BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur un problème de géométrie élémentaire

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 298-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_298_1>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. G. DARBOUX.

Considérons un polygone plan ou gauche de n côtés $A_1 A_2 \ldots A_n$. On forme un second polygone du même nombre de côtés en joignant les milieux $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ des côtés $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots, A_n A_1$ du premier. De ce deuxième polygone on en déduit un troisième par la même loi, puis un quatrième, et, en continuant indéfiniment, on obtient ainsi une suite illimitée de polygones. Je me propose de démontrer que ces polygones deviennent de plus en plus petits, c'est-à-dire que tous les sommets du polygone de rang n de la série précédente se rapprochent d'un point fixe quand n croît indéfiniment; et, en même temps, je déterminerai la forme de ce polygone quand il devient infiniment petit.

Rapportons le polygone proposé à trois axes fixes rectangulaires ou obliques, et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les x de ses n sommets. Le succès de la méthode que nous allons suivre repose sur la transformation suivante : appelons $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, définies par la formule

$$\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}, \tag{1}$$

et posons

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \ldots + \omega_n t_n, \\ x_2 = \omega_1^2 t_1 + \omega_2^2 t_2 + \ldots + \omega_n^2 t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_k = \omega_1^k t_1 + \omega_2^k t_2 + \ldots + \omega_n^k t_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \omega_1^n t_1 + \omega_2^n t_2 + \ldots + \omega_n^n t_n. \end{array}\right. \tag{2}$$

On déduira de ces formules

$$n t_k = \omega_k^{n-1} x_1 + \omega_k^{n-2} x_2 + \ldots + \omega_k x_{n-1} + x_n, \tag{3}$$

et en particulier

$$n t_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n. \tag{4}$$

Il résulte de la formule (3) que les quantités t_k, t_{n-k} sont imaginaires conjuguées, et l'on pourra poser

$$t_k = R_k e^{\alpha_k i}, \quad t_{n-k} = R_k e^{-\alpha_k i}, \tag{5}$$

R_k étant le module commun de t_k et de t_{n-k}.

Supposons qu'on forme le second polygone en prenant les milieux des côtés du premier. Les x des sommets de ce nouveau polygone seront définis par les formules

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \ldots, \quad x'_n = \frac{x_n + x_1}{2},$$

et l'on reconnaîtra aisément que ces différentes valeurs sont données par des formules semblables aux équations (2), mais où

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$$

seraient remplacées respectivement par

$$t_1\frac{1+\omega_1}{2},\quad t_2\frac{1+\omega_2}{2},\quad \ldots,\quad t_n\frac{1+\omega_n}{2}.$$

Par conséquent, au bout de p opérations semblables,

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$$

seront remplacées par

$$t_1\left(\frac{1+\omega_1}{2}\right)^p,\quad \ldots,\quad t_n\left(\frac{1+\omega_n}{2}\right)^p.$$

On aura donc, si x_k^p désigne le x du $k^{\text{ième}}$ sommet du $p+1^{\text{ième}}$ polygone de la série considérée,

$$(6)\qquad x_k^p = \omega_1^k t_1\left(\frac{\omega_1+1}{2}\right)^p + \omega_2^k t_2\left(\frac{\omega_2+1}{2}\right)^p + \ldots + \omega_n^k t_n\left(\frac{\omega_n+1}{2}\right)^p.$$

Or on a

$$\frac{\omega_h+1}{2} = e^{\frac{i\pi h}{n}}\cos\frac{\pi h}{n},$$

et par conséquent

$$\text{mod.}\,\frac{\omega_h+1}{2} < 1,$$

tant que h est différent de n.

Par suite, dans la formule (6), tous les termes, sauf le dernier, qui est constamment égal à t_n, auront leurs modules infiniment petits pour n infiniment grand. On a donc

$$\lim x_k^p = t_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Les mêmes conclusions s'appliquent aux autres coordonnées. On voit donc que les polygones successifs deviennent infiniment petits et que tous leurs sommets tendent vers un même point, le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif.

Supposons que ce centre ait été pris pour origine des coordonnées. Alors t_n sera nul, et si, dans la formule (6), on remplace les t par leurs valeurs (5), on aura, en groupant les termes imaginaires conjugués,

$$(7)\qquad x_k^p = 2\sum_\rho \mathrm{R}_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \alpha_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n};$$

la somme étant étendue aux valeurs 1, 2, 3, ..., $\frac{n}{2}-1$ de ρ si n est pair, ou 1, 2, ..., $\frac{n-1}{2}$ si n est impair. On aura pour les autres coordonnées du même point des valeurs semblables :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} y_k^p &= 2\sum_\rho \mathrm{S}_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \beta_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n},\\ z_k^p &= 2\sum_\rho \mathrm{T}_\rho \cos\left(\frac{2k+p}{n}\rho\pi + \gamma_\rho\right)\cos^p\frac{\rho\pi}{n}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque p grandit indéfiniment, tous les termes des seconds membres de ces formules ont zéro pour limite, car ils contiennent tous un cosinus plus petit que l'unité, élevé à la puissance p. On voit donc, comme cela doit être, que tous les sommets se rapprochent de l'origine. Mais, parmi les termes du second membre de chaque formule, il y en a un par rapport auquel tous les autres deviennent infiniment petits : c'est celui qui contient, élevé à la puissance p, le cosinus le plus grand, $\cos\frac{\pi}{n}$. On pourra donc, si l'on garde ce terme unique et si l'on néglige tous les autres, écrire

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} x_k^p &= 2\mathrm{R}_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \alpha_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n},\\ y_k^p &= 2\mathrm{S}_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \beta_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n},\\ z_k^p &= 2\mathrm{T}_1 \cos\left(\frac{2k+p}{n}\pi + \gamma_1\right)\cos^p\frac{\pi}{n},\end{aligned}\right.$$

en commettant une erreur relative d'autant plus petite que p est plus grand.

