BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 2, nº 1 (1878), p. 201-216

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1878_2_2_1_201_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GERHARDT (C.-I.). — Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. XVII. Band. Geschichte der Mathematik, von C.-I. Gerhardt. — München, 1877. Druck und Verlag von R. Oldenbourg. — 1 vol. in-8°, xii-307 pages.

La *Commission historique* de l'Académie Royale des Sciences de Bavière compte, parmi les nombreux et importants travaux dont elle est chargée, la publication d'une collection d'Ouvrages d'Histoire, dont la tendance générale ressort du titre du Livre que nous venons de citer. Mais la plupart des auteurs auxquels a été confiée l'exécution de ce plan ont dû se ranger à l'opinion, certainement bien justifiée, qu'il est difficile, sinon impossible, de tracer l'histoire d'une science déterminée, en s'occupant exclusivement d'une seule nation, surtout d'une nation moderne; c'est ainsi, par exemple, que Peschel, Sachs, Rudolf Wolf, dans leurs Ouvrages sur la Géographie, la Botanique, l'Astronomie, n'ont pas hésité à s'émanciper des rigoureuses exigences du programme, et se sont contentés de donner une part d'attention prépondérante aux travaux des savants allemands. M. Gerhardt a compris autrement sa tâche; il a voulu suivre les prescriptions à la lettre, et s'est engagé ainsi dans une entreprise où, malgré ses consciencieux efforts, il lui était bien difficile d'éviter des inconséquences et de ne jamais altérer la vraie physionomie de l'Histoire.

L'espace dont nous pouvons disposer dans ce *Bulletin* ne nous permet pas d'insister sur les détails de la marche historique, et nous nous abstenons d'autant plus volontiers d'entrer dans de longs développements que nous devons faire paraître dans un autre Recueil [1] un article étendu sur le même Ouvrage. Ici nous nous occuperons surtout d'exposer les points de vue historiques généraux d'après lesquels l'auteur s'est guidé, et de faire connaître clairement au lecteur ce qu'il trouvera dans ce Livre et ce qu'il n'y trouvera pas.

M. Gerhardt a eu pour dessein « de tracer l'histoire des Mathé-

---

[1] Dans le *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft.*

matiques en Allemagne sur l'arrière-plan de l'histoire générale de la civilisation allemande ». C'est là certainement une pensée juste, mais difficile à mettre en œuvre dans l'espace relativement si resserré dans lequel l'auteur s'est confiné. Il a consacré, et l'on ne peut que l'en louer, une attention toute spéciale à la peinture et à l'appréciation des hommes qui marquent en quelque sorte les étapes des progrès scientifiques, et qui tiennent une grande place dans l'histoire de la civilisation, par cela seul qu'ils ont ouvert des nouvelles voies à la vie intellectuelle de leur nation. Mais on aurait tort de prétendre que ce côté de leur action ait toujours été compris et apprécié de leurs contemporains. Loin de là, nous ne savons que trop dans quel isolement ces héros du génie ont dû errer sur leurs cimes désertes, sans qu'il leur ait été donné d'exercer aucune influence immédiate sur la vie intellectuelle et sociale de leur patrie. Des savants de deuxième ou de troisième ordre, mais qui dans leurs travaux se rapprochent davantage du courant des idées régnantes, exercent ainsi, au point de vue du progrès des lumières, une influence beaucoup plus marquée, et l'on devrait par conséquent leur reconnaître une importance supérieure. Bien plus, l'historien, poursuivant cette tendance générale, devra descendre encore plus bas; il sait bien que l'Astrologie, l'Alchimie et la Magie lui fourniront, dans cette manière de voir, des points d'attache beaucoup plus solides que les sciences dignes de ce nom. Si donc chez Gerhardt l'histoire des Mathématiques en Allemagne se concentre sur quelques noms seulement, Stifel, Kepler, Leibnitz, Gauss, Steiner [1], cela peut sembler insuffisant à celui qui ouvre le Livre dans un intérêt purement théorique; mais à celui qui s'attendrait à y trouver un développement logique du plan annoncé dans l'Introduction, un complet désappointement est réservé. Nous remarquons encore que l'auteur a oublié de considérer un point particulièrement important : l'histoire d'une branche scientifique dans les temps modernes ne peut, à notre avis, avoir une utilité vraiment pratique que lorsqu'elle tient toujours compte des rapports entre l'enseignement moyen et le haut enseignement aux différentes époques. Mais, si l'on excepte quelques documents dignes d'atten-

