Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 1, nº 1 (1877), p. 249-264

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1877_2_1_1_249_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JOUBERT (le P.). — SUR LES ÉQUATIONS QUI SE RENCONTRENT DANS LA THÉORIE DE LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. — Paris, 1876. 1 vol. in-4. 108 p.

L'important Mémoire dont le titre précède a servi au P. Joubert pour obtenir de la Faculté des Sciences de Paris le titre de docteur (août 1876). L'auteur y a spécialement étudié l'éqaution modulaire et celle du multiplicateur.

Considérons une transformation d'ordre n, par laquelle y s'exprime rationnellement en x, définie par l'équation différentielle

$$M\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

les équations dont s'occupe l'auteur relient respectivement au module k le module λ et le multiplicateur M.

Si l'on fait $x=\sin\operatorname{am} z$, que l'on donne à K et iK' le sens habituel, on sait (Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 608) que, en désignant par n' et n'' deux entiers dont le produit est égal à n et par t un entier quelconque, et en posant

$$\Lambda=\frac{K}{n'},\quad i\Lambda'=\frac{iK'+16t\dfrac{K}{n'}}{n''},$$

on a

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\theta_2(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta_3(0,\Lambda,\Lambda')},$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\theta_1(z,\Lambda,\Lambda')}{\theta(z,\Lambda,\Lambda')},$$

$$\frac{1}{M}=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\theta'_1(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta(0,\Lambda,\Lambda')}=n'\frac{\theta_3^2(0,\Lambda,\Lambda')}{\theta_3^2(0,K,K')}.$$

Ces formules servent à l'auteur de point de départ. Les seules transformations propres au degré n sont celles qui correspondent à des combinaisons de trois nombres n', n'', t, sans diviseur commun. Le P. Joubert cherche d'abord le nombre T(n) de ces combinaisons distinctes et, comme l'avait déjà fait M. Königsberger, trouve que l'on a

$$T(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots (a+1)(b+1)(c+1)\ldots,$$

a, b, c, ... désignant les facteurs premiers de n, en sorte que

$$n = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} \ldots.$$

Ce point établi, l'auteur parvient aisément, en se servant des formules données par MM. Briot et Bouquet pour la division des périodes, à représenter par les transcendantes elliptiques les valeurs du module et du multiplicateur de la fonction transformée; il obtient ainsi la formule

$$\theta(z, \Lambda, \Lambda') = \prod_{p=-\frac{n'-1}{2}}^{p=\frac{n'-1}{2}} \prod_{p'=-\frac{n''-1}{2}}^{p'=\frac{n''-1}{2}} \theta(z + 2p\Lambda + 2p'i\Lambda'),$$

et trois autres formules analogues pour les trois autres fonctions θ.

Dans ces formules, les trois nombres n', n'', t, qui déterminent la transformation particulière du degré n que l'on considère, sont immédiatement en évidence; mais la valeur ainsi obtenue pour y n'a pas la forme si élégante que lui donne Jacobi dans les *Fundamenta nova*. L'auteur se propose de revenir à cette forme.

Posant

$$\varpi = \frac{mK + m'iK'}{n},$$

où m et m' sont deux nombres entiers n'ayant aucun facteur commun qui divise n et que l'on peut supposer positifs et inférieurs à n, il montre que, n', n'', t étant donnés, il est possible de trouver des systèmes de deux nombres m, m' tels, que les $n-1$ valeurs deux à deux égales et de signes contraires que, abstraction faite de la valeur obtenue en faisant $p=0$, $p'=0$, l'expression $2p\Lambda + 2p'i\Lambda'$ est susceptible de prendre dans la formule précédente et les formules analogues, coïncident avec

$$\pm 4\varpi,\quad \pm 8\varpi,\quad \pm 12\varpi,\quad \ldots,\quad \pm 4\frac{n-1}{2}\varpi$$

