BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 265-289

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_265_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BAILLAUD (B.). — EXPOSITION DE LA MÉTHODE DE M. GYLDÉN POUR LE DÉVELOPPEMENT DES PERTURBATIONS DES COMÈTES ([1]).

Les méthodes célèbres de Lagrange et de Laplace pour le calcul des perturbations des mouvements des corps célestes ont été longtemps appliquées sans aucune modification. Les efforts des géomètres vers la découverte de méthodes nouvelles ont généralement été relatifs à des cas spéciaux, particulièrement au mouvement de la Lune. On doit citer à ce sujet les théories de la Lune de Hansen et de Delaunay. Cauchy donna une belle méthode pour le calcul de perturbations spéciales. D'illustres géomètres s'exercèrent sur le problème des trois corps; on sait que Jacobi réussit à éliminer une des inconnues, élimination qui équivaut à la découverte d'une intégrale; mais ces résultats, quelle que soit leur importance, n'ont pas contribué à simplifier la construction des Tables des corps célestes.

Depuis le commencement du siècle, d'éminents géomètres ont approfondi l'étude d'un assez grand nombre de fonctions transcendantes, dont quelques-unes avaient déjà été introduites par Laplace dans la Mécanique céleste. Parmi ces fonctions, les plus remarquables n'ont pu être appliquées d'une manière naturelle à la solution du problème qui nous occupe : nous voulons dire ces fonctions elliptiques si intéressantes, dont l'étude est aujourd'hui si complète, et qui à certains égards, en tant que fonctions périodiques plus générales que les fonctions trigonométriques, sembleraient devoir s'introduire facilement dans la théorie des perturbations. En juin 1869, M. Hugo Gyldén publia, dans le *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg,* un Mémoire qui renferme un essai sur le sujet que nous venons d'indiquer. Ce Mémoire fut suivi de plusieurs autres insérés dans les Recueils de Saint-Pétersbourg, de Copenhague et de Stockholm. Dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences, M. Baillaud s'est efforcé d'exposer cette méthode avec

([1]) *Annales de l'École Normale,* 2e Série, t. V. (44 p.).

toute la simplicité compatible avec la nature du sujet, et en a étudié la portée sur un exemple.

On sait que la détermination des perturbations des corps célestes se fait de la manière suivante : on remplace les trois équations différentielles du second ordre du mouvement de chacun d'eux par six équations du premier ordre, donnant les dérivées par rapport au temps des six inconnues dont dépend le mouvement, en fonction de ces inconnues elles-mêmes et des quantités analogues relatives à la planète perturbatrice. Pour intégrer ces équations, on y remplace dans les seconds membres les inconnues par les valeurs qu'elles auraient sans l'existence de la force perturbatrice, c'est-à-dire par les fonctions du temps qui représentent ces inconnues dans l'hypothèse du mouvement elliptique. On a ainsi des valeurs très-approchées des dérivées des inconnues par rapport au temps. Ces valeurs sont des fonctions du temps, que l'on développe en une série de sinus et de cosinus de fonctions linéaires du temps. L'intégration est immédiate : on obtient ainsi les perturbations du premier ordre; ces perturbations sont toutes multipliées par la masse de la planète perturbatrice, la masse du Soleil étant prise pour unité.

Les fonctions du temps dont nous venons de parler dépendent essentiellement de la distance Δ de l'astre troublé à la planète perturbatrice, ou plutôt des puissances négatives de cette distance et, par suite, des positions des deux astres au même instant. Il est visible, dès lors, que les termes des séries qui représentent ces fonctions seront de la forme

$$A \,{\sin \atop \cos}(\alpha M + \beta M_1),$$

α et β désignant des nombres entiers, M et M_1 les anomalies moyennes des deux astres, ou des quantités équivalentes. Il est relativement aisé d'obtenir le développement de Δ^2; mais ce développement contiendra un très-grand nombre de termes inutiles, et la formation de ses puissances négatives présentera de très-grandes difficultés.

Hansen, qui s'est laborieusement appliqué au perfectionnement de la plupart des méthodes de la Mécanique céleste, avait remarqué que, dans le cas des orbites très-excentriques, on peut, en ne considérant qu'une partie de l'orbite de l'astre troublé, augmenter la convergence des développements relativement à l'anomalie de cet astre. La méthode de Hansen est exposée dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris, et inséré dans le premier volume des *Suppléments aux Comptes rendus*. On comprendra la possibilité de ne représenter par des valeurs réelles d'une variable qu'une partie d'un arc d'ellipse en remarquant que, si l'on pose

$$r = A + B \sin x + C \sin^2 x,$$

r désignant le rayon vecteur de l'astre, on pourra disposer de A, B, C de telle manière que, x variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, r, parti d'une valeur r_1, arrive à une valeur r_2 en passant par un minimum. Si r_1 et r_2 sont deux rayons vecteurs de l'ellipse situés de part et d'autre de l'axe focal, et que le minimum soit $a(1-e)$, cette formule représentera la portion de l'ellipse comprise entre les points auxquels aboutissent les rayons r_1 et r_2 et comprenant le périhélie, pourvu qu'on établisse entre x et l'anomalie de l'ellipse une relation convenable. Hansen a nommé x *anomalie partielle*.

En remplaçant dans la formule précédente r par $\frac{1}{r}$, on représente de même l'autre partie.

Hansen réussit encore, par des transformations faciles à concevoir, à séparer l'orbite au périhélie, à l'aphélie, puis en autant de parties que l'on veut, et l'on reconnaît aisément qu'en multipliant les divisions de l'orbite, on peut augmenter beaucoup la convergence relativement à l'anomalie partielle de l'astre troublé.

La méthode de Hansen, avantageuse surtout dans le cas des orbites très-excentriques, a été appliquée par lui, dans son Mémoire, au calcul des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke. Le calcul est inachevé, et il est aisé de reconnaître dans le Mémoire de l'illustre astronome que le travail est encore bien pénible. C'est cette méthode que M. Gyldén a prise pour point de départ; M. Gyldén, en introduisant les fonctions elliptiques, réussit à augmenter la convergence par rapport aux deux variables.

M. Gyldén augmente notablement la convergence des développements par rapport à l'anomalie partielle de l'astre troublé par la transformation suivante. Soit x l'anomalie partielle de Hansen; posons

$$x = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \omega,$$

ω étant une nouvelle variable, le module étant indiqué par le passage de l'anomalie ordinaire à l'anomalie partielle; et, au lieu de développer suivant les sinus et cosinus de multiples de x, développons suivant ceux de multiples de ω. Les séries qui représentent les développements procèdent suivant les puissances $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, et si voisin que le module soit de l'unité, q est très-petit. Dans l'exemple traité par M. Baillaud, on avait $k = 0,4$ et $q = 0,01$; si $k = 0,98$, q est $< 0,1$. Mais cette transformation ingénieuse n'est qu'un accessoire dans la méthode de M. Gyldén.

