BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur l'élimination entre deux équations algébriques à une inconnue

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 54-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_54_1>

MÉLANGES.

SUR L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES A UNE INCONNUE;

PAR G. DARBOUX.

1. Dans une Note insérée au tome X de ce *Bulletin,* je me suis proposé de démontrer le théorème fondamental relatif à l'élimination entre deux équations à une inconnue.

Soient

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0, \tag{1}$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0 \tag{2}$$

les deux équations données, et, si m et n sont inégaux, supposons $m > n$. En employant la méthode de Bézout, on obtient leur résultante sous la forme d'un déterminant d'ordre m; et, sans faire appel à la théorie des fonctions symétriques, j'ai établi que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une racine commune s'obtient en égalant à zéro le déterminant.

Je me propose de reprendre ici cette démonstration, afin de simplifier et surtout de ramener à un principe unique la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations aient p et seulement p racines communes.

2. Le point fondamental de la méthode de Bézout consiste dans l'artifice suivant. On réunit dans $f(x)$ et $\varphi(x)$ tous les termes qui sont divisibles par une certaine puissance de x, x^r; on a ainsi

$$f(x) = \mathrm{P} + x^r \mathrm{P}', \tag{3}$$

où P est un polynôme du degré $r - 1$ et P′ un polynôme de degré $m - r$. De même, on peut écrire

$$g(x) = \mathrm{Q} + x^r \mathrm{Q}', \tag{4}$$

où Q est de degré $r - 1$ et Q′ de degré $n - r$. D'après cela, si l'on multiplie les équations (3) et (4) respectivement par Q′ et P′ et qu'on les retranche, on formera l'identité

$$\mathrm{Q}'f(x) - \mathrm{P}'g(x) = \mathrm{PQ}' - \mathrm{QP}', \tag{5}$$

où le second membre sera un polynôme au plus du degré $m - 1$.

Donnons à r successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, et nous obtiendrons ainsi les identités

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(a_1 + a_2 x + \ldots + a_m x^{m-1})\, g(x) - (b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}) f(x) \\ &\quad = \varphi_0(x) = c_{0,0} + c_{0,1} x + \ldots + c_{0,m-1} x^{m-1}, \\ &(a_2 + a_2 x + \ldots + a_m x^{m-2})\, g(x) - (b_2 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-2}) f(x) \\ &\quad = \varphi_1(x) = c_{1,0} + c_{1,1} x + \ldots + c_{1,m-1} x^{m-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &(a_n + a_{n+1} x + \ldots + a_m x^{m-n})\, g(x) - b_n f(x) \\ &\quad = \varphi_{n-1}(x) = c_{n-1,0} + c_{n-1,1} x + \ldots + c_{n-1,m-1} x^{m-1}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles nous ajouterons les suivantes, si m est plus grand que n :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} g(x) &= b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n,\\ x g(x) &= b_0 x + b_1 x^2 + \ldots + b_n x^{n+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x^{m-n-1} g(x) &= b_0 x^{m-n-1} + \ldots + b_n x^{m-1}. \end{aligned}\right.$$

Si les équations (1) et (2) admettent une racine commune, cette valeur de x, en vertu des identités précédentes, devra évidemment satisfaire aux équations

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(x) = 0, \quad g(x) = 0, \quad \ldots, \quad x^{m-n-1} g(x) = 0.$$

Or ces équations, au nombre de n, peuvent être considérées comme des équations du premier degré, servant à déterminer $m - 1$ inconnues distinctes, qui sont les différentes puissances de x, savoir x, x^2, $\ldots$, x^{m-1}. Comme elles sont en nombre supérieur d'une unité à celui des inconnues, il faudra, pour qu'elles admettent une solution commune, que leur déterminant soit égal à zéro. Ce déterminant, que je désignerai par A, a pour valeur

$$A = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{0,m-1} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{1,m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{n-1,m-1} \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & \ldots & b_n \end{vmatrix},$$

et il est clair que, s'il n'est pas nul, il n'y aura pas de racine commune.