à des multiples près de $2K$ et de $2iK'$; le nombre de ces systèmes est le même que celui des entiers inférieurs à n et premiers avec n, et chacun d'eux permet de mettre les expressions trouvées sous la forme que leur donne Jacobi. Par exemple, la valeur précédemment donnée de $\theta(z, \Lambda, \Lambda')$ devient

$$\theta(z, \Lambda, \Lambda') = A\,\theta(z) \prod_{s=1}^{s=\frac{n-1}{2}} \theta(z + 4s\varpi)\theta(z - 4s\varpi),$$

A étant une constante. Au moyen de cette formule et des trois formules analogues, on obtient immédiatement les valeurs cherchées de y, du module et du multiplicateur.

L'objet principal du travail du P. Joubert, savoir, la formation, pour un nombre impair quelconque n, de l'équation modulaire et de l'équation du multiplicateur, étant ainsi préparé, l'auteur reprend d'abord la démonstration de Sohncke pour établir, dans le cas de n impair quelconque, l'existence de ces équations. Étudiant ensuite spécialement l'équation modulaire, il prouve, en étendant la démonstration donnée par M. Königsberger (1) au cas d'un nombre impair quelconque, avec ou sans diviseur carré, que cette équation est irréductible. De là résultent plusieurs théorèmes qui permettent de réduire beaucoup le nombre des coefficients nécessaires à calculer pour la formation de l'équation modulaire. Le P. Joubert les applique à la formation de l'équation modulaire pour la transformation du neuvième ordre.

Passant à l'équation du multiplicateur, il prouve qu'en changeant k en $\frac{1}{k}$ dans cette équation, celle qui en résulte a pour racines les diverses valeurs de $\frac{Mk}{\lambda}$, et que, en changeant k en k', les racines sont multipliées par $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$; ce dernier résultat est dû à Jacobi. L'équation du multiplicateur est aussi irréductible, ainsi que l'a démontré M. Königsberger; le P. Joubert en donne une démonstration nouvelle : plusieurs propositions permettent de réduire le nombre de coefficients à calculer.

---

(1) *Journal de Borchardt,* t. 62, p. 176.

En outre, Sohncke a donné deux méthodes qui permettent d'obtenir ceux qui restent à déterminer, méthode que rappelle le P. Joubert.

Comme pour l'équation modulaire, la transformation du neuvième ordre sert d'exemple, tant pour la formation même de l'équation du multiplicateur que pour l'application de diverses propriétés relatives aux racines de cette équation. Ainsi, dans ce cas particulier, l'équation se réduit au quatrième degré en prenant pour inconnue $(x-1)^3$.

PRINGSHEIM (H). — TRANSFORMATION ZWEITEN GRADES DER HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ERSTER ORDNUNG (¹).

M. Königsberger a montré (*Journal de Crelle*, t. 67) qu'une fonction ϑ hyperelliptique $\vartheta_\lambda(v'_1, v'_2)$ peut être, par une transformation du second degré, changée en une somme de quatre carrés de fonctions ϑ ou de deux produits de deux fonctions ϑ. L'un ou l'autre cas se présente selon que certains nombres entiers $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, qui jouent un rôle important dans la transformation et qui sont composés avec les caractéristiques m_1^λ, m_2^λ, n_1^λ, n_2^λ de la fonction à transformer $(\vartheta_\lambda v'_1, v'_2)$ et les nombres de transformations du système

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & -\sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ \sigma'_{11} & \sigma'_{22} & -\sigma_{22} & -\sigma_{21} \\ -\rho'_{21} & -\rho'_{22} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ -\rho'_{11} & -\rho'_{12} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{vmatrix},$$

sont, ou non, pairs tous les quatre.

Ainsi, en particulier, le premier mode de transformation conduira à une équation de la forme

$$\text{(I)}\quad \vartheta_\lambda(v'_1, v'_2) = (\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta^2(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2).$$

M. Pringsheim établit d'abord le théorème suivant :

Dans toute transformation du second degré d'une fonction hy-

(¹) *Mathematische Annalen*, t. IX; 1875.

