Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 45-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_45_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

AOUST (l'abbé), professeur d'Analyse à la Faculté des Sciences de Marseille. — ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE QUELCONQUE. In-8°, avec figures dans le texte; 1869. Prix : 7 fr.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES PLANES, contenant la résolution d'un grand nombre de Problèmes choisis, à l'usage des Candidats à la Licence ès sciences. In-8°, avec 80 figures dans le texte; 1873. Prix : 8 fr. 50 c.

ANALYSE INFINITÉSIMALE DES COURBES DANS L'ESPACE. Un fort volume in-8°, avec 40 figures dans le texte; 1876. Prix : 11 fr.

Cet Ouvrage, apprécié avec faveur par les géomètres les plus compétents dans les Rapports officiels et deux fois couronné aux concours des Sociétés savantes, est tout à fait distinct de ceux qui ont été écrits sur la même matière, surtout par l'originalité des vues dont il est rempli, suivant l'expression d'un des savants rapporteurs.

Et en effet, l'auteur y donne la théorie des courbes d'abord par l'analyse de leurs équations naturelles, laquelle est indépendante de tout système coordonné, et par une analyse qui se rapporte à un système quelconque de coordonnées curvilignes. Cette double analyse permet d'aborder et de traiter les questions nouvelles les plus difficiles.

Le premier Volume est consacré à l'étude des courbes tracées sur une surface quelconque. Or étudier la courbe indépendamment de la surface n'est pas une chose rationnelle; c'est en cheminant sur la surface qu'il faut suivre le parcours de la courbe. L'analyse fondée sur ce point de vue instruit le géomètre sur les propriétés de la courbe et sur l'influence de la surface, parce que les éléments inhérents à l'une et à l'autre sont conservés et qu'aucun de ceux qui leur sont étrangers n'y est introduit.

La courbure introduite par l'auteur sous le nom de *courbure inclinée* se prête aux exigences de ce point de vue, parce qu'elle ne dépend que des courbes tracées sur la surface, et que ses composantes, soit normale, soit tangentielle, s'expriment avec une simplicité inespérée, dans le premier cas en fonction des éléments de la surface, et dans le second en fonction des éléments des courbes qu'elle contient.

Les applications de cette analyse se présentent dans un ordre méthodique, qui permet de les systématiser en les graduant, d'établir directement les équations différentielles de chaque problème et de discerner les cas où elles sont intégrables. Ainsi les théories des trajectoires, des lignes asymptotiques, des lignes de courbure, des lignes conjuguées, des lignes géodésiques, des lignes dont la courbure est donnée viennent naturellement et par ordre se placer dans ce cadre et sont traitées avec facilité, quoique les équations soient écrites dans un système quelconque de coordonnées.

Une large part est donnée à l'étude des courbes dans le système géodésique orthogonal : 1° parce qu'il facilite le passage des équations naturelles de la courbe à celles qui donnent sa position absolue; 2° parce que les formules se rapportant à ce système ne diffèrent de celles qui se rapportent aux coordonnées polaires planes que par les termes se rapportant à la courbure de la surface, de sorte que l'on est éclairé et sur le rôle de la surface et sur le rôle de la courbe.

Le second Volume est consacré à l'étude des courbes planes d'après une double analyse : la première indépendante de tout système coordonné, la seconde dans un système de coordonnées quelconques. Dans le premier cas, l'équation naturelle de la courbe suffit pour en faire connaître tous les éléments : la direction de la tangente, le rayon de courbure, la déviation, la rectification et la quadrature. Cette même équation est elle-même le critérium d'après lequel on reconnaît si deux courbes se rapportant à deux définitions différentes sont identiques; elle résout en même temps la question si importante de la classification naturelle des lignes.

Cette analyse permet aussi de déduire de l'équation naturelle presque sans effort : 1° la théorie des développées et développantes orthogonales ou obliques d'un ordre quelconque; 2° la théorie des roulettes, des podaires, des caustiques dans toute leur généralité; 3° l'étude complète des lignes engendrées par le mouvement d'une figure invariable de forme ou variant d'après des lois données; 4° la théorie des transformations simples ou doubles des figures.

Dans le second cas, la courbe est étudiée d'après un système quelconque de coordonnées. Cette étude repose sur la théorie complète des coordonnées curvilignes, qui est faite géométriquement et se déduit d'un seul principe, le principe de la *courbure inclinée*. Ensuite on donne des formules simples qui expriment les éléments de la courbe au moyen des éléments correspondants des lignes coordonnées. Enfin on passe aux applications, dans lesquelles sont traités un grand nombre de problèmes intéressants et nouveaux.