Soient ω l'anomalie de l'astre troublé, c l'anomalie de la planète perturbatrice. On a

$$\begin{aligned}\Delta^2 = A + B \sin\omega + C \sin 2\omega + \ldots \\ + B_1 \cos\omega + C_1 \cos 2\omega + \ldots,\end{aligned}$$

A, B, C, ..., B_1, C_1, ... étant des séries qui procèdent suivant les sinus et cosinus de multiples de c.

Supposons que Δ^2 varie surtout en raison du déplacement de la planète perturbatrice, ce qui arrivera nécessairement si l'on a divisé l'orbite en un assez grand nombre de parties; B, C, B_1, C_1 seront très-petits par rapport à A. C'est par exemple ce qui arrive très-nettement pour les perturbations que Jupiter produit dans le mouvement de la comète d'Encke; on a alors

$$\begin{aligned}\Delta^2 = 45,090 + 36,163 \cos c - 22,965 \sin c \\ + 2,925 \cos c \sin\omega + 4,964 \cos c \sin\omega.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, la méthode de M. Gyldén pourra s'appliquer. La série A aura la forme

$$\begin{aligned}\lambda + \lambda_1 \sin c + \lambda_2 \sin 2c + \ldots \\ + \mu_1 \cos c + \mu_2 \cos 2c + \ldots,\end{aligned}$$

et les termes successifs étant d'ordres de plus en plus élevés par rapport à l'excentricité de la planète perturbatrice, les coefficients λ, λ_1, μ_1 sont beaucoup plus grands que les autres. Le polynôme

$$\lambda + \lambda_1 \sin c + \mu_1 \cos c$$

peut s'écrire

$$M[1 + f\cos(c + F)].$$

On aura alors

$$\Delta^2 = M[1 + f\cos(c + F)](1 + R),$$

R étant très-petit, et la plus grande difficulté de la formation des puissances négatives de Δ résidera dans celle des puissances négatives de

$$1 + f\cos(c + F);$$

cette difficulté sera très-grande si l'astre troublé peut s'approcher beaucoup de la planète perturbatrice; car f est alors très-voisin de l'unité.

M. Gyldén écrit

$$1 + f\cos(c + F) = (1 + f)\left(1 - \frac{2f}{1+f}\sin^2\frac{c + F}{2}\right),$$

et pose

$$\frac{c + F}{2} = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\omega \quad \left(\text{mod.}\sqrt{\frac{2f}{1+f}}\right).$$

Alors

$$1 + f\cos(c + F) = (1 + f)\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\omega,$$

et les puissances de ce facteur se développeront en séries de sinus et de cosinus de multiples de ω par les formules très-convergentes de la théorie des fonctions elliptiques.

Dans son premier Mémoire, M. Gyldén avait formé Δ^2 pour les perturbations de la comète d'Encke par Jupiter; d'après le résultat écrit plus haut, la méthode est merveilleusement appliquée à ce cas.

M. Baillaud a formé Δ^2 pour les perturbations de la même comète par la Terre; il trouve qu'il faut diviser l'orbite à ses quatre sommets et établir un point de division entre chaque sommet du petit axe et le périhélie pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\Delta^2 = {} & 1{,}623 - 1{,}168\sin c + 0{,}850\cos c \\ & + 0{,}216\cos\omega - 0{,}243\sin c\cos\omega + 0{,}387\cos c\cos\omega.\end{aligned}$$

Il est visible que la méthode s'appliquera avantageusement; cependant il s'en faut de beaucoup que la simplification soit aussi grande que pour les perturbations produites par Jupiter.

ELLIOT. — Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce (¹).

Dans un travail présenté comme thèse l'année dernière à la Faculté des Sciences de Paris, M. Elliot s'est proposé de déterminer le nombre des intégrales abéliennes de première espèce dans le cas général où la courbe algébrique correspondante possède des singularités d'une nature quelconque.

La méthode employée par l'auteur repose essentiellement sur l'étude des fonctions algébriques faite par M. Puiseux dans un Mémoire bien connu et dont il est utile de rappeler le principe.

Soit

$$(1) \qquad F(x, y) = \Sigma A y^{\alpha} x^{\beta} = 0$$

l'équation de la courbe de degré m, quand on a pris pour origine un point singulier. En regardant α comme une abscisse et β comme une ordonnée, on fait correspondre un point à un terme de l'équation. Les valeurs approchées des racines infiniment petites y_1, ou, si l'on veut, les premiers termes de leurs développements en série s'obtiennent en cherchant les termes de degré le moins élevé de l'équation (1), quand on regarde x comme du premier ordre et y comme un infiniment petit d'un ordre convenable μ. En désignant par D le degré d'un terme, l'équation

$$\mu\alpha + \beta = D$$

montre que les termes de même degré sont figurés par des points en ligne droite; l'ordonnée à l'origine de la droite indique le degré du terme, et son coefficient angulaire, changé de signe, le degré de y en x.

Les racines infiniment petites de l'équation (1) répondent alors aux côtés d'un polygone G qui caractérise le point singulier.

Il est clair qu'il existe, pour la dérivée $F'_y(x, y)$, un polygone analogue G′, et, d'après la définition même, ses sommets se déduiront de ceux de G en reculant ceux-ci d'une unité vers les α négatifs, en sorte que les côtés des deux polygones seront parallèles.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2ᵉ Série, t. V; 1876.

Considérons maintenant l'intégrale

$$(2) \qquad \int \frac{N(x, y)\, dx}{F'_y(x, y)}.$$

Le problème consiste à déterminer les conditions que doit remplir le polynôme arbitraire $N(x, y)$, de degré $m-3$, pour que l'intégrale (2) reste finie, quel que soit x, c'est-à-dire, en ne considérant d'abord que les valeurs infiniment petites de y, pour que le coefficient de dx ait un degré supérieur à -1.

Imaginons que l'on construise, par la règle indiquée, le réseau des points répondant à la fonction $N(x, y)$, et considérons un polygone G'' déduit de G' en abaissant ses sommets d'une unité vers les β négatifs. Si l'on égale à zéro les coefficients des termes de N qui correspondent à des points situés au-dessous de la ligne polygonale G'' ou sur ses côtés, il résulte de ce qui a été dit plus haut que le degré du coefficient différentiel sera supérieur à -1. L'auteur démontre que ces conditions sont nécessaires. Leur nombre s'évalue en fonction des coordonnées des sommets du polygone G et d'autres constantes qui dépendent très-simplement de ces coordonnées.

Quand plusieurs racines y offrent dans leur développement en série le même premier terme, il est nécessaire de continuer l'application de la méthode par la considération de nouveaux polygones.