---

(1) Ces cinq noms occupent juste la moitié du volume (153 pages).

tion sur l'École de Vienne, et quelques observations sommaires sur le xv^e siècle, l'auteur ne nous apprend presque rien sur le développement de la pédagogie mathématique, et celui qui s'intéresse à ce genre de recherches est toujours obligé de s'en tenir à l'Ouvrage historique de Raumer, ou au Chapitre, malheureusement trop court, que contient l'excellent livre de Hankel.

Dans sa Préface, l'auteur se plaint de l'extrême disette de travaux préparatoires qui l'a contraint à se procurer ses matériaux par de pénibles recherches. Nous ne nous rendons pas bien compte de ce qu'il faut entendre par là. Nous savons pourtant que des hommes comme les Cantor, les Curtze, les Giesel, les Friedlein, les Treutlein et autres, ont étudié à fond la période même traitée par M. Gerhardt : faut-il en conclure que tous ces travaux, la plupart couronnés de succès, seraient demeurés inconnus à l'auteur d'une *Histoire des Mathématiques en Allemagne?* On serait presque tenté de le croire, si l'on s'en tenait à ce fait, qu'aucun des noms que nous venons de rappeler ne se trouve une seule fois cité dans le cours du Livre; mais il est inutile de dire qu'une supposition aussi désobligeante ne nous a jamais traversé l'esprit. Il n'y a d'autre moyen de nous expliquer ce silence systématique à l'égard de travaux de haute valeur qu'en admettant chez l'auteur la résolution de ne faire appel qu'à ses propres forces, et, du moins pour les deux premiers Chapitres, de tirer tout de ses études personnelles sur les sources originales. Quelque louable que soit ce principe en lui-même, nous n'avons pu tout d'abord nous empêcher de craindre que sa mise en œuvre rigoureuse ne dépassât de beaucoup les forces d'un seul homme, en présence surtout des occupations multiples auxquelles il est assujetti, et cette crainte ne s'est trouvée que trop justifiée par les faits. Nous ne pouvons donc qu'exprimer notre étonnement d'un tel isolement volontaire, à une époque où plus que jamais la combinaison active et consciente de toutes les énergies est nécessaire à la Science pour atteindre son but élevé.

A cette fâcheuse omission l'auteur ajoute deux exemples non moins choquants d'inconséquence à son plan, inconséquence à laquelle l'a forcément entraîné l'énoncé vicieux du problème qu'il s'était posé. Il s'agissait d'écrire une histoire des Mathématiques pures ; mais celui qui connaît le caractère des travaux scientifiques, surtout pendant le moyen âge et la Renaissance, sait aussi quelle énorme difficulté présente le partage des diverses branches de la Science. M. Gerhardt a voulu entreprendre ce partage; des travaux astronomiques d'un Peurbach, d'un Regiomontanus, il ne nous dit pas un seul mot, et c'est là ce qui explique sans doute pourquoi le géomètre Copernic, au sujet duquel il aurait pu consulter la remarquable monographie de Fasbender, n'a pas non plus trouvé grâce à ses yeux. Admettons maintenant, si l'on veut, cette ligne de démarcation; mais alors de quel droit figurent dans ce Livre le théorème de Lambert sur le calcul des orbites des comètes, et l'histoire de la réinvention de la planète Cérès par Gauss? Et si la Cartographie, qui appartient cependant pour une bonne moitié aux Mathématiques pures, est restée si complétement exclue, qu'il n'a pu être fait la moindre mention de l'invention si remarquable de la projection équivalente par Johann Werner, il n'y avait pas lieu non plus, rigoureusement parlant, à accorder une place aux découvertes de Gauss.