On peut encore présenter ce résultat en remarquant que, si l'on divise les seconds membres des formules (7) et (8) par $\cos^p\frac{\pi}{n}$, les nouvelles valeurs des coordonnées conviennent à un polygone homothétique à celui qui est défini par ces formules. Tous les termes qui suivent le premier contiennent alors un facteur tel que

$$\left(\frac{\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^p,$$

qui tend vers zéro quand p croît sans limite, et peuvent être négligés vis-à-vis du premier terme, qui demeure fini.

Il résulte des formules (9) que tous les sommets du polygone de rang $p+1$ sont sur la courbe pour laquelle x, y, z sont des fonctions d'une variable φ, définies par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} x = R_1 \cos(\alpha_1 + \varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ y = S_1 \cos(\beta_1 + \varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \\ z = T_1 \cos(\gamma_1 + \varphi)\cos^p\frac{\pi}{n}, \end{cases}$$

et correspondent aux valeurs de φ,

$$\frac{p\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{p\pi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{p\pi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad \frac{p\pi}{n} + 2\pi,$$

La courbe représentée par les équations (10) est en général une ellipse ayant son centre à l'origine. Lorsque p grandit, cette ellipse demeure homothétique à elle-même, mais ses dimensions décroissent en progression géométrique. Quant aux valeurs de φ, comme elles sont en progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, elles définissent un polygone semi-régulier inscrit dans l'ellipse. (On sait que, si l'on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, tout polygone semi-régulier inscrit est par définition la projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle.) Il est même utile de remarquer qu'à toutes les valeurs de p ne correspondent que deux positions pour le polygone; car les valeurs de φ sont celles de la suite

$$0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

si p est pair, et celles de la suite

$$\frac{\pi}{n},\quad \frac{3\pi}{n},\quad \ldots,\quad \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

si p est impair.

On a donc le théorème suivant :

Si l'on considère une suite indéfinie de polygones, tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent, ces polygones deviennent de plus en plus petits, et ils tendent à devenir semblables à des polygones semi-réguliers inscrits dans une ellipse.

Je laisserai de côté le cas exceptionnel où les formules (10) définiraient une droite; mais il sera bon d'examiner ce qui arriverait si R_1, S_1, T_1 étaient nuls simultanément. Alors, en supposant que R_ρ, S_ρ, T_ρ soient le premier groupe pour lequel les trois quantités R, S, T ne soient pas nulles, on sera conduit à substituer aux formules (9) les suivantes :

$$(11)\quad \begin{cases} x_k^p = 2R_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \alpha_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}, \\ y_k^p = 2S_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \beta_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}, \\ z_k^p = 2T_\rho \cos\left(\dfrac{2k+p}{n}\rho\pi + \gamma_\rho\right)\cos^p\dfrac{\rho\pi}{n}. \end{cases}$$

Ici encore tous les sommets du polygone seront sur une ellipse; mais les valeurs qu'il faudra donner à φ pour obtenir tous les sommets du polygone, étant représentées par la formule générale

$$\varphi = \frac{2k+p}{n}\rho\pi,$$

formeront une progression arithmétique dont la raison sera non plus $\frac{2\pi}{n}$, mais $\frac{2\rho\pi}{n}$. On aurait donc, si ρ est premier avec n, un polygone semi-régulier étoilé, obtenu en joignant de ρ en ρ les sommets du polygone convexe de n côtés, et si n et ρ ont un plus grand commun diviseur d un polygone de $\frac{n}{d}$ côtés, dont chaque sommet comptera pour d sommets distincts.

Tous ces résultats sont d'une extrême simplicité. Mais peut-être y avait-il quelque intérêt à indiquer le parti qu'on peut tirer de la transformation définie par les formules (2). Notre méthode s'appliquerait au cas où, au lieu de prendre les milieux des côtés du polygone, on diviserait ces côtés dans un rapport donné, à celui où l'on prendrait les centres de gravité des triangles formés par trois sommets consécutifs, etc.

Les formules (2) peuvent d'ailleurs nous conduire à une classification nouvelle et assez curieuse des polygones plans ou gauches. Les polygones réguliers ou semi-réguliers sont ceux pour lesquels, dans les expressions des coordonnées, subsistent seulement les termes relatifs à la racine $\omega_n = 1$ et à deux racines conjuguées ω_k, ω_{n-k}. Ces polygones formeraient une première classe. La suivante serait formée des polygones pour lesquels, aux termes précédemment indiqués, s'ajouteraient deux termes nouveaux correspondant également à deux racines nouvelles ω_k, ω_{n-k}. En continuant ainsi, on pourrait constituer une série de classes au nombre de $\frac{n}{2} - 1$ ou $\frac{n-1}{2}$, suivant que n serait pair ou impair, qui présenteraient tous les types intermédiaires entre le polygone régulier et le polygone le plus général.