Le nombre total des conditions d'où l'on déduit celui des intégrales de première espèce s'obtient en répétant pour tous les points critiques ce que l'on a dit de l'un d'eux. L'auteur arrive à la conclusion que le nombre de ces intégrales est moitié de celui des périodes. L'évaluation du dernier nombre a été donnée dans le cas général par MM. Briot et Bouquet dans leur *Théorie des fonctions elliptiques*.

Comme application de sa méthode, l'auteur examine les courbes d'*espèces* zéro et 1 avec des points multiples quelconques. Dans le premier cas, les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, qui est unicursale, s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre variable. Dans le second, les coordonnées s'expriment en fonction du paramètre par des formules ne contenant comme irrationnelle qu'un radical carré portant sur une expression, au plus, du quatrième degré.

Une autre application consiste à chercher l'*espèce* de la courbe $y = f(x)$, répondant à une équation différentielle

$$\frac{du}{dz} = f(u),$$

dont l'intégrale est monodrome. L'auteur vérifie, sur plusieurs exemples d'équations, considérées par MM. Briot et Bouquet, que l'espèce est zéro ou 1, selon que l'intégrale s'exprime par des fonctions élémentaires ou par les fonctions elliptiques.

La considération du cas où la courbe est du troisième ou du quatrième degré termine le travail.

MOUCHOT (A.). — LA RÉFORME CARTÉSIENNE ÉTENDUE AUX DIVERSES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES PURES. — Paris, Gauthier-Villars, 1876; 1 vol. gr. in-8°, VII-179 p.

Cet Ouvrage, comme l'auteur nous l'apprend dans sa Préface, est le développement d'un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 17 juin 1865. Il a surtout pour objet, par une nouvelle interprétation des symboles imaginaires, « de compléter le système de coordonnées de Descartes » et « de fournir à la Géométrie supérieure les figures qui lui manquent ».

Affirmer que M. Mouchot y soit complétement parvenu, ou même qu'il soit possible à personne d'y parvenir complétement, serait peut-être téméraire; mais le Livre dont nous parlons n'en restera pas moins une œuvre consciencieuse, intéressante à beaucoup de points de vue, et digne d'être consultée par toutes les personnes qui éprouvent quelque attrait pour cette branche des Mathématiques.

L'Ouvrage se divise en quatre Parties. La première, intitulée : *Travaux de Descartes*, est consacrée à l'examen de la méthode de ce grand géomètre. Après un aperçu historique et critique renfermant des citations nombreuses, et insistant beaucoup sur la résolution graphique des équations, l'auteur arrive à l'introduction des expressions imaginaires, auxquelles la réforme cartésienne ne saurait s'appliquer d'une façon satisfaisante. Il termine, enfin, par quelques considérations rapides sur les travaux de Riccati, de Lambert, de Carnot et de M. Marie, suivies de l'exposé de la conception nouvelle qu'il propose d'introduire.

« Cette conception », dit-il, « consiste à regarder tout point géométrique comme étant formé de deux points ordinaires que j'appelle ses *composantes*. Un point géométrique est réel tant que ses composantes coïncident; mais, dès qu'elles se séparent, il devient imaginaire, en sorte qu'un point imaginaire existe au même titre qu'un point réel, et ne peut se confondre avec lui. » Il appelle points imaginaires *conjugués* deux points tels que la première composante de l'un soit la seconde de l'autre et réciproquement.

La deuxième Partie, *Définitions d'Arithmétique et d'Algèbre*, contient, sur les opérations ordinaires, sur les grandeurs, sur les relations entre l'Algèbre et la Géométrie, des considérations générales un peu compliquées, un peu confuses peut-être, d'autant plus qu'on y trouve déjà mêlées, à l'occasion, des notions résultant de la définition du point imaginaire que nous venons de reproduire. Le moindre défaut que nous soyons en droit de relever ici, c'est un certain manque de clarté, et une véritable discordance entre le texte et le titre. Ainsi, par exemple, on trouve à la fin une page consacrée à la notion des quantités complexes, et dans laquelle l'auteur prétend établir que ces quantités se rattachent à sa propre conception des droites de modes contraires. Est-ce là un sujet qui rentre dans des « définitions d'Arithmétique et d'Algèbre » ?

Dans la troisième Partie, intitulée : *Corrélation des figures*, on trouve tout d'abord une définition de la corrélation, qui a le tort de manquer de précision d'une façon complète; puis des aperçus sur les travaux géométriques de Leibnitz, de Monge, de Carnot, de Poncelet et de MM. Chasles et Marie. Revenant à la doctrine des quantités complexes, M. Mouchot appuie sur ce fait, qu'elle ne peut servir à compléter, ni la Géométrie supérieure, ni le système de coordonnées de Descartes, tandis que sa propre méthode satisfait à toutes ces exigences, et se prête aux mêmes applications que les quantités complexes.

La quatrième Partie : *Application*, se subdivise en deux Chapitres : *Applications géométriques* et *Applications algébriques*. Sans vouloir pénétrer dans le détail, nous indiquerons seulement, parmi les applications dont il s'agit, les propriétés métriques des triangles, la circonférence, l'hyperbole équilatère, les foyers, la résolution graphique des équations du second et du troisième degré, l'interprétation géométrique des équations à deux et à trois variables, la distance de deux points, les formules de la Trigonométrie plane, les logarithmes.

Tel est le plan général de l'Ouvrage de M. Mouchot. Après l'avoir lu et relu, nous persistons à penser qu'il y aurait eu grand avantage à lui donner une étendue plus restreinte, à exposer immédiatement la notion qu'il a imaginée, et à la faire suivre, sans plus tarder, d'un petit nombre d'applications bien choisies, et permettant surtout de faire ressortir des résultats nouveaux, des avantages palpables, qui échappent complétement au lecteur, dans l'Ouvrage actuel. Pour avoir voulu trop embrasser et introduire une réforme générale, l'auteur, à notre avis, a manqué son but.