Un autre inconvénient grave résulte d'une application malheureuse du principe de nationalité. En prenant pour règle de ne considérer que l'Allemagne dans le sens dynastique le plus étroit, M. Gerhardt a été conduit à consacrer en tout *huit lignes* à la brillante pléiade des Bernoulli et des Euler, par la raison qu'ils étaient de nation suisse, sauf, il est vrai, à les citer à chaque instant quand l'occasion l'exigeait. D'autre part, Jost Bürgi, bien que natif de Toggenburg, obtient une mention suffisante, ce dont nous sommes loin de nous plaindre; Lambert, né sujet helvétique, a aussi son article, que nous trouvons, à la vérité, un peu trop court; l'auteur va même jusqu'à octroyer le droit de bourgeoisie au Norvégien Abel. Cette disposition aux annexions intellectuelles cadre peu avec le reproche inconsidéré qu'il adresse aux mathématiciens français, d'avoir, en vue de rabaisser les mérites de Gauss concernant la représentation géométrique des nombres complexes, publié une nouvelle édition de l'opuscule d'Argand sur le même sujet. M. Gerhardt a sans doute oublié qu'Argand n'était pas Français, mais Suisse.

Ces remarques générales étant faites, passons à un court exposé du contenu de l'Ouvrage. Le moyen âge proprement dit est traité très-brièvement, le récit suivi commence seulement à Jean de Gmunden; il rend compte avec détail des travaux géométriques et trigonométriques de Peurbach, de Müller, de Werner et de Dürer, et s'arrête avec une complaisance marquée sur les anciens arithméticiens et algébristes allemands. Ici nous rencontrons beaucoup de précieuses additions à nos connaissances historiques; nous citerons, entre autres, les intéressants renseignements sur le Traité de Calcul de Bamberg, de 1473; les extraits importants que l'auteur a faits du codex de Ratisbonne, qu'il a trouvé le premier; la découverte, nouvelle pour nous, d'un grand mathématicien pour son temps, le moine Aquinas; et enfin le Chapitre entier qui traite de Christophe Rudolf et de Michel Stifel. Nous ne pouvons aussi qu'approuver en somme ce que l'auteur nous donne sur Reimarus Ursus, sur Kepler et sur Guldin. Enfin le résumé qui termine le premier Livre est digne d'éloges.

Le deuxième Livre, qui va « depuis le milieu du XVII^e^ siècle jusqu'à la fin du XVIII^e^ », se réduit à peu près à un Essai sur Leibnitz, auquel se rattachent accessoirement quelques remarques trop sommaires sur Tschirnhaus, Wolff, Kästner, Lambert et sur l'École combinatoire. Pour la partie principale, l'auteur se trouvait là sur son terrain de prédilection, et il était par suite à même de tracer un tableau complet et fidèle des vastes idées de l'inventeur du Calcul différentiel. On aurait pu toutefois désirer qu'il eût fait quelque mention des recherches de Giesel.

Le contenu du troisième Livre, qui embrasse l'époque moderne, est purement biographique; les découvertes de Gauss, de Jacobi, de Dirichlet, de Möbius, de Plücker, de Steiner sont esquissées à grands traits. Toutefois cette image nous fait la même impression que si les personnalités décrites se trouvaient placées en quelque sorte sans intermédiaires les unes à côté des autres; il nous manque une indication qui nous éclaire sur les causes qui ont dirigé leurs idées, et cela fait que le Livre nous semble finir trop brusquement. L'auteur termine, en effet, par ces lignes : « Vers le milieu du présent siècle, la mort a ravi les princes de la Science, les Gauss, les Jacobi, les Lejeune-Dirichlet, les Steiner auxquels les Mathématiques en Allemagne doivent leurs progrès et leur prééminence. Ce qui a été fait depuis dans ce domaine n'appartient pas encore à l'histoire ». Or nous pensons que la meilleure manière de conclure eût été d'exposer la voie qu'a suivie Riemann, sous l'influence simultanée de Gauss et de Cauchy, pour accomplir la réforme de la théorie des fonctions, en jetant également un coup d'œil sur les travaux de Hermann Grassmann, qui se relient au fond à la même question.