*perelliptique de premier ordre, chaque formule de transformation d'*une *fonction* ϑ *conduit, par la substitution des demi-périodes, à* trois (*et seulement à trois*) *autres formules de transformation.*

La recherche des nombres $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ pour tous les quinze types, dus à M. Hermite, des classes non équivalentes de transformation montre que, pour toute transformation du second degré, il existe quatre indices λ tels que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ soient pairs tous les quatre : ainsi apparaissent quatre transformations de fonctions ϑ de la forme (I). Il suit de là immédiatement que la substitution des demi-périodes dans une formule telle que (I) ne peut conduire *au plus* qu'à trois autres formules de transformation. Cette propriété est évidemment indépendante de l'indice λ et de la forme particulière (I) de la formule de transformation, mais dépend essentiellement des relations entre les arguments v_1, v_2 et v'_1, v'_2 : elle appartient donc à toutes les transformations du second degré. D'un autre côté, on voit facilement que l'emploi de toutes les quinze substitutions de demi-périodes ne peut pas amener moins de trois changements pour l'indice λ; le théorème est donc démontré dans sa généralité : il s'étend aux transformations de degré pair, en excluant seulement le cas où tous les nombres de transformation sont tous divisibles par 2 ou une puissance de 2.

Une autre recherche, liée aux équations de transformation de la forme (I), concerne les relations linéaires homogènes qui existent entre certaines combinaisons de quatre carrés de fonctions ϑ. Dans l'équation (I), le choix des indices n'est soumis qu'à une seule condition, savoir, qu'il n'y ait aucune relation linéaire entre les quatre carrés des fonctions ϑ correspondantes : puis donc qu'on ne peut plus choisir pour α, β, γ, δ les quatre indices de fonctions ϑ impaires, il faut qu'entre les quatre carrés de telles fonctions existe une relation linéaire. Si donc on combine les six fonctions ϑ impaires par quatre, en faisant progresser circulairement les indices, on obtient six équations de la forme

$$(\alpha)\vartheta_\alpha^2(v_1, v_2) + (\beta)\vartheta_\beta(v_1, v_2) + (\gamma)\vartheta_\gamma^2(v_1, v_2) + (\delta)\vartheta_\delta^2(v_1, v_2) = 0,$$

dont on déterminera ensuite les coefficients en remplaçant les arguments par zéro et par les demi-périodes; si maintenant dans chacune des six équations on fait les quinze substitutions possibles des demi-périodes, on obtiendra finalement un groupe de 96 relations linéaires entre les carrés de quatre fonctions ϑ. Ces relations ont été données par Rosenhain dans son *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes*, etc., p. 425, sauf une légère différence dans les notations.

M. Pringsheim traite ensuite un cas particulier des transformations du second degré, où la fonction ϑ hyperelliptique transformée donne un produit de deux fonctions ϑ elliptiques et parvient ainsi à la réduction que Jacobi avait donnée d'une façon purement algébrique (*Journal de Crelle*, t. 8), de certaines intégrales hyperelliptiques à des intégrales elliptiques. La condition nécessaire et suffisante pour que cette séparation de la fonction hyperelliptique transformée en un produit de deux fonctions elliptiques ait lieu est que le module transformé τ'_{12} soit nul, et que, en outre, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$, en vertu de l'équation

$$\vartheta_{14}(v'_1, v'_2, \tau'_{11}, 0, \tau'_{22}) = \vartheta_1(v'_1, \tau'_{11}) \cdot \vartheta_1(v'_1, \tau'_{12})$$

s'annule lorsque les arguments sont nuls. Mais, ainsi que l'a montré M. Königsberger, une fonction paire ϑ transformée ne peut s'annuler pour la valeur zéro des arguments que si elle se présente sous la forme (I); d'un autre côté, pour aucun des quinze types de transformation, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$ ne se met sous cette forme : il en résulte que, pour obtenir des transformations jouissant de la propriété demandée, on doit combiner chaque type de transformation avec des transformations linéaires telles que $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, pour l'indice 14, soit quatre nombres pairs. M. Pringsheim montre ensuite comment on est conduit aisément aux quatre systèmes linéaires qui suivent :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En les combinant ensuite avec les quatre formes fondamentales des quinze types, on obtient quinze nouveaux systèmes de transformations du second degré, satisfaisant à la condition énoncée.