3. Je dis maintenant que réciproquement, si le déterminant A est nul, les équations proposées auront au moins une racine commune. En effet, si cette condition est remplie, on peut trouver au moins un système d'arbitraires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ vérifiant les équations suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \lambda_0 c_{0,0} + \lambda_1 c_{1,0} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,1} + \lambda_n b_0,\\ 0 &= \lambda_0 c_{0,1} + \lambda_1 c_{1,1} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,1} + \lambda_n b_1 + \lambda_{n+1} b_0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ 0 &= \lambda_0 c_{0,m-1} + \ldots + \lambda_{n-1} c_{n-1,m-1} + \ldots + \lambda_{m-1} b_n; \end{aligned}\right.$$

car le résultat de l'élimination des arbitraires λ entre ces équations donne encore le déterminant A, dans lequel les lignes seraient changées en colonnes et les colonnes en lignes. Ainsi, toutes les fois que le déterminant sera nul, on pourra toujours trouver des arbitraires λ qui ne soient pas toutes nulles et qui vérifient les équations (8).

Ce point étant admis, multiplions les identités (6) et (7) dans l'ordre où elles sont écrites, par les arbitraires $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$, et ajoutons toutes ces identités. En vertu des équations (8), les coefficients de toutes les puissances de x dans le second membre seront nuls, et l'on obtiendra une nouvelle identité de la forme

$$(9) \qquad f_1(x)g(x) - f(x)g_1(x) = 0,$$

où l'on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} g_1(x) &= \lambda_0(b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}) \\ &\quad + \lambda_1(b_2 + \ldots + b_n x^{n-2}) + \ldots + \lambda_{n-1} b_n, \\ f_1(x) &= \lambda_0(a_1 + \ldots + a_m x^{m-1}) + \lambda_1(a_2 + \ldots + a_m x^{m-2}) + \ldots \\ &\quad + \lambda_{n-1}(a_n + \ldots + a_m x^{m-n-1}) + \lambda_n + \lambda_{n+1} x + \ldots + \lambda_{m-1} x^{m-n-1} \end{aligned} \right.$$

Il résulte de ces expressions de $f_1(x)$, $g_1(x)$ que ces polynômes sont de degrés inférieurs respectivement à ceux de $f(x)$ et de $g(x)$.

Or, en vertu de l'identité (9), toutes les racines de $f(x)$ sont racines de l'équation

$$f_1(x)g(x) = 0,$$

et, comme le degré de $f_1(x)$ est inférieur à celui de $f(x)$, une au moins des racines de $f(x)$ appartient à $g(x)$: c'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Il est vrai que le raisonnement serait en défaut si les polynômes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ étaient identiquement nuls; mais la forme même de ces polynômes indique que cela ne peut avoir lieu. En effet on peut écrire $g_1(x)$ de la manière suivante :

$$g_1(x) = \lambda_0 b_n x^{n-1} + \left.\begin{matrix} \lambda_0 b_{n-1} \\ +\lambda_1 b_n \end{matrix}\right| x^{n-2} + \ldots + \lambda_0 b_1 + \ldots + \lambda_{n-1} b_n.$$

On voit que ce polynôme ne sera nul que si l'on a

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 b_n + \lambda_0 b_{n-1} = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_0 b_1 + \ldots + \lambda_{n-1} b_n = 0,$$

ce qui donne

$$(11) \qquad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1} = 0.$$

Avec ces hypothèses, $f_1(x)$ se réduira au polynôme

$$\lambda_n + \lambda_{n+1}x + \ldots + \lambda_{m-1}x^{m-n-1},$$

qui ne sera identiquement nul que si l'on a aussi

$$(12) \qquad \lambda_n = 0, \quad \lambda_{n+1} = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1} = 0.$$

Les arbitraires λ n'étant pas toutes nulles par hypothèse, on voit que les polynômes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ ne seront jamais identiquement nuls.

5. Je passe maintenant à la démonstration du point le plus difficile de cette théorie, et je vais établir par une méthode nouvelle que, si les équations proposées ont p racines communes, le déterminant A et ses mineurs d'ordre inférieur à p seront nuls sans que tous les mineurs d'ordre p le soient.