Notre résumé sommaire suffira pour faire voir aux amis des recherches sur l'Histoire des Mathématiques qu'ils trouveront dans l'Ouvrage de M. Gerhardt des détails d'un intérêt varié et contenant beaucoup de faits nouveaux, mais nullement un Traité pouvant donner une connaissance complète du développement successif des Mathématiques en Allemagne. S. G.

STURM (R.). — ELEMENTI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA. Traduits en italien par JUNG. — In-8°, 114 pages, 12 planches. Milano, 1878.

La lecture des Traités élémentaires publiés à l'étranger est éminemment intéressante pour tous ceux que préoccupe le progrès de l'enseignement en France; bien que le *Bulletin* ne puisse rendre compte de tous les Ouvrages de cette catégorie, il convient de faire une exception pour ceux qui se distinguent par leurs qualités, et qui présentent des différences notables avec les Traités qui ont cours dans notre pays.

Les *Éléments de Géométrie descriptive* de M. Sturm, dont la traduction italienne de M. Jung doit être regardée comme une nouvelle édition revue et améliorée par l'auteur, débutent, bien qu'ils s'adressent à des commençants, par des notions très-générales : une figure est la projection d'une autre lorsque chacun de ses points correspond à un point de la seconde; l'auteur donne ensuite les principales propriétés de la projection centrale et de la projection parallèle; ces diverses notions remplissent l'Introduction. Dans le premier Chapitre, au lieu d'introduire immédiatement les deux plans de projection, il étudie avec détail (p. 7-30) tout ce qui concerne les projections orthogonales sur un seul plan; cette marche présente l'avantage de débarrasser singulièrement les Chapitres suivants, et de ne pas faire sortir trop brusquement l'étudiant du domaine de la Géométrie ordinaire; l'auteur ne craint pas d'introduire, dès ce Chapitre, la terminologie relative à l'infini; il le fait d'ailleurs avec soin et discrétion. Les cinq Chapitres suivants traitent des problèmes élémentaires sur la droite et le plan, et sur l'angle trièdre. Enfin le septième Chapitre (p. 87-114) traite des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers convexes, de leur représentation, de leurs sections planes, et de l'intersection d'un prisme et d'une pyramide : les démonstrations et les constructions sont aussi claires et aussi simples qu'il est possible.

GENOCCHI (A.). — SUR UN MÉMOIRE DE DAVIET DE FONCENEX ET SUR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES. — Brochure in-4°, 42 pages et une planche de figures. (Extrait des *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*. Série II, t. XXIX; 1877.)

Daviet de Foncenex avait cherché (*Mélanges de la Société Royale de Turin*, t. II) à établir *a priori* la loi de composition des forces concourantes, et aussi, peut-être aidé par Lagrange, celle de la composition des forces parallèles; il arrivait à une équation telle que

$$[f(x)]^2 = 2 + f(2x),$$

d'où il concluait

$$f(x) = \text{const.} = 2.$$

Laplace et d'Alembert ont signalé la fausseté de cette conclusion; mais on peut démontrer que $f(x)$ peut se représenter par la forme $2\cos hx$, h étant une constante réelle ou imaginaire, et de plus, en s'appuyant sur la loi de composition des forces concourantes, que, si α et β sont deux angles d'un triangle rectangle, x le côté opposé à l'angle β, on a

$$\cos\beta = \cos hx \sin\alpha.$$

Ces résultats sont indépendants de la théorie euclidienne des parallèles; si maintenant on suppose successivement, r étant réel,

$$h = 0, \quad h = \frac{\sqrt{-1}}{r}, \quad h = \frac{1}{r},$$

on a une formule qui suffit pour rétablir respectivement les Géométries euclidienne, hyperbolique, elliptique.

Donc, conclut M. Genocchi, le postulatum d'Archimède pour le levier peut tenir lieu du postulatum d'Euclide.