L'interprétation de M. Mouchot paraît ingénieuse, et je suis loin de prétendre qu'elle ne puisse pas conduire à des résultats intéressants. Mais en même temps elle est artificielle, comme celle de M. Marie, avec laquelle elle présente une analogie qui n'a pas échappé à l'auteur, comme toutes les interprétations nouvelles qu'on proposerait encore d'introduire. En somme, le but principal, le but unique, pourrais-je dire, que poursuit M. Mouchot, c'est la représentation du lieu représenté par l'équation $f(x,y) = 0$ lorsque x et y peuvent prendre des valeurs imaginaires (ou mixtes, pour employer la désignation de l'auteur). Or, comme il le dit lui-même, p. 151 : « Dans la construction d'un lieu, les valeurs de l'abscisse sont complétement arbitraires tant qu'elles sont réelles, mais il est indispensable de les assujettir à certaines conditions lorsqu'elles sont mixtes. »

Et cette restriction résulte de la nature même des choses. Ainsi que le fait remarquer encore M. Mouchot, « si les valeurs d'une variable indépendante sont parfaitement arbitraires tant qu'elles sont réelles, il ne saurait en être de même, en coordonnées rectilignes, quand ces valeurs sont mixtes. » En d'autres termes, si l'on veut que l'équation $f(x, y) = 0$ représente alors quelque chose, il faut que la variable indépendante ne soit plus indépendante. C'est ce qui tend à détruire en grande partie l'analogie avec la conception de Descartes, et à nous faire croire que toutes les tentatives auxquelles on peut se livrer pour étendre aux coordonnées cartésiennes la notion des expressions imaginaires sont fatalement obligées de présenter un caractère conventionnel, artificiel, qu'on ne saurait éviter.

La notion des quantités complexes, au contraire, à laquelle M. Mouchot rend justice, tout en refusant de l'accepter, et qu'il regarde comme insuffisante, est en elle-même simple, naturelle, expressive, et se prête admirablement à toutes les opérations du calcul. Seulement, il ne faut pas lui demander ce qu'elle ne saurait donner, non plus qu'aucune autre conception. Dans la relation $f(x,y) = 0$, il n'y a pas lieu de chercher autre chose que l'expression d'un certain *mode de transformation* entre deux courbes, dont on pourrait sans doute tirer des conséquences intéressantes, en dehors de celles qui sont acquises déjà. Il ne semble pas, d'ailleurs, que les *droites mixtes,* proposées par l'auteur, puissent suppléer avec avantage, ainsi qu'il le prétend, cette conception si féconde des quantités complexes. Cette erreur tient sans doute à ce que, profondément pénétré de son sujet, il y trouve un caractère de clarté supérieur à celui des quantités complexes, tandis que c'est le contraire qui est vrai pour tout lecteur non prévenu.

Ces réserves faites, il y aurait injustice à ne pas rendre hommage, comme nous l'avons déjà fait, aux recherches consciencieuses d'un savant qui s'est fait une notoriété bien méritée par des travaux, d'un ordre tout différent, relatifs à l'*utilisation industrielle de la chaleur solaire*. M. Mouchot, chercheur infatigable, professeur éminent, esprit original, est un de ces hommes dont l'intelligence ne doit pas s'appliquer en vain à une branche quelconque des connaissances humaines. Nous sommes loin de partager toutes ses doctrines sur les imaginaires, nous croyons qu'il a exagéré singulièrement la portée de sa découverte. Mais, loin de le décourager dans ces travaux, nous serions heureux qu'il reprît sa théorie, en la simplifiant, en la coordonnant, en élaguant les accessoires inutiles, en présentant surtout, par quelques applications judicieuses, une démonstration topique de l'utilité qu'il peut y avoir parfois à l'emploi de cette notion nouvelle.

Nous ne faisons donc nulle difficulté à convenir qu'il peut y avoir là quelque chose de fécond, et à répéter avec M. Mouchot cette maxime si philosophique d'Aristote, par laquelle se termine son Ouvrage : « *Nombre de choses sont encore ignorées des savants, qui seront familières aux écoliers des temps à venir!* »

A. L.

BERTINI (E.). — SOPRA UNA CLASSE DI TRASFORMAZIONI UNIVOCHE INVOLUTORIE (¹).

Dans un Mémoire présenté à l'Institut de France en 1859, et dont l'objet a été succinctement défini dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, t. XLIX, p. 542, M. de Jonquières a étudié un mode de transformation qui n'avait pas été considéré jusqu'alors et qui constitue la première généralisation des transformations quadratiques dont on trouve diverses traces dans le *Traité des propriétés projectives* de Poncelet, et qui avaient été étudiées par Magnus et Steiner.

Les figures qui font l'objet du travail de M. de Jonquières peuvent être définies comme il suit : à un point quelconque de l'une d'elles correspond, en général, un point bien déterminé de l'autre ; et, en outre, quand un point de la première parcourt une droite, le point correspondant de la seconde décrit une courbe algébrique d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$. Les principales propriétés de ces figures ont été exposées dans un Mémoire inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1864).

En 1863 et en 1865, dans deux Mémoires présentés à l'Institut de Bologne, M. Cremona, étendant la conception de M. de Jonquières, a établi la théorie la plus générale des transformations géométriques planes (²).

En 1861, M. Chasles avait ouvert une autre voie aux investigations des géomètres en étudiant (*Comptes rendus*, t. LIII) la correspondance qui existe entre les points d'une courbe gauche tracée sur un hyperboloïde et les points de certaines courbes planes.

Depuis, bien des travaux ont été publiés sur les mêmes sujets ; nous nous proposons aujourd'hui d'analyser un beau Mémoire de

(¹) *Sur une classe de transformations uniponctuelles et involutives.* (*Annali di Matematica*, t. VIII, 1877, p. 11-23 et 147.)

(²) Voir *Bulletin*, t. V, p. 206-240.

M. Bertini, professeur à l'Université de Pise, sur une classe de transformations uniponctuelles et involutives. On obtient cette transformation en faisant correspondre aux droites d'un plan des courbes d'ordre n, ayant en commun un point $(n-1)$-uple et $2(n-1)$ points simples, et en supposant que deux points correspondants se correspondent doublement. On voit qu'il s'agit d'un cas particulier des transformations de M. de Jonquières.

Désignons par O le point $(n-1)$-uple et par $s_1, s_2, \ldots, s_{2(n-1)}$ les $2(n-1)$ points simples fondamentaux.

Il est clair que, dans ce cas, le système des points fondamentaux et des courbes fondamentales de deux figures correspondantes leur est commun, et qu'à un rayon issu du point O correspond un autre rayon issu de O; ces rayons forment des faisceaux en involution. Il y a donc deux cas à considérer : celui où tout rayon d'un des faisceaux se confond avec son correspondant, et celui où cette coïncidence n'existe pas.

Premier cas. — Chaque rayon porte une involution de points, qui a deux points doubles. Nous écarterons d'abord le cas tout particulier où un de ces points doubles tombe toujours en O. Ces points doubles engendrent une courbe Γ [1] du même ordre n que la transformation et ayant un point $(n-2)$-uple en O. Une droite quelconque l coupe, en effet, la courbe du réseau qui lui correspond en n points, et le point qui correspond à un quelconque M de ces points doit se trouver, en même temps, sur l et sur OM ; il est donc le point M lui-même, et l coupe Γ en n points. A tout point M du plan correspond un autre point M′, conjugué harmonique de M par rapport aux deux points d'intersection de OM avec Γ et autres que O, et puisque tous les points de la droite fondamentale Os_1 correspondent au point fondamental s_1, il faut que les deux points d'intersection de Os avec Γ soient réunis en s_1. Donc tous les points fondamentaux s sont des points doubles de Γ ou des points de contact des tangentes à Γ issues de O; en d'autres termes, tous les points s sont sur la première polaire de O, par rapport à Γ.

