C.-W. BORCHARDT

Sur la moyenne arithmétique-géométrique de quatre éléments

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 337-348

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_337_1>

MÉLANGES.

SUR LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE-GÉOMÉTRIQUE DE QUATRE ÉLÉMENTS;

Par C.-W. BORCHARDT [1].

Le Mémoire sur la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en l'année 1858, était un fragment de recherches plus profondes dans lesquelles je me proposais d'étendre à quatre éléments l'algorithme

[1] *Monatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin;* 2 novembre 1876.

connu dont l'application répétée donne comme limite la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments.

Déjà à cette époque, j'étais en possession de l'algorithme qui doit être considéré dans le cas de quatre éléments. Je savais que son application répétée conduit à une limite qui est indépendante de l'ordre des éléments et qui est une fonction analytique de ces éléments; je présumais, en outre, que cette limite pourrait s'exprimer à l'aide d'intégrales hyperelliptiques. En reprenant cette ancienne recherche dans ces derniers temps, j'ai réussi à aplanir les difficultés qui m'avaient arrêté jadis, grâce à la théorie des fonctions hyperelliptiques établie par mon ami M. Weierstrass, qui a bien voulu m'en communiquer quelques parties encore inédites, et en particulier celles qui sont relatives à la définition des périodes par les équations différentielles.

1. L'algorithme relatif à quatre éléments, dont je m'étais occupé il y a dix-huit ans, s'obtient de la façon suivante :

Soient a, b, c, e quatre quantités réelles et positives, rangées par ordre de grandeur décroissante et vérifiant l'inégalité

$$a - b - c + e > 0.$$

Formons d'abord la moyenne arithmétique de ces quatre éléments; puis partageons les quatre éléments en deux couples, comme on peut le faire de trois façons différentes, et prenons la moyenne géométrique de chaque couple et la moyenne arithmétique des deux moyennes géométriques qui se correspondent; nous obtenons ainsi, à l'aide des quatre éléments a, b, c, e, les quatre fonctions a_1, b_1, c_1, e_1, données par les équations suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{4}(a + b + c + e), \\ b_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}), \\ c_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}), \\ e_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}). \end{cases}$$

Une permutation des éléments a, b, c, e entre eux ne produit qu'une permutation des quantités b_1, c_1, e_1 entre elles.

L'analogie de cet algorithme avec celui qui conduit à la moyenne arithmétique-géométrique de deux quantités résulte déjà des équations précédentes ; elle devient peut-être plus évidente encore si l'on présente ces équations sous une autre forme. De même que les équations

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}$$

de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments sont comprises dans l'équation unique

$$2(a_1 + \varepsilon b_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b})^2,$$

dans laquelle on attribue à ε la double valeur $\varepsilon = \pm 1$, de même les équations (1) sont comprises dans l'équation unique

$$(2) \quad 4(a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon' c_1 + \varepsilon\varepsilon' e_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b} + \varepsilon'\sqrt{c} + \varepsilon\varepsilon'\sqrt{e})^2,$$

dans laquelle on donne à chacune des quantités ε, ε' la double valeur $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$.

Si l'on applique de nouveau l'algorithme (1) aux quantités a_1, b_1, c_1, e_1, on en déduit quatre nouvelles quantités a_2, b_2, c_2, e_2, qui dépendent des quantités a_1, b_1, c_1, e_1 comme celles-ci dépendent de a, b, c, e, et ainsi de suite ; soient a_n, b_n, c_n, e_n les quantités obtenues après n opérations. Quand n augmente indéfiniment, les quatre quantités a_n, b_n, c_n, e_n tendent vers la même limite g. On démontre, en effet, que la différence $a - e$ entre la plus grande et la plus petite des quatre quantités devient à chaque opération plus petite que la moitié de sa valeur précédente, de façon que

$$a_1 - e_1 < \frac{1}{2}(a-e), \quad a_2 - e_2 < \frac{1}{2}(a_1 - e_1), \quad \ldots,$$

