Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

B. Baillaud

Sur une transformation trigonométrique employée par Hansen dans la théorie des perturbations

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 292-298

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_292_1>

SUR UNE TRANSFORMATION TRIGONOMÉTRIQUE EMPLOYÉE PAR HANSEN DANS LA THÉORIE DES PERTURBATIONS;

PAR M. B. BAILLAUD.

On sait que la méthode de la variation des constantes arbitraires conduit à représenter les coordonnées d'une planète dans le mouvement troublé et leurs différentielles premières par les mêmes fonctions du temps et des éléments que dans le mouvement elliptique. Hansen a remarqué qu'il y a une infinité de systèmes d'axes de coordonnées, variables avec le temps, qui jouissent de la même propriété. Il a nommé ces coordonnées *coordonnées idéales*, et il a fait de leur emploi le point de départ d'une méthode avantageuse pour le calcul des perturbations, dans laquelle il cherche le mouvement de la planète par rapport à des axes mobiles de coordonnées idéales, et le mouvement de ces axes X, Y, Z par rapport à des axes x, y, z. Il profite de l'indétermination des axes mobiles pour faire passer constamment le plan des XY par la planète elle-même.

Soient θ l'angle que fait avec Ox le nœud ascendant de XY sur xy; σ l'angle que fait OX avec ce nœud ascendant; i l'angle des deux plans; b l'angle du rayon vecteur mené de l'origine à la planète avec le plan XY; l l'angle que fait sa projection sur xy avec Ox; v l'angle du rayon vecteur avec OX. On a, entre ces diverses quantités, les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos b\,\sin(l-\theta) &= \cos i\sin(v-\sigma),\\ \cos b\cos(l-\theta) &= \cos(v-\sigma),\\ \sin b &= \sin i\sin(v-\sigma),\end{aligned}\right.$$

qui servent à calculer l et b quand on connait v. Le nombre des applications à faire de ces formules étant très-considérable, et les valeurs de θ, i, σ variant avec le temps et par suite avec v, ces formules ne seraient pas très-commodes. Hansen profite de ce que les quantités θ, i, σ varient très-peu pour introduire leurs valeurs initiales θ_0, i_0, σ_0. En outre, OX étant arbitraire dans le plan XY, il suppose $\sigma_0 = \theta_0$.

On tire des formules (1) les suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos b\,\sin(l-\theta_0) &= \cos i\sin(v-\sigma)\cos(\theta-\theta_0)\\ &\quad+\cos(v-\sigma)\sin(\theta-\theta_0),\\ \cos b\cos(l-\theta_0) &= -\cos i\sin(v-\sigma)\sin(\theta-\theta_0)\\ &\quad+\cos(v-\sigma)\cos(\theta-\theta_0),\\ \sin b &= \sin i\sin(v-\sigma).\end{aligned}\right.$$

Si l'on mettait en évidence, dans les seconds membres des formules (2), les valeurs que prennent ceux des formules (1) quand on y remplace θ, i, σ par θ_0, i_0, σ_0, les parties complémentaires seraient visiblement très-petites, puisque θ, i, σ diffèrent peu de leurs valeurs initiales. Ces parties complémentaires seraient des fonctions de v, que nous représenterons, pour abréger, par

$$\begin{aligned} &m \sin v + n \cos v, \\ &m' \sin v + n' \cos v, \\ &m'' \sin v + n'' \cos v, \end{aligned}$$

m, m', m'', n, n', n'' étant indépendants de v.

Il est manifeste que toute fonction de cette forme est une fonction linéaire et homogène de deux de ces fonctions, pourvu que celles-ci ne soient pas identiques à un facteur constant près; mais il faut remarquer en outre que, si deux de ces fonctions ne différaient que par un facteur constant, la troisième ne différerait pas autrement de chacune d'elles. En effet, en désignant par P, Q, R ces fonctions, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos b \sin(l - \theta) &= \cos i_0 \sin(v - \sigma_0) + P, \\ \cos b \cos(l - \theta) &= \cos(v - \sigma_0) + Q, \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(v - \sigma_0) + R. \end{aligned}\right.$$

La somme des carrés des premiers membres est 1, et il en est de même de la somme des carrés des premiers termes des seconds membres. Il en résulte que la valeur de $\tang v$, qui annulerait Q et R si ces fonctions ne différaient que par un facteur constant, annulerait aussi P.