Cette première polaire, d'ordre $n-1$, est entièrement détermi-

---

[1] Plus loin, la courbe Γ sera nommée *ponctuelle double*.

née par le point $(n-2)$-uple O et par les $2n-2$ points simples s; elle se confond donc avec la courbe fondamentale Φ^{n-1} qui correspond au point O; car cette courbe fondamentale d'ordre $n-1$ est aussi entièrement déterminée par le point $(n-2)$-uple O et par les $2n-2$ points simples s. Nous pourrons donc énoncer ce théorème : *La courbe fondamentale* Φ^{n-1} *est la première polaire de* O *par rapport à* Γ, *et les* $n-2$ *branches de* Φ^{n-1} *qui passent par* O *y sont tangentes aux* $n-2$ *branches de* Γ.

Il résulte de ce théorème que *tous les points fondamentaux* s *se trouvent au nombre des points d'intersection de* Γ *et de* Φ^{n-1} *autres que* O; et comme ces points fondamentaux sont précisément au nombre de $2n-2$, il est vrai que réciproquement *tout point d'intersection de* Γ *et de* Φ^{n-1}, *autre que* O, *est un point fondamental* s.

Donc, *si* Γ *a un point double au point* s, deux points fondamentaux s sont réunis en ce point, ou autrement, *tout point double de* Γ *absorbe deux points* s; et ces deux points s se trouvant infiniment voisins sur Φ^{n-1}, *la courbe fondamentale* Φ^{n-1}, *et, par suite, toutes les courbes du réseau, sont tangentes à la conjuguée harmonique de* Os *par rapport aux deux tangentes en* s *à* Γ.

Il est bien aisé de voir que le cas considéré est possible. Supposons que Γ soit du genre p; la définition du genre et la formule $2p-2=n(n-3)-2(d+r)$ que l'on déduit des formules de Plücker (d représente le nombre des points doubles, r celui des points de rebroussement) établissent que, dans ce cas, Γ a $n-p-2$ points doubles $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-p-2}$, et $2p+2$ tangentes, issues de O et ayant leurs points de contact en $c_1, c_2, \ldots, c_{2p+2}$. Si $p=n-2$, il n'y a pas de points d, et l'on peut tirer tous les cas où $p<n-2$ de celui-là, en supposant que les points c se rapprochent infiniment deux à deux.

Transformons quadratiquement le plan P des deux figures considérées en un plan Π, le triangle fondamental, dans P, étant O$d_1 d_2$ et d_1, d_2 représentant deux quelconques des points d. Déterminons l'ordre de la transformation du plan Π. D'après le théorème de M. de Jonquières (*Nouvelles Annales*, 1864, p. 107, art. 13), à une droite R du plan Π correspond dans P une conique C^2 circonscrite au triangle fondamental O$d_1 d_2$; à C^2 correspond une courbe d'ordre $2n$, et cette courbe C^{2n} se décompose dans la courbe

Φ^{n-1}, la droite Od_1, la droite Od_2 et une courbe C^{n-1}. D'après ce même théorème, C^{2n} a en O un point $2(n-1)$-uple, et en chacun des points fondamentaux un point double. Or, le point $2(n-1)$-uple O se décompose : Φ^{n-1} y passe $n-2$ fois, od_1 une fois, od_2 une fois, C^{n-1} y passe donc $2(n-1)-(n-2)-1-1=n-2$ fois; le point double de C^{2n} en d se décompose aussi; car Φ^{n-1} passe par les deux points fondamentaux réunis en d_1, Od_1 passe par l'un d'eux, donc C^{n-1} ne passe que par l'autre seul et n'est point tangente en ce point aux courbes du réseau; même raisonnement pour d_2; les points doubles des points $d_3, d_4, \ldots, d_{n-p-2}$ se décomposent aussi, car Φ^{n-1} passe en chacun des points réunis en d_3, par exemple; donc C^{n-1} passe aussi, une fois, par chacun de ces points et, par suite, C^{n-1} passe par $d_3, \ldots, d_{n-p-2}$, et y est tangente aux courbes du réseau. Les points doubles $c_1, c_2, \ldots, c_{2p+2}$ sont des points simples pour C^{n-1}, parce que Φ^{n-1} y passe une fois [1].

Ainsi la courbe C^{n-1} a, en O, un point $(n-2)$-uple; en chacun des deux points d_1, d_2 un point simple, et elle n'y est pas tangente aux courbes du réseau; aux points $d_3, d_4, \ldots, d_{n-p-2}$ des points simples, et elle y est tangente aux courbes du réseau; et enfin en $c_1, c_2, \ldots, c_{2p+2}$ des points simples.

Si nous transformons maintenant quadratiquement la courbe C^{n-1}, le triangle fondamental étant encore Od_1d_2, nous obtenons une courbe $C^{2(n-1)}$, qui se décompose comme il suit : $(n-2)$ fois la droite d_1d_2, la droite Od_1, la droite Od_2 et une courbe $C^{(n-2)}$. $C^{2(n-1)}$ a, en O, un point $(n-1)$-uple qui se décompose aussi de la manière suivante : un point $(n-3)$-uple de C^{n-2} et les points des droites Od_1, Od_2; $C^{2(n-1)}$ a, en d, un point $(n-1)$-uple; comme d_1d_2 y passe $n-2$ fois et od_1 une fois, C^{n-2} n'y passe plus. De même C^{n-2} ne passe pas plus en d_2. En outre, C^{n-2} passe par les $2p+2$ points qui correspondent à $c_1, c_2, \ldots, c_{2p+2}$ et par les points qui correspondent aux couples de points infiniment voisins $d_3, d_4, \ldots, d_{n-p-2}$ (C^{n-2} étant unicursale comme C^{n-1}, deux points infiniment voisins de l'une ont pour correspondants deux points infiniment voisins de l'autre).

En résumé, la courbe C^{n-2} du plan Π est de l'ordre $n-2$, elle

(1) Hirst, *Annali di Matematica*, 1865.

a un point $(n-3)$-uple, elle passe par les $2p+2$ points simples qui correspondent aux points c et par les $n-p-4$ points correspondants à $d_3, d_4, \ldots, d_{n-p-2}$, dont chacun représente deux points fondamentaux successifs. La transformation dans le plan Π est donc de l'ordre $n-2$; la courbe Γ est transformée en une courbe (aussi ponctuelle double et de genre p) de l'ordre $n-2$ qui passe par les $2p+2$ points ci-dessus et a des points doubles aux $n-p-4$ autres.