Il nous est difficile d'admettre la rigueur de cette conclusion, et, quelque intéressant que soit le rapport signalé, les deux postulata peuvent rester parfaitement distincts; la démonstration *a priori* de la loi de composition des forces concourantes repose en effet sur le *principe d'homogénéité,* et ce principe suffit d'autre part pour démontrer, dans les mêmes conditions, le postulatum d'Euclide.

Que Daviet de Foncenex l'ait appliqué avant Legendre à des propositions de Géométrie ou de Mécanique, ces applications n'en paraissent pas moins, quoi qu'en dise M. Genocchi, en butte à la même objection fondamentale.

Nous ne pouvons guère accepter davantage que réciproquement, la théorie des parallèles étant admise, le principe d'Archimède ait été démontré *en toute rigueur*. Fermat, qui l'a nié, ne serait pas sans doute embarrassé aujourd'hui pour constituer une statique non archimédienne.

M. Genocchi n'est, au reste, nullement partisan des nouvelles géométries; il consacre à leur critique la seconde Partie de son Mémoire et un appendice de 15 pages *Sur l'existence de la pseudosphère et sur l'impossibilité de démontrer le postulatum d'Euclide*. Cet appendice est rempli, en grande partie, par une polémique contre les démonstrations de cette impossibilité données par M. Hoüel ([1]) et M. De Tilly ([2]). Toutefois, M. Genocchi avoue qu'il serait assez disposé à l'admettre, comme résultant des travaux de M. Flye Sainte-Marie ([3]).

Le principal argument développé dans cette polémique consiste dans l'impossibilité où l'on a été jusqu'à présent de démontrer l'existence d'une surface à courbure constante, négative, continue, indéfinie et simplement connexe, surface que M. Genocchi nommerait *pseudosphère*. Il est certain que les surfaces de révolution à courbure constante négative (surfaces *pseudosphériques* de Beltrami) ne satisfont pas à cette définition, et qu'elles ont seulement avec cette surface, jusqu'à présent seulement idéale, de la *pseu-*

([1]) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. VIII.

([2]) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXX et XXXVI.

([3]) *Études analytiques sur la théorie des parallèles*. Paris, 1871.

dosphère, une analogie comme celle, par exemple, du cône au plan (¹). Existe-t-il une telle surface parmi celles qui ne sont pas de révolution ? Cela est très-douteux, mais l'impossibilité n'en est pas démontrée non plus.

La question est de savoir si l'emploi d'une pareille notion, supposée même purement idéale, fausse les raisonnements de MM. Hoüel et De Tilly. Pour notre part, nous ne le pensons pas ; mais celui qui pose cette objection, alors qu'il finit par convenir de la conclusion, s'expose peut-être au reproche qu'il adresse à d'autres, celui de soulever des discussions byzantines.

Malgré ces critiques, nous nous plaisons à reconnaître que le Mémoire de M. Genocchi mérite d'être lu, surtout par les adversaires de ses opinions. Peut-être trouveront-ils les leurs parfois exagérées et partant plus facilement combattues ; mais c'est un danger auquel tout novateur doit s'habituer ; c'est aussi une sauvegarde contre les exagérations auxquelles il pourrait se laisser entraîner de lui-même, en l'absence de toute contradiction.

P. T.

PAOLIS (R. DE). — LE TRASFORMAZIONI PIANE DOPPIE (²).

L'auteur marche dans une voie tracée par Clebsch [*Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen* (*Math. Ann.*, t. III)].

Étant donnés deux plans P, P′, supposons qu'à un point p de P correspondent deux points p', p'_1 de P′, le seul point p correspondant d'ailleurs sur P à ces deux points ; supposons en outre que, lorsque p décrit une droite, les deux points p', p'_1 décrivent sur P′ une même courbe d'ordre n : le plan P sera dit *double* et le

(¹) Nous ferons cependant remarquer que, si l'on suppose la surface d'un cône composée, comme les surfaces de Riemann, d'un nombre indéfini de nappes enroulées, toute figure tracée sur le plan pourra être appliquée sur le cône, et réciproquement, de sorte que la Géométrie du plan peut être regardée comme identique avec celle du cône. Pourquoi n'en serait-il pas de même pour la pseudosphère et la surface de révolution engendrée par la tractoire ? (J. H.)