Il résulte de ces considérations que, s'il y avait dans les fonctions P, Q, R une constante arbitraire, on pourrait en disposer pour rendre ces trois fonctions identiques à des facteurs constants près. Il suffirait même que cette constante arbitraire se trouvât dans deux d'entre elles. Or rien n'est plus facile que d'introduire une telle constante sans modifier essentiellement la forme des équations (3). Soit Γ un angle très-petit. On a, en partant des équations (2),

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - P_1, \\ \cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) &= \cos(v - \theta_0) + Q_1, \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s, \end{aligned}\right.$$

en désignant par P_1, Q_1, s des fonctions de v ayant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} P_1 &= -\cos i \sin(v - \sigma) \cos x - \cos(v - \sigma) \sin x + \cos i_0 \sin(v - \theta_0), \\ Q_1 &= -\cos i \sin(v - \sigma) \sin x + \cos(v - \sigma) \cos x - \cos(v - \theta_0), \\ S &= \sin i \sin(v - \sigma) - \sin i_0 \sin(v - \theta_0), \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$x = \theta - \theta_0 - \Gamma.$$

Si l'on met partout en évidence $\nu - \sigma$ et que l'on écrive que les rapports de P_1 et Q_1 à s sont respectivement égaux à des constantes arbitraires $A\cos\varpi$, $A\sin\varpi$, on trouve

$$(5)\quad \begin{cases} A\cos\varpi = \dfrac{-\cos i\cos x + \cos i_0\cos(\sigma - \theta_0)}{\sin i - \sin i_0\cos(\sigma - \theta_0)} \\[2ex] \qquad\quad = \dfrac{-\sin x + \cos i_0\sin(\sigma - \theta_0)}{-\sin i_0\sin(\sigma - \theta_0)}, \\[2ex] A\sin\varpi = \dfrac{-\cos i\sin x + \sin(\sigma - \theta_0)}{\sin i - \sin i_0\cos(\sigma - \theta_0)} \\[2ex] \qquad\quad = \dfrac{\cos x - \cos(\sigma - \theta_0)}{-\sin i_0\sin(\sigma - \theta_0)}. \end{cases}$$

On a ainsi deux équations, d'où il est aisé de tirer $\sin x$ et $\cos x$. On trouve d'abord pour dénominateur commun à $\sin x$ et $\cos x$ l'expression

$$[\sin i - \sin i_0\cos(\sigma - \theta_0)]^2 + \cos^2 i\sin^2 i_0\sin^2(\sigma - \theta_0),$$

qu'il est bien aisé de mettre sous la forme

$$[1 - \sin i\sin i_0\cos(\sigma - \theta_0)]^2 - \cos^2 i\cos^2 i_0.$$

Ce dénominateur se décompose en deux facteurs, dont l'un disparait, et si l'on pose

$$(6)\qquad \varkappa = 1 + \cos i\cos i_0 - \sin i\sin i_0\cos(\sigma - \theta_0),$$

on trouve

$$(7)\qquad \begin{cases} \varkappa\cos x = (1 + \cos i\cos i_0)\cos(\sigma - \theta_0) - \sin(i\sin i_0), \\ \varkappa\sin x = (\cos i + \cos i_0)\sin(\sigma - \theta_0). \end{cases}$$

Il est aisé de constater que la somme des carrés des valeurs de $\sin x$ et de $\cos x$ est égale à l'unité.

On tire ensuite des formules (5)

$$(8)\qquad \begin{cases} \varkappa A\cos\varpi = \sin i_0\cos i + \cos i_0\sin i\cos(\sigma - \theta_0), \\ \varkappa A\sin\varpi = -\sin i\sin(\sigma - \theta_0). \end{cases}$$

On en conclut

$$\varkappa^2 A^2 = 1 - [\cos i\cos i_0 - \sin i\sin i_0\cos(\sigma - \theta_0)]^2;$$

d'où

$$(9)\qquad \varkappa A^2 = 1 - \cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0).$$

Si l'on pose ensuite $A = \tang \eta$, on a

$$(10)\qquad \begin{cases} \sin^2\eta = \dfrac{1}{2}[1 - \cos i \cos i_0 + \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)], \\ \cos^2\eta = \dfrac{1}{2}[1 + \cos i \cos i_0 - \sin i \sin i_0 \cos(\sigma - \theta_0)]. \end{cases}$$

D'autre part, le rapprochement des valeurs de $\varkappa$ et de $\varkappa \cos x$ conduit à calculer $\cos\dfrac{x}{2}$ et $\sin\dfrac{x}{2}$, et, comme $\varkappa = 2\cos^2\eta$, on trouve de suite

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\eta \cos\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{i+i_0}{2}\cos\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \cos\eta \sin\dfrac{x}{2} = \cos\dfrac{i-i_0}{2}\sin\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}. \end{cases}$$

Les formules (6), (7), (8) et (10) prennent des formes très-élégantes quand on y introduit les angles qui figurent dans les seconds membres des formules (11).

