BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Terme général d'une série quelconque déterminée à la façon des séries récurrentes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 350-355

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_350_1>

TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE QUELCONQUE DÉTERMINÉE A LA FAÇON DES SÉRIES RÉCURRENTES;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

Une série est déterminée à la façon des séries récurrentes lorsqu'on connaît les valeurs de ses premiers termes, ainsi qu'une équation du premier degré, absolument quelconque, liant chaque terme de cette série à un ou plusieurs des termes précédents.

Cette équation du premier degré n'étant assujettie, ni à présenter un nombre fixe de termes, ni à avoir tous ses coefficients constants, ni à être homogène par rapport aux termes de la série, on voit que ce mode de détermination n'implique rien touchant la nature de la série et que toute série peut être ainsi déterminée. Aussi l'objet du Mémoire que nous analysons est-il, non point l'étude d'une espèce particulière de série, mais la résolution d'un problème général, qui peut se présenter à propos d'une série quelconque.

Ce problème consiste à trouver le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes. C'est un problème fort important, car sa fréquence ne le cède en rien à sa généralité. Un très-grand nombre de séries se présentent, en effet, spontanément déterminées à la façon des séries récurrentes : telles sont les séries récurrentes proprement dites, les séries récurrentes de Lagrange, les séries sommées par Stirling ; telles sont encore les séries formées par les intégrales qui se ramènent les unes aux autres, par les termes des réduites des fractions continues, par les fonctions Y_μ et Z_ν, par les X_n de Legendre, par les nombres de Bernoulli, par les dérivées successives des fonctions algébriques, par celles des fonctions qui satisfont aux équations différentielles linéaires de tous genres, etc., etc.

II.

Ce problème n'a été résolu jusqu'à présent que pour les seules séries récurrentes proprement dites, c'est-à-dire que dans le cas, extrêmement particulier, où l'équation du premier degré présente un nombre fixe de termes, a tous ses coefficients constants et se trouve homogène par rapport aux termes de la série.

Pour le résoudre dans sa pleine généralité, M. Désiré André fait observer d'abord que, si l'on représente par U_1, U_2, U_3, ... les termes de la série, l'équation du premier degré qui lie chaque terme à un ou plusieurs des précédents peut toujours s'écrire

$$U_n = u_n + \sum_{1}^{\lambda_n}{}_k A_k^{(n)} U_{n-k},$$

u_n désignant une quantité connue fonction de n ; λ_n un entier connu fonction de n et au plus égal à $n-1$; $A_k^{(n)}$ un coefficient connu, fonction de n et de k.

Ensuite, se fondant sur trois lemmes très-faciles à établir, sinon évidents, il montre que l'on a

$$U_n = \sum_1^n {}_p \Psi(n, p) u_p,$$

et, en même temps,

$$\Psi(n, p) = \Sigma A_{k_1}^{(n_1)} A_{k_2} \; A_{k_3}^{(n_3)} \ldots,$$

la caractéristique Σ s'étendant, dans cette dernière expression, à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots, p_1, p_2, p_3, \ldots$ qui satisfont aux conditions

$$\begin{gathered} k_1 + k_2 + k_3 + \ldots = n - p, \\ n_1 = k_1 + p, \\ n_t = k_t + n_{t-1}, \\ 0 < k_t \leqq \lambda_{n_t}, \end{gathered}$$

et l'expression $\Psi(n, n)$ devant être regardée comme égale à l'unité.

On voit que les formules qui précèdent font connaître, dans tous les cas, l'expression de U_n, c'est-à-dire résolvent pleinement le problème proposé.

III.

Lorsqu'on applique les formules générales qui précèdent, on est conduit, suivant les cas, à des calculs et à des résultats fort différents les uns des autres. Les différences qu'ils présentent proviennent des formes différentes qu'affecte la relation du premier degré, de façon qu'on est naturellement amené à énumérer, ou, pour mieux dire, à classer toutes ces formes.

Pour trouver les fondements de cette classification, il suffit de remarquer que l'équation du premier degré renferme trois arguments distincts, savoir, n dans λ_n, n et c dans $A_k^{(n)}$. Il se peut que $A_k^{(n)}$ dépende de n ou n'en dépende pas, dépende de k ou n'en dépende pas; il se peut que λ_n varie avec n, ou bien, à partir d'une certaine valeur de n, devienne absolument constant.

Ces diverses alternatives, combinées entre elles de toutes les manières possibles, déterminent huit cas distincts, ni plus ni moins, dans chacun desquels il convient d'abord de voir ce que devient la formule générale, ensuite de l'appliquer à un exemple particulier.

IV.