(²) *Atti della R. Accademia dei Lincei* (1876-77). Roma, 1877 ; 36 p.

plan P′ *simple;* on a ainsi la transformation plane double étudiée par M. de Paolis.

Entre les deux points *conjoints* p', p'_1 existe une transformation rationnelle involutive : cette même transformation relie ensemble les deux courbes conjointes C', C'_1 qui, sur le plan simple, correspondent à la courbe C du plan double; à une courbe du plan double peut d'ailleurs correspondre, sur le plan simple, une courbe conjointe à elle-même; deux courbes conjointes et une courbe correspondante du plan double sont de même *genre;* les courbes conjointes à elles-mêmes et correspondantes aux courbes rationnelles du plan double sont hyperelliptiques.

En général, il existe sur le plan double une *courbe limite,* lieu des points qui admettent, comme points correspondants sur le plan simple, deux points infiniment voisins; le lieu correspondant sur le plan simple, lieu formé de points conjoints infiniment voisins, est la *courbe double.* La courbe limite et la courbe sont de même genre. Outre la courbe double, il peut exister sur le plan simple des *points doubles,* auxquels correspondent des *points limites* sur le plan double.

A l'ensemble des droites du point double correspond un réseau de courbes hyperelliptiques d'ordre n; toutes ces courbes passent par les *points fondamentaux* du plan simple; deux d'entre elles se coupent en outre en deux points conjoints.

On aperçoit là un champ étendu de recherches qui concerneront, en particulier, les singularités des courbes correspondantes des deux plans.

Le travail de M. de Paolis est divisé en trois Parties : la première comprend les propriétés générales de la transformation d'ordre n et de genre p; dans la deuxième, l'auteur traite spécialement des cas où p est égal à zéro et à 1; enfin, dans la troisième, il étudie quelques cas particuliers où l'ordre et le genre ont des valeurs données.

BIANCHI (L.). — SULLE SUPERFICIE APPLICABILI. (Estratto della dissertazione di laurea dell' autore.) — In-8°, 58 pages. Pise, 1878.

Ce travail compend cinq Parties. Dans la première, l'auteur donne divers théorèmes relatifs à des surfaces applicables se déduisant simplement de deux courbes gauches; par exemple, c, c' étant deux telles courbes, si l'on considère pour chacune d'elles la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur la courbe, fait avec elle un angle constant θ et reste perpendiculaire à la normale principale, les deux surfaces seront applicables l'une sur l'autre lorsque la relation

$$\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\sin\theta}{T} = \frac{\cos\theta}{R'} + \frac{\sin\theta}{T'}$$

sera satisfaite, R, T, R', T' désignant les rayons de courbure et de torsion des deux courbes. La seconde Partie concerne les surfaces de révolution; M. Bianchi démontre que, si pour une surface l'élément linéaire est donné par l'égalité

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

où E, F, G ne dépendent que d'une seule des variables u, v, cette surface est applicable sur une surface de révolution, les lignes qui correspondent à la variable qui entre dans E, F, G devenant les parallèles de la surface de révolution. Dans la troisième et dans la quatrième Partie, il s'occupe de la déformation de diverses surfaces hélicoïdes, et de diverses surfaces moulures (ayant un système de lignes de courbures situées dans des plans parallèles). Enfin la cinquième Partie est consacrée au problème suivant: « Est-il possible de déformer une surface donnée de façon qu'un système de lignes tracées sur cette surface devienne un système de lignes de courbures de la surface déformée? » M. Bianchi traite, après M. Dini, le cas où le système de lignes données est le système de génératrices d'une surface gauche; il résout encore le problème posé dans le cas où la surface donnée est de révolution, et où les lignes données admettent pour trajectoires sous un angle constant les parallèles de la surface. Citons encore ce théorème: « La surface de révolution admettant comme courbe méridienne la courbe engendrée par le foyer d'une ellipse ou d'une hyperbole roulant sans glisser sur l'axe de la surface peut être déformée d'une infinité de façons, de manière à conserver la même courbure moyenne, et chaque système de trajectoires sous un angle constant des méridiens devient une fois un système de lignes de courbure de la surface déformée ».