Supposons, en effet, que le polynôme

$$R = h_0x^p + h_1x^{p-1} + \ldots + h_p$$

soit le produit des facteurs du premier degré correspondant à ces racines communes; $f(x)$ et $g(x)$ sont divisibles par le polynôme précédent, et l'on peut poser

$$f(x) = (h_0x^p + \ldots + h_p)\varphi(x) = R\varphi(x),$$
$$g(x) = (h_0x^p + \ldots + h_p)\gamma(x) = R\gamma(x),$$

les deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$ étant premiers entre eux. Il résulte d'ailleurs des identités (6) et (7) que R entre en diviseur dans tous les polynômes $\varphi_i(x)$, $x^pg(x)$, définis par ces identités. On aura

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = (\alpha_{0,0} + \alpha_{0,1}x + \ldots + \alpha_{0,m-p-1}x^{m-p-1})(h_0x^p + \ldots + h_p) = R\psi_0(x), \\ \varphi_1(x) = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}x + \ldots + \alpha_{1,m-p-1}x^{m-p-1})(h_0x^p + \ldots + h_p) = R\psi_1(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x) = (\alpha_{n-1,0} \qquad + \ldots + \alpha_{n-1,m-p-1}x^{m-p-1})(h_0x^p + \ldots + h_p) = R\psi_{n-1}(x), \end{array} \right.$$

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{R}\gamma(x) &&= \mathrm{R}(\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_{n-p}x^{n-p}),\\ xg(x) &= \mathrm{R}x\gamma(x) &&= \mathrm{R}(\beta_0 x+\ldots),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots &&\ldots\ldots\ldots,\\ x^{m-n-1}g(x) &= \mathrm{R}x^{m-n-1}\gamma(x) &&= \mathrm{R}(\beta_0 x^{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}x^{m-p-1}). \end{aligned}\right.$$

Il suit de là que les polynômes $\varphi_i(x)$, $x^p g(x)$ sont des combinaisons linéaires des expressions suivantes :

$$14)\quad\left\{\begin{aligned} z_0 &= h_0 x^p + h_1 x^{p-1} + \ldots + h_p x^0,\\ z_1 &= h_0 x^{p+1} + \ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ z_{m-p-1} &= h_0 x^{m-1} + \ldots + h_p x^{m-p-1}, \end{aligned}\right.$$

où, pour l'homogénéité, j'ai introduit la puissance x^0 de x.

Les $m-1$ équations du premier degré, qu'on obtient en égalant ces polynômes à zéro et en considérant les puissances de x comme des inconnues tout à fait distinctes, seront donc vérifiées si les fonctions linéaires précédentes sont nulles, c'est-à-dire si l'on établit entre les m inconnues x^{m-1}, x^{m-2}, ..., x^0 seulement les $m-p$ relations

$$(15)\qquad z_0=0,\quad z_1=0,\quad \ldots,\quad z_{m-p-1}=0.$$

Mais je dis, de plus, qu'en admettant, comme nous l'avons supposé, que les deux polynômes $\varphi(x)$, $\gamma(x)$ sont premiers entre eux, ces équations ne peuvent être vérifiées qu'en égalant à zéro les différentes fonctions linéaires z. Pour bien mettre ce point en évidence, j'écris d'abord ces équations, qui, en vertu des identités (13) et (14), sont les suivantes :

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned} \alpha_{0,0}z_0+\alpha_{0,1}z_1+\ldots+\alpha_{0,m-p-1}z_{m-p-1} &= 0,\\ \alpha_{1,0}z_0+\alpha_{1,1}z_1+\ldots+\alpha_{1,m-p-1}z_{m-p-1} &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\ \alpha_{n-1,0}z_0+\alpha_{n-1,1}z_1+\ldots+\alpha_{n-1,m-p-1}z_{m-p-1} &= 0,\\ \beta_0 z_0+\ldots+\beta_{n-p}z_{n-p} &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &,\\ \beta_0 z_{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}z_{m-p-1} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations sont en nombre supérieur à celui des inconnues z. Il suffira, pour montrer qu'elles donnent pour les inconnues des valeurs nulles, de prouver que le déterminant des $m-p$ dernières n'est pas nul.

Or ce déterminant est, comme il est facile de l'établir, la résultante des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$. Il n'est donc pas nul, puisque ces deux polynômes sont supposés premiers entre eux.