Appliquons au plan Π la même transformation, puis continuons ainsi tant que la courbe ponctuelle double aura des points doubles, et enfin, s'il ne reste qu'un seul point double de cette courbe, prenons pour points fondamentaux, O, un point fondamental simple et le dernier point fondamental double, et nous arriverons à la fin *à une transformation involutive de l'ordre $p+2$ avec $2p+2$ points fondamentaux tous simples et distincts, et une courbe ponctuelle double d'ordre $p+2$, du genre p avec un seul point p^{ple} confondu avec le point $(p+1)$-uple de la transformation. De cette transformation involutive on peut donc déduire, au moyen de transformations quadratiques successives, toutes les transformations involutives de M. de Jonquières possibles qui admettent pour courbe ponctuelle double une courbe Γ du genre p.*

Ainsi, pour $p=0$, toutes les transformations involutives découlent de l'*inversion quadrique* (¹); pour $p=1$, elles naissent de la transformation involutive du troisième ordre que l'on obtient en prenant pour point fondamental double un point quelconque d'une courbe générale du troisième ordre, et pour points fondamentaux simples les quatre autres points d'intersection de cette courbe avec la première polaire de O, etc.

Nous avons démontré entièrement le premier théorème de M. Bertini, afin d'indiquer la marche à suivre dans ces recherches; mais, afin de ne pas abuser de l'hospitalité du *Bulletin*, nous ne ferons qu'énoncer les autres résultats auxquels l'auteur est parvenu.

Pour $p=0$ on peut dire aussi que *les transformations involutives découlent de l'homologie involutive ou harmonique* (²).

(¹) Cette exposition diffère, en quelques points, de celle de M. Bertini. ED. DW.

(²) CREMONA, *Géométrie projective*, p. 250. — Paris, Gauthier-Villars.

Si Γ a un point $(n-1)$-uple en O, $n-1$ points fondamentaux simples de la transformation sont infiniment voisins de O sur les tangentes en ce point à Γ; les autres $(n-1)$ points fondamentaux simples ne peuvent exister sur Γ. Dans ce cas, *on peut arriver à l'inversion quadrique, le pôle étant sur la conique, et de celle-ci à l'homologie harmonique.*

Second cas. — Il existe deux rayons doubles OM et ON. Ce cas se subdivise en trois autres :

(*a*) Ces deux rayons doubles sont des ponctuelles doubles.

L'ordre n de la transformation doit être pair. Pour transformer quadratiquement le plan P, il faut placer l'un des sommets du triangle fondamental en O, le second en un point de l'une des droites ponctuelles doubles et le troisième en un point fondamental simple, et l'on tombe sur le cas (*c*) ci-après; puis, en répétant le même procédé, on tombe sur le cas (*b*).

(*b*) Aucun des rayons doubles n'est ponctuelle double.

Il y a alors quatre points doubles; le point O *absorbe les* $n-2$ *autres. — L'ordre n de la transformation doit être pair, car, dans toute transformation involutive d'ordre impair, il existe nécessairement une courbe ponctuelle double.*

(*c*) Un des rayons doubles est une ponctuelle double.

Alors l'autre rayon a deux points doubles, *n doit être impair et, quand n est impair, une droite et la courbe correspondante se coupent, en général, simplement sur la droite ponctuelle double.*

Les propriétés du cas particulier (*c*) découlent aussi des considérations suivantes qui ramènent le cas (*c*) au cas (*b*).

Transformons le plan dans lequel on a le cas (*c*) quadratiquement, en plaçant un des sommets du triangle fondamental en O, le second en un point M de la droite ponctuelle double et le troisième en un point fondamental simple *s*. En nous appuyant sur le théorème précité de M. de Jonquières, nous verrons que l'ordre de la transformation diminue d'une unité et devient pair.

Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas (*b*), auquel les deux autres sont ramenés.

Si $n=2$, *le cas* (*b*) *est la transformation involutive ordinaire que l'on obtient en se donnant un faisceau de coniques et en fai-*

sant correspondre à chaque point son conjugué par rapport à ce faisceau (¹).

Cette transformation conduit à l'homologie harmonique par une transformation quadratique faite au moyen d'un réseau de coniques passant par deux des trois points O, s_1, s'_1 et par un des points u (les quatre points u sont les quatre points doubles, O, s_1 et s'_1 les trois points fondamentaux). L'axe d'homologie est alors la droite qui correspond quadratiquement à ce point double, et le centre d'homologie est le point correspondant quadratiquement à celui des points u qui est extérieur au triangle fondamental employé.

Si les points u situés sur l'un des deux rayons doubles se confondent, les conclusions ci-dessus ne changent pas.

Il reste à supposer que n est un nombre pair quelconque. Soient encore u', u''; u'_1, u''_1 les points doubles et $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, $s'_1, s'_2, \ldots s'_{n-1}$ les points fondamentaux simples, s_1 correspondant à la droite Os'_1, etc. Transformons quadratiquement notre plan P en un plan Π, en mettant, dans ce plan, un des sommets du triangle fondamental en O et les deux autres en deux points s, ou en deux points s', ou même en un point s et un point s' (à la condition que ces deux derniers ne soient pas homologues). L'ordre de la transformation diminue de 2; les points fondamentaux simples du plan Π sont ceux qui correspondent quadratiquement à s_3, $s_4, \ldots, s_{n-1}, s'_3, s'_4, \ldots, s'_{n-1}$, si s_1 et s_2 (ou s'_1 et s'_2) ont été pris pour points fondamentaux de la transformation quadratique.

En répétant cette opération, on arrive à une transformation du second ordre et de celle-ci à l'homologie harmonique.

Ces conclusions restent vraies quand les points s, s' se rapprochent infiniment de O et aussi quand les points doubles u deviennent respectivement successifs.

Nous avons épuisé ainsi tous les cas qui peuvent se présenter dans les transformations de Jonquières involutives, et l'existence effective de tous ces cas peut se démontrer en faisant, en sens inverse, les transformations quadratiques indiquées. Nous pourrons donc conclure que :

(¹) Cette transformation et l'inversion quadrique sont donc les seules transformations involutives du second ordre.

Toutes les transformations de Jonquières involutives, à l'exception de celles qui admettent une courbe ponctuelle double irrationnelle, peuvent être déduites de l'homologie harmonique au moyen de transformations quadratiques successives (¹).

Il est aussi digne de remarque que :

Toute transformation uniponctuelle involutive d'ordre n, qui a une courbe ponctuelle double d'ordre n, est nécessairement une transformation de Jonquières.

ED. DEWULF.