Le troisième Volume est consacré à l'étude des courbes gauches d'après le même plan et la même double analyse. Mais ici se présentent des difficultés inhérentes à la nature de la courbe gauche. Dans la première analyse, deux équations naturelles sont nécessaires pour la représenter, et la recherche des éléments de la courbe dépend tantôt de la première, tantôt de la seconde, tantôt de la combinaison de ces deux équations. Ce dernier cas se présente dans la recherche de l'identité de deux courbes et dans la classification naturelle des lignes. La position absolue de la tangente dans l'espace dépend d'une seule des deux équations naturelles de la courbe, mais suppose l'intégration d'une équation linéaire du second ordre.

A part ces difficultés, inhérentes à la nature de la question, cette analyse se prête à la résolution complète des problèmes les plus importants, et donne avec facilité les intégrales des développantes orthogonales ou obliques d'un ordre quelconque, des développées d'un ordre quelconque, des roulettes, des trajectoires d'un plan ou d'une surface mobile, et d'un grand nombre d'autres questions nouvelles.

L'analyse des coordonnées curvilignes, appliquée à l'étude des courbes dans l'espace, forme un corps de doctrine très-général, qui sera apprécié par les géomètres; elle repose sur la résolution du problème des coordonnées curvilignes, que l'auteur donne d'une manière tellement générale qu'elles renferment toutes celles qui ont été ou peuvent être données, suivant l'hypothèse que l'on fait sur la nature de la courbure inclinée, dont l'inclinaison est restée arbitraire. Au moyen de ces formules, on calcule celles qui se rapportent à la courbe gauche, et l'on obtient des relations simples qui lient ses éléments aux éléments correspondants des lignes coordonnées. La traduction de ces relations fournit l'énoncé des théorèmes les plus remarquables de la Géométrie rectiligne.

La partie relative aux applications de ces formules à la théorie des courbes est presque entièrement nouvelle. Elle donne le contact des courbes et des surfaces dans un système quelconque de coordonnées; les trajectoires des lignes et des surfaces du système, soit orthogonales, soit obliques, les trajectoires conjuguées d'une série de surfaces, par rapport à une surface du second degré quelconque; enfin la théorie des surfaces orthogonales et des surfaces se coupant sous une condition donnée.

L'auteur n'a rien négligé pour rendre son Ouvrage digne de l'attention des géomètres et utile à ceux qui veulent approfondir l'étude des courbes.

ENNEPER (A.). — Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Akademische Vorträge von Dr Alfred Enneper, Professor an der Universität zu Göttingen.

Le titre du Livre de M. Enneper indique l'esprit dans lequel il a été conçu. L'auteur n'a pas voulu mettre simplement le lecteur en possession des principales vérités acquises, il a tenu à le renseigner sur la façon dont ces vérités ont été obtenues et sur ceux qui les ont découvertes. Chaque proposition importante est accompagnée de renseignements historiques et bibliographiques d'autant plus précieux qu'on peut être pleinement assuré de leur exactitude : l'auteur a compulsé lui-même tous les Mémoires et tous les livres qu'il cite, travail dont on appréciera aisément la longueur et qui, d'ailleurs, n'était rendu possible que par l'extrême richesse de la bibliothèque de Göttingue. On ne saurait trop insister sur le parti que le lecteur peut tirer des nombreuses indications bibliographiques fournies par M. Enneper.

Quant à la partie mathématique, elle est traitée à un point de vue entièrement analytique, dans l'esprit de Jacobi. Les méthodes si sûres et si claires qui ont leur point de départ dans le Mémoire de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires sont volontairement laissées de côté. Il est bien entendu que nous ne nous permettons à ce sujet aucune critique : plus d'un lecteur, en possession de ces méthodes, trouvera son avantage à ne plus les rencontrer dans le livre de M. Enneper et à se familiariser avec ces procédés algébriques qui, mis en œuvre par Jacobi et ses élèves, ont donné de si admirables résultats.

L'Ouvrage comprend neuf Sections. La première, après une introduction historique, s'ouvre par quelques considérations préliminaires sur les intégrales qui conduisent aux fonctions circulaires; viennent ensuite la réduction des intégrales elliptiques d'après Legendre, puis le théorème fondamental de Jacobi sur la transformation.

Dans la seconde Section, les fonctions elliptiques sont définies en partant de l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = du.$$

L'auteur introduit la seconde période, en partant des formules

$$\sin\mathrm{am}(ui, k) = i\,\frac{\sin\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}$$

et des formules analogues.

La troisième Section contient le développement des fonctions elliptiques en produits infinis : les formules sont posées *a priori*, d'après la double suite de zéros que fait connaître la double périodicité; dans une seconde démonstration, il est établi que les fonctions ainsi formées satisfont aux équations différentielles qui définissent les fonctions elliptiques.