Pour justifier cette remarque, reprenons les identités (13) et (14), remplaçons les polynômes $\varphi_i(x)$ par leurs expressions, et, après avoir divisé les deux membres de ces identités par R, écrivons les $m-p$ dernières; nous aurons

$$\begin{gathered}
(a_{p+1}+a_{p+2}x+\ldots+a_m x^{m-p-1})\gamma(x)-(b_{p+1}+\ldots+b_n x^{n-p-1})\varphi(x) \\
=\alpha_{p,0}+\alpha_{p,1}x+\ldots+\alpha_{p,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_0(x), \\
(a_{p+2}+a_{p+3}x+\ldots+a_m x^{m-p-2})\gamma(x)-(b_{p+2}+\ldots+b_n x^{n-p-2})\varphi(x) \\
=\alpha_{p+1,0}+\alpha_{p+1,1}x+\ldots+\alpha_{p-1,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_1(x), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
(a_n+a_{n+1}x+\ldots+a_m x^{m-n})\gamma(x)-b_n\varphi(x) \\
=\alpha_{n-1,0}+\alpha_{n-1,1}x+\ldots+\alpha_{n-1,m-p-1}x^{m-p-1}=\psi_{n-p-1}, \\
\gamma(x)=\beta_0+\beta_1 x+\ldots+\beta_p x^{n-p}, \\
x\gamma(x)=\beta_0 x+\beta_1 x^2+\ldots, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
x^{m-n-1}\gamma(x)=\beta_0 x^{m-n-1}+\ldots+\beta_{n-p}x^{m-p-1}.
\end{gathered}$$

Ces équations sont toutes semblables aux identités (6), bien qu'elles n'aient pas été formées de la même manière, mais se rapportent aux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$, qui y remplacent $f(x)$ et $g(x)$; elles nous apprennent que le déterminant des $m-p$ fonctions linéaires

$$\psi_0(x),\quad \ldots,\quad \psi_{n-p-1}(x),\quad \gamma(x),\quad \ldots,\quad x^{m-n-1}\gamma(x)$$

est la résultante des deux polynômes $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$, et par conséquent est différent de zéro.

Or ce déterminant, on le reconnaît tout de suite, est le même que celui des $m-p$ dernières équations (16). Ces équations ne peuvent donc être vérifiées que par des valeurs nulles de toutes les inconnues.

Ainsi, dans le cas où il y aura p racines communes et seulement p, les équations du premier degré

$$\varphi_0(x)=0,\quad \ldots,\quad \varphi_{n-1}(x)=0,\quad g(x)=0,\quad \ldots,\quad x^{m-n-1}g(x)=0,$$

où l'on regarde les puissances de x comme des inconnues séparées, se réduisent à $m-p$ équations distinctes

$$z_0 = 0, \quad \ldots, \quad z_{m-p-1} = 0.$$

Elles pourront être vérifiées en prenant arbitrairement $p-1$, et seulement $p-1$ inconnues, x^{p-1}, ..., x^0 par exemple; cette double propriété du système des équations indique que le déterminant du système et ses mineurs de l'ordre $p-1$ sont nuls, sans que tous ceux de l'ordre p le soient.

On voit d'ailleurs comment on obtiendra les racines communes; il suffira de former une équation entre $p+1$ inconnues consécutives x^α, $x^{\alpha+1}$, ..., $x^{\alpha+p}$, et d'y considérer ensuite ces inconnues comme des puissances de x. On aura ainsi, en supprimant une puissance convenable de x, une équation de degré p, qui donnera toutes les racines communes.

6. Dans ce qui précède, je me suis contenté d'énoncer un théorème qui permet de reconnaître le nombre des racines communes à deux équations. Si l'on veut que deux équations aient p racines communes, il faut que tous les mineurs d'ordre $p-1$ du déterminant A soient nuls, sans que tous ceux d'ordre p le soient; mais il est clair que l'on obtiendra ainsi un trop grand nombre d'équations. On aura formé un système dont toutes les équations devront être vérifiées, mais dont plusieurs pourront être supprimées. Il convient donc d'indiquer une méthode pratique qui permette d'obtenir directement les équations les plus simples.