et par conséquent

$$a_n - e_n < \frac{1}{2^n}(a-e);$$

d'où il résulte, pour $n = \infty$,

$$a_n = b_n = c_n = e_n = g.$$

Dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, l'algorithme gagne en clarté, si l'on adjoint aux deux quantités $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = \sqrt{ab}$ une troisième quantité $b'_1 = \frac{1}{2}(a-b)$, qui, exprimée en fonction des quantités correspondantes a_1 et b_1, prend la valeur $b'_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$. Si, à tous les degrés des opérations, on introduit des quantités formées de la même manière, il faut adjoindre aux éléments donnés a, b la racine carrée $b' = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Par analogie avec ce qui précède, on aura, dans le cas de quatre éléments, à adjoindre aux quatre quantités a_1, b_1, c_1, e_1, définies par l'algorithme (1), six nouvelles quantités b'_1, c'_1, e'_1 et b''_1, c''_1, e''_1, dont les expressions ne diffèrent des quantités (1) que par les signes, et qui sont données par les équations

$$
\begin{aligned}
b'_1 &= \frac{1}{4}(a+b-c-e), & b''_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ab}-\sqrt{ce}),\\
c'_1 &= \frac{1}{4}(a-b+c-e), & c''_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ac}-\sqrt{be}),\\
e'_1 &= \frac{1}{4}(a-b-c+e), & e''_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ae}-\sqrt{bc}).
\end{aligned}
$$

Si l'on exprime ces quantités en fonction des quantités correspondantes a_1, b_1, c_1, e_1, et si l'on introduit, à chaque degré des opérations, les quantités formées de la même manière, on est amené à adjoindre aux éléments donnés a, b, c, e les quantités b', c', e' et b'', c'', e'' ayant les valeurs suivantes :

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
b' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ab}}+\sqrt{\mathfrak{ce}}), & b'' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ab}}-\sqrt{\mathfrak{ce}}),\\
c' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ac}}+\sqrt{\mathfrak{be}}), & c'' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ac}}-\sqrt{\mathfrak{be}}),\\
e' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ae}}+\sqrt{\mathfrak{bc}}), & e'' &= \frac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{ae}}-\sqrt{\mathfrak{bc}}),
\end{aligned}
\right.
$$

dans lesquelles

$$
(3')\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= a+b+c-e,\\
\mathfrak{b} &= a+b-c-e,\\
\mathfrak{c} &= a-b+c-e,\\
\mathfrak{e} &= a-b-c+e.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est digne de remarque que, dans les carrés de ces six quantités adjointes, il n'entre qu'une irrationnelle $\sqrt{abce}$.

2. La quantité g, définie plus haut comme limite de l'algorithme (1), répété un nombre infini de fois, est une certaine fonction analytique des quatre éléments a, b, c, e. Et d'abord cette fonction satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(4)\, f(a,b,c,e)=f\left(\frac{a+b+c+e}{4}, \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{ce}}{2}, \frac{\sqrt{ac}+\sqrt{be}}{2}, \frac{\sqrt{ae}+\sqrt{bc}}{2}\right);$$

ensuite elle est une fonction homogène du premier degré des quatre éléments ; enfin, si les quatre éléments prennent une valeur commune a, elle devient égale à cette même valeur a. Réciproquement ces trois conditions définissent complétement la limite g. En effet, l'équation fonctionnelle est vérifiée non-seulement par g, mais encore par toute fonction de g; et réciproquement, toute fonction f des quatre éléments a, b, c, e, vérifiant cette équation, est une fonction de g. Si, en outre, f doit être une fonction homogène du premier ordre des quatre éléments, on aura $f = \mathfrak{m}g$, où $\mathfrak{m}$ est un facteur numérique arbitraire, qui, d'après la troisième condition, doit être égal à l'unité.

Au lieu de déterminer la fonction g des quatre éléments a, b, c, e par l'équation fonctionnelle (4) et les deux autres conditions, on peut la définir par un système d'équations différentielles, comme cela est arrivé pour la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments dans mon Mémoire sur ce sujet (1). Pour pouvoir mieux comparer entre eux les résultats correspondants, je commencerai par énoncer sous une forme un peu différente ceux qui sont relatifs au cas de ces deux éléments.

Soit g la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments a, b ; $\frac{g}{a}$ est alors une fonction homogène de degré zéro de a, b. Introduisons comme nouvelle variable le rapport des deux éléments a, b,

$$p=\frac{b}{a},$$

(1) *Journal für Mathematik*, Bd. 58, p. 131-132, éq. (9), (10).

de façon que $\frac{g}{a}$ dépende uniquement de p, et écrivons l'équation

$$(5) \qquad d\log\frac{g}{a} = \mathrm{P}d\log p,$$

qui permet de déduire P de g par une différentiation; dans ces conditions, le résultat donné par moi, dans le Mémoire de l'année 1858 cité plus haut, peut s'énoncer de la manière suivante : La fonction P de p satisfait à une équation différentielle du premier ordre et du second degré, de sorte que $d\mathrm{P}$ est égal au produit de $d\log p$ par une expression entière du second degré en P, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* de p. Au moyen de cette équation différentielle, qui définit P comme fonction de p, et d'une quadrature indiquée par l'équation (5), on obtient la limite g.

Dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique g de quatre éléments a, b, c, e, le résultat correspondant s'exprime de la façon suivante :

Avec les quatre éléments et les six quantités qui leur ont été adjointes dans le n° 1, formons les trois variables

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{cb''}{cb'} = \frac{e}{c}\cdot\frac{\sqrt{\mathfrak{ab}} - \sqrt{\mathfrak{ce}}}{\sqrt{\mathfrak{ab}} + \sqrt{\mathfrak{ce}}}, \\ q &= \frac{bc''}{ec'} = \frac{b}{e}\cdot\frac{\sqrt{\mathfrak{ac}} - \sqrt{\mathfrak{be}}}{\sqrt{\mathfrak{ac}} + \sqrt{\mathfrak{be}}}, \\ r &= \frac{ce''}{be'} = \frac{c}{b}\cdot\frac{\sqrt{\mathfrak{ae}} - \sqrt{\mathfrak{bc}}}{\sqrt{\mathfrak{ae}} + \sqrt{\mathfrak{bc}}}, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{e}$ sont les quantités auxiliaires définies par les équations (3'); $\frac{g}{a}$, qui est une fonction homogène de degré zéro de a, b, c, e, dépendra uniquement de p, q, r. Si nous posons l'équation

$$(7) \qquad d\log\frac{\mathrm{G}}{a} = \mathrm{P}d\log p + \mathrm{Q}d\log q + \mathrm{R}d\log r,$$

qui détermine P, Q, R comme les dérivées partielles de g, ces trois fonctions P, Q, R satisfont à trois équations simultanées aux différentielles totales du premier ordre et du second degré, de sorte que chacune des différentielles dP, dQ, dR est égale à une expression linéaire et homogène en $d\log p$, $d\log q$, $d\log r$, entière et du second degré en P, Q, R, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* de p, q, r.

Au moyen de ce système d'équations aux différentielles totales qui définissent P, Q, R comme fonctions de p, q, r et d'une quadrature indiquée par l'équation (7), on obtient la limite g.

3. Cette quantité g, considérée d'abord comme la limite de l'algorithme (1) répété un nombre infini de fois, puis définie par le système précédent d'équations différentielles comme fonction analytique des éléments a, b, c, e, peut d'un autre côté s'exprimer par des intégrales hyperelliptiques. Mais le passage des équations différentielles aux intégrales, qui, dans le cas de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, est facilité par notre connaissance exacte des fonctions hypergéométriques, présente dans le cas présent de grandes difficultés.

Dans ce cas, c'est également l'inverse de la valeur de g qui peut se représenter par des intégrales complètes. On peut, en effet, avec les éléments donnés a, b, c, e et les quantités adjointes (3), former quatre nouvelles quantités α_0, α_1, α_2, α_3, telles que, si l'on considère la fonction entière du cinquième degré

$$R(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),$$

la valeur inverse de g soit donnée par l'équation

$$\frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \frac{x - x'}{\sqrt{R(x)\,R(x')}}.$$

La détermination non encore indiquée des quantités α est comprise dans le théorème suivant :

Déduisons des quatre éléments a, b, c, e quatre quantités a_1, b_1, c_1, e_1, au moyen de l'algorithme

$$\begin{aligned}
4a_1 &= a + b + c + e,\\
2b_1 &= \sqrt{ab} + \sqrt{ce},\\
2c_1 &= \sqrt{ac} + \sqrt{be},\\
2e_1 &= \sqrt{ac} + \sqrt{bc};
\end{aligned}$$

de celles-ci déduisons, par le même algorithme, quatre nouvelles quantités a_2, b_2, c_2, e_2, et ainsi de suite à l'infini ; les quatre quantités a_n, b_n, c_n, e_n tendent, quand n croît indéfiniment, vers une même limite g, dont la valeur se détermine comme il suit :