Dans la quatrième Section, les produits infinis sont transformés en sommes de fractions, lesquelles conduisent naturellement aux séries trigonométriques : les séries de même nature sont ensuite données pour les carrés et les produits des fonctions elliptiques; on vérifie encore que les séries trigonométriques qui représentent les fonctions elliptiques satisfont aux équations différentielles; puis l'identité

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}(-1\, q^{2r})\prod_{1}^{\infty}(1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}) = 1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos 2nx,$$

établie directement, conduit à la définition des fonctions Θ, H.

La cinquième Section concerne les quatre fonctions ϑ et leurs propriétés essentielles, entre autres le théorème fondamental de Jacobi, relatif à l'addition des arguments, où entre la somme de quatre produits de quatre fonctions ϑ, les nombreuses formules qui s'en déduisent, et les considérations, relatives tant aux constantes $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$ qu'aux quotients des fonctions ϑ, qui permettent de passer de ces dernières aux fonctions elliptiques.

Ce passage est exposé dans la Section suivante, qui contient en outre le tableau général des développements en séries et en produits des fonctions elliptiques.

Les relations établies entre les fonctions ϑ contiennent les théorèmes sur l'addition des arguments dans les fonctions elliptiques. Ces théorèmes sont donnés sous la forme habituelle au début de la septième Section; M. Enneper rappelle ensuite les démonstrations d'Euler, de Lagrange et de quelques autres. Le tableau des formules qui se déduisent immédiatement de la proposition fondamentale termine naturellement cette Section.

Dans la Section suivante, les intégrales elliptiques sont classées; l'intégrale de seconde espèce est étudiée, tant au point de vue du théorème de Legendre sur l'addition qu'au point de vue de la connexion essentielle établie par Jacobi entre les intégrales et les fonctions ϑ. Les équations différentielles qui relient les intégrales de première et de seconde espèce au module trouvent ensuite leur place; puis viennent les recherches de Legendre sur les intégrales de troisième espèce, relativement au paramètre, le théorème du même géomètre sur l'addition de ces intégrales, l'expression du paramètre au moyen des fonctions elliptiques, les développements en séries dus à Jacobi, les relations entre ces intégrales et les fonctions ϑ, l'étude de l'intégrale complète, l'interversion de l'argument et du paramètre, le théorème sur l'addition des arguments et des paramètres, enfin l'étude des différentes formes sous lesquelles peut être mise l'intégrale de troisième espèce.

La neuvième Section est la plus considérable de toutes : elle concerne le problème de la multiplication, au point de vue de Jacobi comme à celui d'Abel, la multiplication des fonctions elliptiques, la transformation générale des fonctions ϑ, l'étude des équations modulaires, de l'équation différentielle du troisième ordre entre le module primitif et le module transformé, la détermination du multiplicateur au moyen de l'équation modulaire, la formule générale de Schröter sur le produit de deux fonctions ϑ, enfin le mode de formation des équations modulaires donné par le même auteur.

Une suite de notes intéressantes sur divers points de la théorie et sur plusieurs applications tant géométriques qu'analytiques termine le Volume.

HANKEL (Dr Hermann). — DIE ELEMENTE DER PROJECTIVISCHEN GEOMETRIE IN SYNTHETISCHEN BEHANDLUNG ([1]).

Ces leçons ont été extraites des papiers laissés par Hankel; elles sont publiées par M. Harnack; l'auteur les a professées à l'Université de Tübingue.

Elles constituent un résumé très-élémentaire de ce que quelques-uns ont appelé la *Géométrie nouvelle :* on peut, en France, en conseiller la lecture aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales. La publication d'un pareil livre n'est pas, d'ailleurs, sans intérêt; les découvertes qui ont servi de point de départ aux récents progrès de la Géométrie semblent vieilles, lorsqu'on regarde le chemin qui a été fait dans la voie nouvelle; du point où nous sommes, on juge mieux ces commencements éloignés, on distingue mieux ce qu'il y a de fondamental. Le moment était venu de faire un bon livre élémentaire.

Celui de Hankel s'ouvre par une préface à la fois historique et philosophique, qu'on lira avec intérêt: on connaît le goût qu'avait l'auteur pour l'histoire des Mathématiques, et l'on n'a pas à s'étonner du soin avec lequel sont écrites ces 35 pages d'histoire contemporaine, remplies de faits qu'il conviendrait de ne pas ignorer. Hankel y montre même quelque enthousiasme. Il rappelle la réponse que fit, dit-on, Euclide aux plaintes du roi Ptolémée sur les ennuyeux débuts de la Géométrie; et il s'écrie, en terminant sa préface : *la Géométrie nouvelle est ce chemin royal!*

Les leçons sont divisées en sept Sections :

La première Section est relative à la théorie du rapport anharmonique et des transversales : on y trouve exposés avec détails le principe des signes, les relations fondamentales entre les distances

([1]) *Exposition synthétique des éléments de la Géométrie projective.* Leipzig, 1875, IV-256 p.

de trois ou quatre points situés en ligne droite, la définition et les propriétés fondamentales du rapport anharmonique, les propriétés du quadrilatère complet, les considérations générales sur les propriétés métriques projectives par lesquelles Poncelet débute dans son célèbre Traité, et les propriétés des transversales dans le triangle et le quadrilatère.