A cet effet, nous ferons remarquer que, si deux équations

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0$$

ont p racines communes, on peut poser

$$f(x) = \mathrm{R} f_1(x), \quad g(x) = \mathrm{R} g_1(x),$$

et par conséquent constituer une identité

$$f(x)\, g_1(x) - f(x)\, g_1(x) = 0,$$

où les polynômes $f_1(x)$, $g_1(x)$ sont respectivement de degré $m-p$, $n-p$. La réciproque est évidemment vraie.

Or il est facile de reconnaître que tous les polynômes $f_1(x)$, $g_1(x)$ pouvant satisfaire à une identité de la forme précédente sont donnés par les formules (10), où les arbitraires λ satisfont aux équations (8). Pour que ces polynômes soient des degrés $m-p$, $n-p$, il suffira que l'on ait

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_{p-2} = 0, \quad \lambda_{p-1} \gtrless 0.$$

On aura donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations proposées aient p racines communes, en exprimant que le système (8), où l'on a fait $\lambda_0 = \lambda_1 \ldots = \lambda_{p-2} = 0$, donne encore une solution pour laquelle $\lambda_{p-1} \gtrless 0$; mais je n'insiste pas sur cette recherche, qui ne saurait présenter aucune difficulté.

Le caractère de la méthode précédente est d'éviter l'emploi de la théorie des fonctions symétriques, qui conduit par des voies toutes différentes à des résultats semblables. Le calcul de la résultante A en fonction symétrique des racines a déjà été donné par plusieurs méthodes, que l'on pourra lire dans l'excellent Ouvrage sur les déterminants de M. Baltzer, au moins pour le cas de deux équations du même degré.

On peut arriver au résultat comme il suit. Multiplions le déterminant A par le suivant :

$$\zeta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{m-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix};$$

nous obtiendrons le résultat

$$A\zeta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_1) & \varphi_0(x_2) & \ldots & \varphi_0(x_m) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \ldots & \varphi_1(x_m) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(x_1) & \varphi_{n-1}(x_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_m) \\ g(x_1) & g(x_2) & \ldots & g(x_m) \\ x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) & \ldots & x_m g(x_m) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_1^{m-n-1} g(x_1) & \cdots\cdots & \ldots & x_m^{m-n-1} g(x_m) \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, ..., x_m soient les racines de l'équation

$$f(x) = 0;$$

on aura, en vertu des identités (6),

$$\varphi_{i-1}(x_k) = g(x_k)(a_i + a_{i+1}x_k + \ldots + a_m x_k^{m-i}).$$

Dans le produit $A\zeta$, les quantités $g(x_k)$ seront en facteur dans chaque colonne, et l'on trouvera

$$A\zeta = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 x_1 & + \ldots + a_m x^{m-1} & \ldots \\ a_2 + a_3 x_1 & + \ldots + a_m x_1^{m-2} & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_n + a_{n-1} x_1 & + \ldots + a_m x_1^{m-n} & \ldots \\ 1 & & \ldots \\ x_1 & & \ldots \\ \ldots & & \ldots \\ x_1^{m-n-1} & & \ldots \end{vmatrix} g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_m).$$

Les colonnes non écrites se déduisent de la première en changeant x_1 en l'une quelconque des autres racines $x_2, \ldots, x_m$ de $f(x)$. Or le déterminant qui figure dans la formule précédente se calcule aisément. Retranchons de la $n^{\text{ième}}$ ligne les dernières, multipliées par $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{m-1}$; il restera pour cette ligne

$$a_m x_1^{m-n}, \quad a_m x_2^{m-n}, \quad \ldots, \quad a_m x_m^{m-n};$$

mettant a_m en facteur et appliquant un procédé tout semblable, on finira par ramener le déterminant à la forme

$$a_m^n \begin{vmatrix} x_1^{m-1} & \ldots \\ x_1^{m-2} & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ x_1^{m-n} & \ldots \\ 1 & \ldots \\ x_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ x_1^{m-n-1} & \ldots \end{vmatrix},$$

qui montre qu'il est égal à

$$\pm a_m^n \zeta.$$

On a donc

$$A\zeta = \pm a_m^n \zeta g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_m),$$

ou, en supprimant ζ,

$$A = \pm a_m^n g(x_1) g(x_2) \ldots g(x_m),$$

ce qui est l'expression connue de la résultante en fonction des racines.