Dans le premier cas, l'équation du premier degré dépend en réalité des trois arguments, et l'expression de U_n ne se simplifie pas. C'est à ce cas que se ramènent la détermination de la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, celle des coefficients d'une équation en fonction des sommes des puissances semblables des racines, celle du nombre des substitutions irréductibles, c'est-à-dire des permutations de n lettres où aucune lettre n'est à son rang. M. Désiré André trouve que ce dernier nombre, qu'il désigne par I_n, est donné par la formule

$$I_n = n! \sum_{0}^{n} {}_t \frac{(-1)^t}{t!}.$$

Dans le deuxième cas, $A_k^{(n)}$ dépend de n et de k; mais, à partir d'un certain rang, λ_n devient constant. L'expression de U_n ne se simplifie pas, et les exemples abondent. C'est à ce cas, en effet, que se ramènent la plupart des intégrales, les fonctions Y_μ et Z_ν, les X_n de Legendre, les séries étudiées par Stirling, etc., etc. L'auteur considère, en particulier, une série pour laquelle on a

$$U_n = e^{\frac{n(n+1)}{2}} + e^n U_{n-1} + e^{2n-1} U_{n-2} + e^{3n-3} U_{n-3},$$

et il donne l'expression de son terme général : 1° à l'aide des nombres des combinaisons régulières; 2° sous la forme d'une somme de dérivées.

Le troisième cas ne diffère du premier qu'en ce que $A_k^{(n)}$ est indépendant de k. L'expression générale de U_n s'y simplifie légèrement. Mais les Mathématiques actuelles ne présentent pour ainsi dire aucune série déterminée de cette façon. L'auteur en détermine une définie par les deux équations

$$U_1 = u_1 = 1, \quad U_n = n \sum_{1}^{\varepsilon} {}_k U_{n-k},$$

dans la seconde desquelles ε désigne le plus petit entier, positif et non nul, qui rende $n - \varepsilon - 1$ multiple de 3; et il fait connaître l'expression de son terme général.

L'équation du premier degré se simplifie encore un peu dans le quatrième cas, où $A_k^{(n)}$ dépend de n, mais non pas de k. et où λ_n devient constant à partir d'une certaine valeur de n. Dans l'impossibilité, absolue peut-être, de rencontrer un exemple, M. Désiré André a imaginé une série pour laquelle l'équation du premier degré s'écrit ainsi

$$U_n = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a}}(U_{n-1} + U_{n-2}),$$

a désignant un nombre positif quelconque. Il donne l'expression de U_n et montre qu'avec les valeurs qu'il choisit pour U_1 et U_2 ce terme U_n tend, lorsque n croît au delà de toute limite, vers la valeur déterminée $\frac{a}{3}$.

Dans le cinquième cas, λ_n dépend de n, mais $A_k^{(n)}$ ne dépend que de k; d'ordinaire, l'expression générale de U_n ne s'y simplifie pas. Les exemples manquent encore. L'auteur étudie la série définie par les équations

$$U_1 = 1, \quad U_n = \sum_1^{n-1} {}_k k^2 U_{n-k};$$

il donne l'expression de son terme général d'abord sous forme combinatoire, ensuite sous forme d'une simple dérivée d'ordre $n-1$.

C'est au sixième cas, où λ_n et $A_k^{(n)}$ sont tous deux indépendants de n, que se rapportent les séries récurrentes proprement dites, ainsi que les séries récurrentes de Lagrange, au moins pour la plupart. Dans ce cas, la formule qui donne en général U_n se simplifie considérablement. L'auteur obtient, en effet, pour U_n deux expressions, l'une combinatoire, l'autre sous forme de dérivée. Grâce à ces expressions, le terme général de toute série récurrente peut être calculé sans qu'on ait à résoudre préalablement aucune équation algébrique. En appliquant ces résultats à la détermination de la somme S_n des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^m + T_1 x^{m-1} + T_2 x^{m-2} + \ldots + T_m = 0,$$

M. Désiré André parvient, pour cette somme, à quatre expressions différentes, dont l'une constitue la formule de Waring. La plus remarquable des trois autres formules nous paraît être celle-ci

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{X^n - X^{\theta-1}}{X-1}Y\right)\right]_{x=0},$$

dans laquelle on désigne par X le polynôme

$$-T_1 x - T_2 x^2 - T_3 x^3 - \ldots - T_m x^m,$$

par Y la dérivée première, par rapport à x, de ce même polynôme X, et par θ la partie entière du quotient de $n+m-1$ divisé par m.

Lorsqu'on suppose $A_k^{(n)}$ indépendant de n et de k, mais λ_n variant avec n, on se trouve dans le septième cas de la classification; l'expression générale de U_n ne se simplifie point, et l'on ne rencontre presque aucun exemple de séries. L'auteur étudie la série définie par les équations

$$U_1 = 1, \quad U_n = a\sum_1^{n-1}{}_k U_{n-k},$$

dont le terme général s'exprime très-simplement.

Enfin le huitième cas est celui où λ_n et $A_k^{(n)}$ ne dépendent d'aucun des trois arguments. Le terme général s'exprime alors d'une façon très-simple et sous deux formes distinctes. C'est dans ce cas que rentrent toutes les séries récurrentes proprement dites et toutes les séries récurrentes de Lagrange non comprises dans le sixième cas. C'est à ce cas encore que se rapportent toutes les séries de Cassini. Comme application, l'auteur donne une double expression du terme général de la série définie par les trois équations

$$U_1 = 1, \quad U_2 = aU_1, \quad U_k = a(U_{n-1} + U_{n-2}),$$

laquelle est une série récurrente proprement dite, fort analogue aux séries de Cassini.