On trouve sans difficulté

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varkappa = \cos^2\dfrac{i+i_0}{2}\cos^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2} + \cos^2\dfrac{i-i_0}{2}\sin^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa \cos x = \cos^2\dfrac{i+i_0}{2}\cos^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2} - \cos^2\dfrac{i-i_0}{2}\sin^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa \sin x = 2\cos\dfrac{i+i_0}{2}\cos\dfrac{i-i_0}{2}\sin\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}\cos\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa A \cos w = \sin\dfrac{i+i_0}{2}\cos\dfrac{i+i_0}{2}\cos^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2} \\ \qquad\qquad - \sin\dfrac{i-i_0}{2}\cos\dfrac{i-i_0}{2}\sin^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\varkappa A \sin w = -\sin\left(\dfrac{i+i_0}{2} + \dfrac{i-i_0}{2}\right)\sin\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}\cos\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \sin^2\eta = \sin^2\dfrac{i+i_0}{2}\cos^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2} + \sin^2\dfrac{i-i_0}{2}\sin^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}, \\ \cos^2\eta = \cos^2\dfrac{i+i_0}{2}\cos^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2} + \cos^2\dfrac{i-i_0}{2}\sin^2\dfrac{\sigma-\theta_0}{2}. \end{cases}$$

Sur ces formules, la vérification de l'identité

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

est immédiate.

En combinant les quatre formules du groupe (12) qui suivent la première, on trouve de suite

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\eta \cos\left(\frac{x}{2} - w\right) &= \sin\frac{i + i_0}{2}\cos\frac{\sigma - \theta_0}{2}, \\ \sin\eta \sin\left(\frac{x}{2} - w\right) &= -\sin\frac{i - i_0}{2}\sin\frac{\sigma - \theta_0}{2}, \end{aligned}\right.$$

formules qu'il convient de rapprocher de celles du groupe (11), avec lequel elles forment un système analogue aux formules de Delambre relatives aux éléments d'un triangle sphérique.

Les quantités Γ, η, w étant ainsi déterminées, les équations (4) deviendront

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \cos b \sin(l - \theta_0 - \Gamma) &= \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - \operatorname{tang}\eta \cos w . s, \\ \cos b \cos(l - \theta_0 - \Gamma) &= \cos(v - \theta_0) + \operatorname{tang}\eta \sin w . s, \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s. \end{aligned}\right.$$

La fonction s est très-petite, et elle joue un rôle essentiel dans la méthode donnée par Hansen pour le calcul des perturbations.

La cinquième des formules (12) montre que $\operatorname{tang}\eta \sin w$ est une quantité très-petite, de sorte que $\operatorname{tang}\eta \sin w . s$ est une quantité du deuxième ordre par rapport aux masses perturbatrices. La formule précédente montre que, si l'on néglige les termes de l'ordre des masses, $\operatorname{tang}\eta \cos w$ se réduit à $\operatorname{tang} i$, et que, par suite, le dernier terme du second membre de la première des équations (14) est égal à $-s \operatorname{tang} i_0$, si l'on néglige les termes du second ordre. Enfin l'angle Γ est lui-même du second ordre. On tire, en effet, des équations (11)

$$\begin{aligned} \cos\eta \sin\Gamma = &-\cos\frac{i - i_0}{2}\sin\frac{\sigma - \theta_0}{2}\cos\frac{\theta - \theta_0}{2} \\ &+ \cos\frac{i + i_0}{2}\cos\frac{\sigma - \theta_0}{2}\sin\frac{\theta - \theta_0}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, la théorie des coordonnées idéales conduit à l'équation

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i};$$

d'où l'on tire, en désignant par ε une quantité du premier ordre,

$$\sigma - \theta_0 = (\theta - \theta_0)(\cos i_0 - \varepsilon).$$

Si l'on remplace en outre les sinus des arcs très-petits par les arcs eux-mêmes, et les cosinus par l'unité, il vient, en négligeant seulement les termes du troisième ordre,

$$\cos\eta \sin\Gamma = -\frac{\sigma - \theta_0}{2} + \frac{\theta - \theta_0}{2}\cos i_0 = \varepsilon\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right).$$

Toutes les fois que les termes du second ordre seront négligeables, les formules (14) deviendront donc

$$\begin{aligned}
\cos b \sin(l - \theta_0) &= \cos i_0 \sin(v - \theta_0) - s \tang i_0,\\
\cos b \cos(l - \theta_0) &= \cos(v - \theta_0),\\
\sin b &= \sin i_0 \sin(v - \theta_0) + s,
\end{aligned}$$

et, comme les valeurs de s seront connues d'avance, ces formules ne laisseront rien à désirer.

Hansen résout le problème que nous venons de traiter au moyen des exponentielles imaginaires. MM. Dupuy et Périgaud, dans leurs études sur la méthode de Hansen, en ont donné des solutions géométriques. Il nous a paru utile de faire ressortir la vraie raison de cette transformation et de l'effectuer par les procédés ordinaires de la Trigonométrie. La marche que nous venons de suivre nous a d'ailleurs donné plusieurs formules élégantes, qui pourraient assurément être déduites de celles de l'illustre astronome allemand, mais qui cependant n'ont pas été signalées expressément par lui dans son Mémoire.