \overline{A\gamma}^2 X - \overline{B\gamma}^2 Y - \overline{C\gamma}^2 Z)d\omega.$$

Mais t étant la longueur de la tangente menée du point P à la circonférence circonscrite au triangle ABC, on a la relation géométrique facile à démontrer ([1])

$$\overline{P\gamma}^2 - \overline{A\gamma}^2 X - \overline{B\gamma}^2 Y - \overline{C\gamma}^2 Z = t^2;$$

([1]) Voir *Messenger*, t. VIII, p. 12.

donc, puisque t ne varie pas pendant le mouvement,

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + \tfrac{1}{2}t^2\Sigma d\omega,$$

suivant que le plan mobile accomplit N révolutions complètes, ou tourne d'un angle quelconque moindre que 2π et revient ensuite à sa position primitive, la somme $\Sigma d\omega$ sera égale à $2N\pi$ ou à zéro. On a donc enfin

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z + N\pi t^2,$$

ou

$$(P) = (A)X + (B)Y + (C)Z,$$

selon que le mouvement fermé est continu ou alternatif. C'est le théorème de M. Leudesdorf.

15. Dans le cas particulier où le point P est situé sur la droite AB et la partage en deux parties $AP = c_1$, $PB = c_2$, le théorème de M. Leudesdorf fournit la relation (6) de M. Williamson. En effet, dans cette hypothèse, $Z = 0$ et $X = \dfrac{c_2}{c_1 + c_2}$, $Y = \dfrac{c_1}{c_1 + c_2}$. La formule de M. Leudesdorf, prise sous la forme (9), donne donc

$$(P) = \frac{(A)c_2 + (B)c_1}{c_1 + c_2} - N\pi c_1 c_2. \tag{36}$$

Cette équation ne diffère de (6) que par la présence du coefficient N devant le dernier terme; ce coefficient manque chez M. Williamson, puisque sa démonstration suppose que la droite AB fait une seule révolution complète, restriction qui n'est pas nécessaire.

Par exemple, si l'on voulait, au moyen de la formule (36), calculer l'aire totale de la courbe fermée décrite dans un mouvement cardioïdal par le milieu d'un rayon ρ de la circonférence roulante, on pourrait considérer cette aire comme engendrée par le milieu P d'une droite rigide, dont une extrémité A décrit une circonférence de rayon 2ρ et l'autre, B, une cardioïde. Mais cette droite accomplit *deux* révolutions complètes pendant un roulement total du cercle mobile; donc, actuellement, $N = 2$. D'ailleurs $(A) = 4\pi\rho^2$, $(B) = 6\pi\rho^2$ (nº 11), $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\rho$ et la formule (36) donne pour l'aire cherchée

$$(\mathrm{P}) = \frac{q}{2}\pi\rho^2,$$

résultat conforme à celui qu'on trouve par les formules ordinaires pour la quadrature des épicycloïdes.

Si le mouvement considéré de la droite AB est fermé alternatif, alors $N = 0$, et la formule (36) se réduit à

$$(37) \qquad (\mathrm{P}) = \frac{(\mathrm{A})c_2 + (\mathrm{B})c_1}{c_1 + c_2}.$$

Au moyen de cette formule il est facile, par exemple, de déterminer l'aire engendrée par un point quelconque P d'une bielle qui transforme le mouvement de rotation d'une manivelle en un mouvement rectiligne alternatif d'une autre tige. Soient A l'extrémité de la bielle articulée à la manivelle, B l'autre extrémité unie à la tige guidée, f et l les longueurs de la manivelle et de la bielle et p la distance du point décrivant P à l'extrémité A. On a $(\mathrm{A}) = \pi f^2$, $(\mathrm{B}) = 0$, $c_1 = p$, $c_2 = l - p$, et la formule (37) donne

$$(\mathrm{P}) = \frac{\pi f^2 (l - p)}{l}.$$

J'ajouterai encore deux observations relatives à l'application de la formule (36). D'abord il ne faut pas oublier que le point P, situé sur AB, peut partager la distance des points A, B dans le rapport $c_1 : c_2$ intérieurement ou extérieurement, et que, dans ce dernier cas, les formules (36) et (37) subsistent en y considérant seulement comme négative l'une des quantités c_1 ou c_2.

Ensuite, on ne doit pas perdre de vue que, lorsque la courbe dont on cherche l'aire a des nœuds, la formule (36) ne donne pas l'aire véritable, qui est égale à l'aire limitée par la courbe prise sans nœuds, augmentée de la somme des aires des nœuds, mais une aire qui excède celle qu'on cherche de la somme des aires des nœuds, de manière que cette somme entre deux fois dans (P), comme cela aurait lieu si l'on cherchait l'aire d'une courbe à nœuds par la formule de quadrature $\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$.

Ainsi, si l'on voulait déterminer l'aire totale de la *trisectrice*, courbe à un nœud décrite dans le mouvement cardioïdal par un point situé à une distance du centre du cercle roulant égale au diamètre 2ρ de ce cercle, on trouverait par la formule (36), en y faisant $(A) = 4\pi\rho^2, (B) = 6\pi\rho^2, c_1 = 2\rho, c_2 = -\rho, N = 2,$

$$(P) = 12\pi\rho^2,$$

tandis qu'en réalité l'aire totale de la trisectrice considérée est ([1])

$$8\pi\rho^2 + 6\sqrt{3}\rho^2.$$

La valeur fournie par la formule (36) excède donc l'aire cherchée de

$$4\pi\rho^2 - 6\sqrt{3}\rho^2,$$

quantité précisément égale à l'aire comprise dans le nœud de la courbe.

La même remarque s'applique aux formules (26), (27), (30), et en général à toutes les aires qui figurent dans les théorèmes de MM. Leudersdorf et Kempe.