BERTINI (E.). — RICERCHE SULLE TRASFORMAZIONI UNIVOCHE INVOLUTORIE NEL PIANO (¹).

Les recherches de M. Bertini se rapportent au problème suivant : Trouver toutes les transformations involutives dans le plan qui sont irréductibles entre elles, c'est-à-dire qui ne peuvent point se déduire l'une de l'autre par une série de transformations quadratiques, ou, ce qui revient au même, par une transformation univoque. L'auteur admet que les points fondamentaux de la transformation puissent occuper des positions spéciales et devenir infiniment voisins, mais on ne doit point faire de suppositions analogues sur les courbes fondamentales.

M. Bertini étudie d'abord la réduction, par des transformations quadratiques, de certains systèmes linéaires à d'autres, d'ordre moindre ; puis il montre que toute courbe fondamentale L_i qui passe α_{ii} fois par le point fondamental auquel elle correspond donne naissance à un système (L) de courbes correspondantes à elles-mêmes ou se correspondant entre elles et que, dans toute transformation involutive, il existe au moins un tel système ; examinant ensuite les cas où $\alpha_{ii} = 1, 2, 3$, il prouve que, pour ces cas, les transformations involutives sont toujours réductibles aux quatre suivantes, irréductibles entre elles :

(*a*) Homologie harmonique.

(*b*) Transformations involutives (de Jonquières) d'ordre $p+2$ avec $2p+2$ points simples fondamentaux distincts, présentant

---

(¹) *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 244-280. (Voir *Bulletin*, II_2, 10.)

une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants, d'ordre $p+2$, de genre $p>0$, ayant un point p^{uple} au point $p+2^{\text{uple}}$ de la transformation.

(*c*) Transformation involutive du huitième ordre avec sept points triples, présentant une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants du sixième ordre et pour laquelle les sept points sont doubles.

(*d*) Transformation involutive du dix-septième ordre avec huit points sextuples, présentant une courbe dont tous les points coïncident avec leurs correspondants du neuvième ordre, et pour laquelle les huit points sont triples.

Toutes les transformations involutives de Jonquières se ramènent aux cas (*a*), (*b*). Le cas (*c*) a été considéré par Geiser [*Ueber zwei geometrische Probleme* (*Journal de Crelle*, t. 67, p. 78)]. Il obtenait cette transformation au moyen d'un réseau de courbes du troisième ordre passant par les sept points fondamentaux : toutes celles de ces courbes qui passent par un point du plan ont un neuvième point commun, que l'on peut faire correspondre au précédent. Le cas (*d*) est nouveau; il résulte d'une propriété remarquable du système linéaire triplement infini de courbes du sixième ordre, de genre 2, qui ont en commun six points doubles : toutes celles de ces courbes (formant un réseau) qui passent par un point du plan ont en commun un autre point.

A ces quatre cas se ramènent beaucoup d'autres transformations involutives; M. Bertini estime même que toutes peuvent s'y ramener, mais il n'est point parvenu à le démontrer rigoureusement.

HARETU (Spiru). — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. — Paris, Gauthier-Villars, 1878, 49 pages.

La recherche des inégalités séculaires des éléments des orbites des planètes est, comme on sait, un des problèmes les plus importants de l'Astronomie. Laplace a démontré le premier, en 1773, que, si l'on néglige les quantités du second ordre par rapport aux masses, et les quantités du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, les grands axes de ces orbites n'ont pas d'inégalités séculaires. Lagrange démontra le même théorème pour le cas où l'on conserve toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons, et Poisson établit qu'il subsiste encore quand on détermine les inégalités du second ordre par rapport aux masses. La démonstration de Poisson fut simplifiée par divers géomètres.