DINI (U.). — SU ALCUNE FUNZIONI CHE IN TUTTO UN INTERVALLO NON HANNO MAI DERIVATA (²).

L'existence de fonctions continues n'ayant point de dérivées a été implicitement établie par Riemann dans son Mémoire sur les séries trigonométriques. Hankel a donné des exemples de fonctions continues de x admettant une dérivée pour les valeurs incommensurables de x, n'en admettant pas pour les valeurs commensurables. Il est vrai que les démonstrations de Hankel n'étaient pas toujours à l'abri de toute objection. Depuis, M. P. Du Bois-Reymond, prenant pour point de départ certains résultats obtenus par M. Weierstrass, a publié dans le tome 79 du *Journal de Borchardt* un Mémoire sur le sujet. Dans le tome IV (2ᵉ Série) des *Annales de l'École normale supérieure*, M. Darboux a aussi traité la question, et le *Bulletin* a rendu compte de son travail (t. X, p. 76). Quoique publiés postérieurement à ceux de M. Weierstrass, les résultats de M. Darboux n'en ont pas moins été obtenus indépendamment, ainsi qu'en font foi les dates respectives des deux Mémoires et des Communications de ce géomètre à la *Société mathématique*.

M. Dini détermine une classe générale de fonctions n'admettant point de dérivée, classe qui comprend comme cas particuliers les fonctions étudiées par M. Du Bois-Reymond. Cette classe de fonctions est déterminée par le théorème suivant :

(¹) *Voir* le théorème de Nöther au *Bulletin*, 1873, p. 239. ED. DW.

(²) *Annali di Matematica pura ed applicata*, 2ᵉ Serie, t. VIII, p. 121-137.

« Lorsque les termes $u_n(x)$ de la série $\Sigma u_n(x)$ sont finis et continus dans l'intervalle (a, b), admettent dans cet intervalle une dérivée finie et déterminée lorsque n est fini, sont tels enfin que la somme de la série soit, toujours dans le même intervalle, une fonction finie et continue $f(x)$ de x, cette fonction finie et continue n'aura pas de dérivée déterminée et finie, tout au plus cette dérivée pourra-t-elle être, en certains points, infinie et déterminée quant au signe, étant d'ailleurs, en d'autres points en nombre infini, infinie et indéterminée quant au signe, pourvu que les conditions suivantes soient remplies :

» 1° Les termes $u_n(x)$, dans l'intervalle (a, b), admettent des maxima et des minima en nombre fini, mais croissant indéfiniment avec n, de façon que, à partir d'une valeur n suffisamment grande, ces maxima et minima se succèdent dans tout l'intervalle (a, b) à des distances moindres que toute quantité donnée.

» 2° Soient δ_m la distance maximum entre un maximum et un minimum consécutifs de $u_m(x)$, et D_m le minimum des diverses oscillations de $u_m(x)$ dans l'intervalle (a, b); la quantité $\frac{\delta_m}{D_m}$ a pour limite zéro, pour $m = \infty$.

» 3° La quantité

$$\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_{1}^{m-1} u'_n,$$

où les u'_n sont les maxima des valeurs absolues des dérivées de $u_n(x)$ dans l'intervalle (a, b), ou les limites supérieures de ces valeurs, reste, lorsque m croît indéfiniment, toujours inférieure à l'unité plus une quantité finie, et, en même temps, pour toutes les valeurs de m supérieures à un nombre m' aussi grand qu'on voudra, la différence $u_m(x'+h) - u_m(x')$ a, quel que soit x', le signe de $R_m(x'+h) - R_m(x')$, $R_m(x)$ étant défini par l'égalité

$$R_m(x) = \sum_{m+1}^{\infty} u_n(x),$$

et h étant choisi de façon que $x'+h$ coïncide avec le premier point, à droite ou à gauche de x', qui corresponde à un maximum ou à un minimum de $u_m(x)$, en sorte que l'on ait, en valeur absolue,

$u_m(x'+h) - u_m(x') \geqq \frac{D_m}{2}$; ou, au moins, si cette dernière condition ne se vérifie pas ou se trouve être douteuse, il existe une limite supérieure finie pour les valeurs absolues de $R_m(x'+h) - R_m(x')$, qui correspondent aux diverses valeurs de x' et de h supposé toujours déterminé comme ci-dessus, et, $2R'_m$ étant cette limite supérieure ou un nombre plus grand, la quantité

$$\frac{4\delta_m}{D_m}\sum_1^{m-1} u'_n + \frac{4R'_m}{D_m}$$

reste toujours inférieure à l'unité augmentée d'une quantité finie. »

M. Dini s'est occupé du même sujet dans une Note présentée à l'Académie par M. Cremona (séance du 8 avril 1877). De cette sorte, nous extrayons les résultats qui suivent :

Soit $f(x)$ une fonction finie et continue de x dans l'intervalle (a, b); pour tous les points x contenus dans cet intervalle, en excluant b si $b > a$, le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsque h tendra vers zéro par des valeurs positives, finira par tendre vers une limite déterminée, finie ou infinie (dérivée à droite de x) ou bien finira par osciller entre deux nombres $\lambda_x - \varepsilon$ et $\Lambda_x + \varepsilon$, ε étant une quantité positive aussi petite qu'on voudra, λ_x et Λ_x étant des nombres déterminés finis ou infinis qui, s'ils sont finis, sont, pour une infinité de valeurs de h aussi petites qu'on voudra, aussi voisins qu'on voudra du rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; l'intervalle $\Lambda_x - \lambda_x$, le champ dans lequel, pour ainsi dire, vient osciller le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand h tend vers zéro par des valeurs positives, est ce que l'auteur appelle l'*oscillation de ce rapport :* deux quantités analogues λ'_x et Λ'_x correspondent au cas où l'on fait tendre h vers zéro par des valeurs négatives. Ainsi, au lieu de la dérivée, il y a lieu de considérer les quatre fonctions λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x, qui évidemment se réduisent à une seule quand la dérivée existe.

Dans le cas où λ_x et Λ_x sont finis, on peut toujours écrire, pour h positif et suffisamment petit,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\lambda_x+\Lambda_x}{2} + \theta_{2,h}\left(\frac{\Lambda_x-\lambda_x}{2} + \varepsilon_{x,h}\right),$$

$\varepsilon_{x,h}$ étant une quantité positive ou nulle, pouvant être rendue plus petite que toute quantité donnée quand on fait décroître h indéfiniment, et $\theta_{x,h}$ étant une quantité qui varie continûment entre -1 et $+1$.

J. T.

FERRARIS (G.). — LE PROPRIETÀ CARDINALI DEGLI STRUMENTI DIOTTRICI. — Torino, Hermann Loescher. 1 vol in-8°.