Si nous posons

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= a + b + c + e, \\
\mathfrak{b} &= a + b - c - e, \\
\mathfrak{c} &= a - b + c - e, \\
\mathfrak{e} &= a - b - c + e;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2b' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} + \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}}, & 2b'' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} - \sqrt{\mathfrak{c}\mathfrak{e}}, \\
2c' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}, & 2c'' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{e}}, \\
2e' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} + \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, & 2e'' &= \sqrt{\mathfrak{a}\mathfrak{e}} - \sqrt{\mathfrak{b}\mathfrak{c}};
\end{aligned}$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\Delta = (abce\,b'c'e'\,b''c''e'')^{\frac{1}{4}}, \\
&\alpha_0 = \frac{acb'}{\Delta}, \quad \alpha_1 = \frac{cc'e'}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{ac''e'}{\Delta}, \quad \alpha_3 = \frac{b'c'c''}{\Delta},
\end{aligned} \right.$$

$$(9) \qquad \mathrm{R}(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3).$$

on aura

$$(10) \qquad \frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \frac{x - x'}{\sqrt{\mathrm{R}(x)\,\mathrm{R}(x')}}.$$

4. Le résultat que je viens d'énoncer, et qui correspond exactement à la détermination connue de la moyenne arithmétique-géométrique de deux éléments, peut aussi s'établir d'une manière relativement élémentaire, si, au lieu de prendre pour point de départ l'algorithme donné plus haut, on s'appuie sur la théorie des intégrales hyperelliptiques de M. Weierstrass et des fonctions ϑ qui s'y rapportent.

Dans la théorie des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, il y a quatre intégrales complètes réelles différentes, qui se distinguent les unes des autres en partie par leurs limites, en partie par les numérateurs qui multiplient sous le signe d'intégration l'inverse de la racine carrée de la fonction du cinquième degré $\mathrm{R}(x)$. A chaque transformation, chacune de ces quatre intégrales complètes se partage en une somme de deux intégrales, et tant que l'on ne considère que les intégrales simples, on ne trouve aucune fonction qui se transforme en elle-même, même en faisant abstraction des facteurs qui pourraient s'introduire. On obtient seulement une pareille fonction se reproduisant par la transformation, en prenant le déterminant des quatre intégrales complètes, ou, ce qui est la même chose, l'intégrale double précédente; on arrive de cette façon à la fonction qui, dans les fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, correspond à la moyenne arithmétique-géométrique dans les fonctions elliptiques.

La détermination de la moyenne arithmétique-géométrique de quatre éléments peut, d'après cela, se déduire de la transformation du second degré des fonctions hyperelliptiques à quatre périodes, à la condition d'appliquer cette transformation au déterminant des quatre intégrales complètes réelles, et d'introduire comme modules des intégrales, au lieu des quantités considérées par Richelot, les rapports des carrés des valeurs que l'on obtient en annulant les deux arguments des quatre fonctions ϑ que l'on déduit de la fonction ϑ principale en altérant chaque argument de sa période réelle. Si l'on égale, en effet, à a, b, c, e les produits par g des carrés des valeurs que prennent ces quatre fonctions ϑ pour des valeurs nulles des arguments, et à a_1, b_1, c_1, e_1 les carrés des valeurs que prennent les quatre fonctions ϑ transformées ([1]) pour des valeurs nulles des arguments, il existe entre ces deux séries de quatre quantités les quatre relations qui ont été réunies plus haut dans la relation unique

$$4(a_1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon' c_1 + \varepsilon\varepsilon' e_1) = (\sqrt{a} + \varepsilon\sqrt{b} + \varepsilon'\sqrt{c} + \varepsilon\varepsilon'\sqrt{e})^2.$$

5. L'algorithme qui fait l'objet de cette Communication peut s'étendre à des éléments dont le nombre est égal à une puissance quelconque de 2.

Mais c'est seulement pour la première et la seconde puissance de 2, c'est-à-dire pour 2 ou 4 éléments, cas dans lequel on est conduit à des fonctions elliptiques et hyperelliptiques à quatre périodes, que l'algorithme possède l'importante propriété de ne

([1]) C'est-à-dire les quatre fonctions ϑ dans lesquelles τ_{11}, τ_{12} τ_{22} ont été remplacés par $2\tau_{11}$, $2\tau_{12}$, $2\tau_{22}$.

pas changer de valeur quand on permute les éléments entre eux. Si l'on exige cette propriété pour l'algorithme, l'extension de l'algorithme à quatre éléments est la seule possible.

Le nom de *moyenne arithmétique-géométrique* n'est plus applicable à l'extension de l'algorithme à un plus grand nombre d'éléments; car, dans ce cas de 8 éléments par exemple, l'algorithme n'a un sens que si l'on a déterminé à l'avance un certain ordre de succession des éléments.