La seconde Section contient la théorie des pôles et des polaires dans le cercle, avec des applications intéressantes.

La troisième Section se rapporte aux divisions et aux faisceaux homographiques ou en involution, à la construction des points et des rayons doubles (avec l'examen détaillé des cas où les solutions sont réelles ou imaginaires), enfin au théorème de Desargues.

La quatrième Section concerne la solution des trois problèmes qu'Apollonius a nommés *sectio rationis, sectio spatii, sectio determinata,* et d'un problème général qui les renferme tous les trois.

La cinquième Section contient l'application faite par Möbius des nouvelles méthodes géométriques à la théorie des lentilles, avec diverses constructions simples dues à Reusch, Lippich et Beck.

On trouve dans la sixième Section les propriétés homographiques des coniques, les théorèmes de Pascal et de Brianchon avec les recherches y relatives de Steiner et de Plücker, la classification des coniques, la théorie des pôles et des polaires, des diamètres et des centres.

Enfin la septième Section contient un exposé rapide des fondements de la Géométrie de position de von Staudt, des transformations homographiques avec l'application aux figures semblables et identiques, et finalement la construction et les propriétés essentielles des figures collinéaires.

L'intérêt du livre de Hankel est principalement dans le soin avec lequel les principes sont exposés, dans le choix des applications et surtout dans les nombreux renseignements historiques et bibliographiques.

LINDMAN (C.-E.) — SUR UNE FONCTION TRANSCENDANTE. (*Nova Acta regiæ Societatis Scientiarum Upsalensis*, t. IX; 1874). 48 p.

Ce Mémoire est consacré à la détermination de fonctions transcendantes particulières, intégrées entre certaines limites, et déjà étudiées par Euler, Legendre, Bierens de Haan, Lobatchefsky et Cauchy.

Parmi ces fonctions, nous signalons plus spécialement les intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot ax\,dx = \mathrm{H}(a),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin ax} = \mathrm{L}(a) = \mathrm{H}\left(\frac{a}{2}\right) - \mathrm{H}(a),$$

$$\mathrm{J}_\nu^m = \int_0^1 \frac{x^{m-1}\,lx}{1+x^\nu}\,dx \quad (m < \nu).$$

L'auteur indique les relations mutuelles entre les fonctions H (...) et les fonctions L (...); la formule qui établit le passage entre $\mathrm{L}(1-b)$ et $\mathrm{L}(1+b)$, entre $\mathrm{H}(1-b)$ et $\mathrm{H}(1+b)$, et la définition d'une série numérique en fonction du symbole H (...) ou L (...), par exemple (§ 2) la formule

$$(1) \qquad \int_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1^2)}\,dp = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1),$$

et (§ 22) la formule

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \ldots = -\frac{\pi}{4} l2 + \frac{1}{2}\mathrm{H}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Le § 23 et dernier est consacré à la détermination numérique des fonctions $\mathrm{H}(a)$ et $\mathrm{L}(a)$, dont les coefficients sont fonctions des nombres de Bernoulli.

L'auteur indique l'expression numérique des fonctions

$$\mathrm{L}(a) + \mathrm{H}(a) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}(a) - \mathrm{H}(a),$$

puis viennent trois Tables donnant :

La Table I_a, les valeurs de $l \sin \frac{a\pi}{4}$, de $a = 0{,}05$ à $a = 1{,}95$;

La Table I_b, les valeurs de $\pi l 2 \cos \frac{b\pi}{4}$ et de $\pi l \operatorname{tang} \frac{b\pi}{4}$, de $b = 0{,}05$ à $b = 0{,}95$;

La Table II, les valeurs de $L(a)$ et de $H(a)$ entre les limites $a = 0{,}05$ et $a = 1{,}95$, $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $a = \frac{4}{3}$ et $a = \frac{5}{3}$.

De nombreux exemples d'intégrales transcendantes définies, offrant un certain intérêt, se rencontrent dans le courant du Mémoire. Parmi ces intégrales, nous signalerons en particulier (§ **12**)

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\,l(1 - 2x\cos\varphi_p + x^2) = \pi\varphi_p - \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\varphi_p^2,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sin\varphi_p}{1 - x\cos\varphi_p} = \frac{2\varphi_p^2}{\pi^2}\,H\left(\frac{\varphi_p}{\pi}\right) - \varphi_p\, l 2 \sin\frac{\varphi_p}{2},$$

avec

$$\varphi_p = (2p+1)\frac{\pi}{\nu}.$$

H. B.