La théorie des lentilles et des instruments d'optique exposée dans les Ouvrages élémentaires suppose toujours que les lentilles sont infiniment minces, en sorte que les formules et les résultats auxquels elle conduit sont éloignés des résultats que donne la pratique. Gauss est le premier qui, dans ses *Dioptrische Untersuchungen* (1840), ait donné une explication complète de l'action des lentilles, en tenant compte de leur épaisseur; mais les calculs de l'illustre mathématicien comportent de nombreuses formules, et leur étude exige des connaissances mathématiques étendues. Depuis, le même sujet a été traité d'après les mêmes méthodes algébriques par Listing (1853), Helmholtz (1856) et Casorati (1872).

Il est évident d'ailleurs que, dans le plus grand nombre des cas, des constructions géométriques, faites de proche en proche, peuvent être substituées au jeu des formules analytiques; aussi la théorie de Gauss a-t-elle été successivement exposée à ce point de vue plus élémentaire par Maxwell (1858), Neumann (1866), Gavarret (1866), Martin (1867), et enfin par Reusch (1870). Ces divers auteurs se sont cependant plutôt attachés au développement de quelques points spéciaux qu'à un exposé absolument général.

Dans le volume que publie aujourd'hui la librairie Loescher, M. Ferraris s'est proposé de donner un exposé tout à fait complet et élémentaire de l'action des lentilles épaisses sur les rayons de lumière; pour cela, il a coordonné avec un soin remarquable les travaux de ses devanciers en modifiant parfois leurs démonstrations, afin de les assujettir à un même mode d'exposition didactique.

Dans un premier Chapitre, M. Ferraris, après avoir exposé les propriétés générales des rayons lumineux homogènes qui traversent vers le centre un système dioptrique quelconque ([1]), démontre, par des considérations exclusivement géométriques, l'existence et les relations qui lient les plans conjugués, les plans focaux, les plans principaux et enfin les points nodaux. Les 64 pages consacrées à cette exposition renferment toute la théorie des lentilles simples.

Après ces préliminaires indispensables, le savant professeur examine la marche des rayons de lumière dans les systèmes optiques composés, comme l'œil humain, et les combinaisons de lentilles qui constituent les microscopes, les lunettes ou les télescopes. L'explication des phénomènes est ici plus complète, tout en restant élémentaire, que lorsqu'on fait abstraction de l'épaisseur des lentilles, et les notions relatives au grandissement, à l'anneau oculaire, au champ et à l'éclairement des images se trouvent naturellement introduites. L'étendue du champ elle-même reçoit alors une définition plus rationnelle que celle qui est le plus ordinairement adoptée : pour M. Ferraris le champ est l'angle du cône qui a pour sommet le premier point principal de l'objectif et qui limite les portions de l'objet visibles simultanément et avec une *clarté uniforme* et maximum. Les formules qui permettent de calculer l'étendue du champ d'une lunette renferment donc le diamètre de l'anneau oculaire ou l'ouverture de l'objectif, et permettent, par suite, d'examiner l'influence de la surface de l'objectif sur la clarté absolue de l'image et l'éclat relatif de ses divers points; leur discussion montre que non-seulement cette clarté augmente avec le diamètre de l'objectif, mais elle fait encore connaître le diamètre que devrait avoir cette lentille pour obtenir avec un grossissement donné la clarté maximum que permet l'ouverture de la pupille.

La grandeur à donner aux diaphragmes et aux œilletons est encore fixée par la condition de limiter le champ à la région de l'image où la clarté est constante, et par le jeu des formules précédemment établies par M. Ferraris. Toutes ces questions, qui n'entrent point dans le cadre ordinaire des Traités d'Optique et qui ne sont en général connues que des seuls constructeurs d'instruments, sont traitées avec tous les détails utiles et avec une clarté d'exposition vraiment remarquable.

([1]) La locution *proprietà cardinali* s'applique aux propriétés des rayons centraux de lumière homogène.

Le volume de M. Ferraris se termine enfin par l'application directe des théories précédentes aux principaux instruments d'optique, le microscope, la lunette astronomique, la lunette terrestre; cette portion de l'Ouvrage renferme, comme la précédente, des paragraphes intéressants pour le physicien ou l'astronome, et où les détails techniques abondent.

Notre conviction est que *Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici* seront consultées avec fruit par tous ceux qui ont le désir de connaître complétement la construction des instruments d'optique.

G. R.

GORDAN und NÖTHER. — UEBER DIE ALGEBRAISCHEN FORMEN, DEREN HESSE'SCHE DETERMINANTE IDENTISCH VERSCHWINDET (1).

Hesse a énoncé dans le tome 42 et dans le tome 56 du *Journal de Crelle* le théorème suivant : « Quand le déterminant des dérivées secondes d'une forme algébrique, entière et homogène à n variables, est identiquement nul, cette forme peut, au moyen d'une transformation linéaire, être ramenée à une forme semblable avec $n-1$ variables. On avait déjà remarqué depuis longtemps que les démonstrations données par Hesse étaient insuffisantes. MM. Gordan et Nöther ont repris le sujet, et, après différentes recherches (on peut comparer le travail de Gordan dans les *Erlanger Berichte* du 2 décembre 1875), sont parvenus à la conclusion suivante : *Le théorème de Hesse est vrai pour les formes à 2, 3, 4 variables, mais non plus pour celles qui ont cinq variables ou davantage.* La forme

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3,$$

où P_1, P_2, P_3 dépendent seulement de x_4, x_5, est un exemple de forme à cinq variables, dont le hessien est identiquement nul, et à laquelle le théorème de Hesse ne s'applique pas.

(1) *Mathematische Annalen*, t. X.

GORDAN (P.). — UEBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA [1].

Il s'agit d'un perfectionnement de la démonstration algébrique donnée par Gauss, de l'existence d'une racine d'une équation entière $f(x) = 0$ à coefficients réels. La démonstration de Gauss est fondée sur l'étude d'une équation dont les racines s'expriment au moyen de la somme et du produit de deux racines de l'équation proposée. M. Gordan étudie la résultante $R(u)$ de $f(x)$ et de $f(x+u)$. Il existe toujours une valeur de u pour laquelle $R(u) = 0$ et pour laquelle $f(x)$ et $f(x+u)$ ont, par conséquent, un facteur commun ; $f(x)$ est donc décomposable en facteurs. Si l'on pose $f(x) = g(x)\,h(x)$, il y a lieu de distinguer deux cas, selon que les coefficients de $g(x)$ et de $h(x)$ sont réels ou imaginaires. Dans tous les cas, la résolution de l'équation $f(x) = 0$ est ramenée à la résolution d'une équation de degré moindre. Si $g(x)$ est imaginaire, u est aussi imaginaire, et, de plus, *purement* imaginaire : dès lors $g\left(x + \frac{2}{u}\right)$ a ses coefficients réels.