On sait que des formules très-simples A permettent d'exprimer les dérivées des éléments par rapport au temps en fonction des éléments eux-mêmes, et des dérivées de la fonction perturbatrice par rapport à ces éléments. La fonction perturbatrice elle-même et ses dérivées doivent être développées en séries, dont les termes sont des sinus ou des cosinus de fonctions linéaires des longitudes moyennes des divers corps célestes considérés. Si dans les seconds membres des équations A on attribue aux éléments des valeurs constantes, l'intégration devient immédiate; on obtient pour les nouveaux éléments des constantes augmentées de séries procédant suivant les sinus et les cosinus dont nous venons de parler. C'est la deuxième approximation.

Si l'on remplace dans les seconds membres des formules A les éléments par ces nouvelles valeurs, et ensuite les produits de sinus et de cosinus par des sommes, une nouvelle intégration pourra être effectuée : on aura la troisième approximation, et ainsi de suite. Il faut remarquer que dans chacune de ces approximations on doit substituer non-seulement les valeurs obtenues pour les éléments de l'orbite de la planète troublée, mais aussi celle des éléments de toutes les planètes perturbatrices.

Si le résultat de l'une de ces substitutions contient un terme constant, l'intégration donnera un terme proportionnel au temps, c'est-à-dire une inégalité séculaire.

Pour reconnaître que le grand axe de l'orbite n'est pas affecté d'inégalités séculaires, il faut donc examiner dans chaque approximation tous les termes que l'on obtient quand dans les seconds membres des formules A on introduit les valeurs des éléments fournies par l'approximation précédente. Dans la démonstration de Poisson, l'examen des termes qui proviennent de la variation des éléments de la planète troublée est relativement facile; celui des termes provenant de la variation des éléments de la planète perturbatrice est, au contraire, très-compliqué, et cela résulte de ce que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour les différentes planètes du système.

Dans son Mémoire sur l'élimination des nœuds, Jacobi a indiqué une transformation qui consiste à chercher le mouvement d'une des planètes autour du Soleil, celui d'une deuxième planète autour du centre de gravité du Soleil et de la première, celui d'une troisième autour du centre de gravité du Soleil et des deux premières, etc. Dans ces conditions, la fonction perturbatrice est la même pour toutes les planètes; seulement, au lieu d'être linéaire par rapport aux masses, elle en renferme toutes les puissances.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, 21 février 1876, M. Tisserand prit cette transformation comme point de départ et en tira une démonstration très-simple de l'invariabilité des grands axes, tant que l'on ne conserve que les deuxièmes puissances des masses.

M. Haretu, dans un intéressant Mémoire, présenté comme thèse à la Faculté des Sciences de Paris, étend cette démonstration aux troisièmes puissances des masses. Poisson avait déjà essayé cette extension; mais il n'avait considéré que les termes provenant de la variation des éléments de la planète troublée. La substitution de Jacobi, utilisée par M. Haretu, le dispense en quelque sorte de distinguer la planète troublée de la planète perturbatrice; en suivant la marche indiquée par Poisson, il a donc pu faire une étude complète de la question.

Quand on s'en tient aux deuxièmes puissances des masses, on ne trouve pas d'inégalités séculaires, mais le temps apparaît hors des signes sinus et cosinus : on obtient des termes de la forme

$$\mathrm{A}\, t \,{}^{\sin}_{\cos}(gt + h).$$

Ces termes donnent naissance à des inégalités séculaires du troisième ordre.

Le sujet, qui avait été étudié déjà par M. E. Mathieu dans le *Journal de Crelle* par une voie bien différente, n'est évidemment pas épuisé. Cette démonstration ne peut suffire pour décider si les grands axes des orbites doivent dans la suite des ~~siècles~~ s'écarter notablement de leurs valeurs actuelles. Rien ne prouve que les termes proportionnels au temps ainsi obtenus ne proviennent pas du développement de fonctions périodiques, développement qui serait dû à l'application même de la méthode; on sait que des inégalités séculaires se présenteraient dès la deuxième approximation sans une précaution particulière destinée à faire disparaître le temps en dehors des signes sinus et cosinus. B. B.