Dans le cas d'éléments réels et positifs au nombre de 2^ρ, on peut également définir l'algorithme analogue par une équation unique remplaçant un système de 2^ρ équations. Soient, en effet, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ des lettres designant l'unité positive ou négative, et μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_\rho$ des indices pouvant prendre chacun les valeurs $0, 1$; considérons deux séries de 2^ρ quantités $a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$ et $a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$, liées les unes aux autres par les 2^ρ équations résultant de l'équation

$$(11)\quad 2^\rho \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \ldots \varepsilon_\rho^{\mu_\rho} a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = \left(\sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \ldots \varepsilon_\rho^{\mu_\rho} \sqrt{a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}} \right)^2,$$

lorsqu'on y met pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho$ toutes les combinaisons d'unités positives et négatives. Cet algorithme donne pour une des quantités a' la moyenne arithmétique de tous les éléments a, et pour chacune des $2^\rho - 1$ quantités a' restantes la moyenne arithmétique de $2^{\rho-1}$ moyennes géométriques de deux des quantités a. Ces $2^\rho - 1$ quantités restantes ne se transforment plus les unes dans les autres par permutation des éléments a entre eux; elles se transforment en des quantités différentes des quantités a', comme on peut le voir immédiatement en remarquant que, pour $\rho > 2$, il est impossible de former une fonction de 2^ρ éléments qui, par permutation des éléments entre eux, ne prenne pas plus de $2^\rho - 1$ valeurs différentes. Pour l'algorithme ainsi généralisé, on démontre comme précédemment que la différence entre la plus grande et la plus petite des quantités a' est plus petite que la moitié de la différence correspondante pour les éléments a, d'où il résulte que, par la répétition indéfinie du même algorithme, les 2^ρ quantités

$$a^{(n)}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho}$$

tendent vers une même limite g, quand n croît indéfiniment.

La limite g de l'algorithme généralisé n'est pas donnée, en général, par les fonctions abéliennes avec 2^ρ périodes; on ne l'obtient au moyen de ces fonctions que dans des cas particuliers.

Désignons, en effet, par $\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$ la fonction ϑ principale de Weierstrass, définie par l'équation

$$\vartheta(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \Sigma e^{(2\mathfrak{f}+\mathfrak{F})\pi\sqrt{-1}},$$

dans laquelle

$$\mathfrak{f} = n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_\rho v_\rho,$$
$$\mathfrak{F} = n_1^2 \tau_{11} + 2 n_1 n_2 \tau_{12} + \ldots + n_\rho^2 \tau_{\rho\rho},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de n_1, $n_2, \ldots, n_\rho$, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si l'on pose

$$(12) \qquad a_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = g\left[\vartheta\left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots, \frac{\mu_\rho}{2}; \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{\rho\rho}\right)\right]^2,$$

$$(13) \qquad a'_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho} = g\left[\vartheta\left(\frac{\mu_1}{2}, \frac{\mu_2}{2}, \ldots, \frac{\mu_\rho}{2}; 2\tau_{11}, 2\tau_{12}, \ldots, 2\tau_{\rho\rho}\right)\right]^2,$$

les grandeurs a, a' ainsi définies satisfont aux 2^ρ relations comprises dans l'équation (11), mais elles ne fournissent qu'une solution particulière; car les quantités a définies par l'équation (12) ne dépendent que de $\frac{\rho(\rho+1)}{2} + 1$ quantités $g, \tau_1, \ldots, \tau_{\rho\rho}$, de sorte qu'il est nécessaire qu'il y ait

$$2^\rho - \frac{\rho(\rho+1)}{2} - 1$$

relations entre les 2^ρ éléments a de l'algorithme (11) pour que cette solution particulière (12) puisse s'appliquer. Déjà dans le cas de $\rho = 3$, c'est-à-dire pour 8 éléments a, il faut qu'il y ait une relation entre ces éléments pour que l'application répétée de l'algorithme (11) conduise à une limite que l'on puisse exprimer par des intégrales abéliennes.

Si ces

$$2^\rho - \frac{\rho(\rho+1)}{2} - 1$$

relations n'ont pas lieu entre les éléments a de l'algorithme (11), l'application répétée de l'algorithme conduit encore à une limite; l'avenir nous apprendra de quelle nature sont les fonctions transcendantes au moyen desquelles cette limite peut se représenter.