L'équation

$$\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)_{v'_1 = v'_2 = 0} = (\alpha)\vartheta_\alpha^2 + (\beta)\vartheta_\beta^2 + (\gamma)\vartheta_\gamma^2 + (\delta)\vartheta_\delta^2 = 0$$

donne ensuite, pour ces quinze transformations, quinze équations de condition différentes, de la forme

$$\varphi(\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2, \varkappa^2\lambda^2, \varkappa^2\mu^2, \lambda^2\mu^2) = 0,$$

φ étant une fonction linéaire : elles contiennent, en particulier, le cas traité par Jacobi

$$\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2.$$

Pour traiter ce cas et obtenir sous la même forme les résultats donnés par Jacobi, l'auteur ne se sert pas des transformations précédentes, mais bien d'un nouveau système linéaire qui s'en déduit, à savoir

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

par cette transformation, $\vartheta_{14}(v'_1, v'_2)$ prend la forme (I), et l'équation $\vartheta_{14}(0, 0) = 0$ donne la condition $\mu^2 = \varkappa^2\lambda^2$. Calculant ensuite l'expression de la fonction ϑ transformée avec les indices 23, 5, 0, il introduit les intégrales, et exprime les fonctions ϑ à arguments v_1, v_2 et v'_1, v'_2 au moyen des fonctions algébriques correspondantes des limites supérieures des intégrales et des fonctions ϑ à arguments nuls au moyen des modules des intégrales. Les relations algébriques ainsi obtenues, qui sont passablement compliquées, donnent la réduction d'une somme de deux intégrales hyperelliptiques de la forme

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

et de la forme

$$\int_0^{x_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_1^{x_2} \frac{x\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

ou

$$R(x) = x(1-x)(1-\varkappa^2x^2)(1-\lambda^2x^2)(1-\varkappa^2\lambda^2x^2),$$

à une somme de deux intégrales elliptiques de la forme

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.$$

Jacobi donne la réduction d'une seule intégrale hyperelliptique. Il suffit de faire $x_2 = 1$ et $y_2 = -y_1$: on obtient ainsi les résultats mêmes de Jacobi.

VOSS (A.). — DIE LINIENGEOMETRIE IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE FLÄCHEN ZWEITEN GRADES (¹).

Les tangentes à une surface du second degré forment un complexe *spécial :* le premier membre de son équation satisfait à une équation aux dérivées partielles que l'auteur met sous la forme

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = \Delta \Sigma x_i^2,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_6$ sont les six coordonnées d'une droite satisfaisant à l'identité

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

M. Voss étudie les formes quadratiques, à un nombre quelconque de variables, qui satisfont à une telle équation aux dérivées partielles et, en particulier, détermine les *facteurs élémentaires* du déterminant de la forme $f + \lambda \Sigma x^2$. Les deux formes f et φ satisfaisant à l'équation différentielle, on discute dans le même sens les déterminants des trois formes $f + \lambda \Sigma x^2$, $\varphi + \lambda \Sigma x^2$ et $f + \lambda \varphi$. Par les formules ainsi obtenues, on est conduit à la conception du *sextuple polaire* d'une surface du second degré, assemblage de six complexes linéaires, groupés comme les six arêtes d'un tétraèdre polaire. Deux surfaces du second degré données ont en général *un seul* sextuple polaire commun, qui n'est autre chose que leur tétraèdre polaire commun; mais les cas particuliers sont ici bien plus nombreux que ceux qui se présentent dans l'étude de l'intersection de deux surfaces du second degré. F. K.

(¹) *Mathematische Annalen,* t. X; 1876.

ZEUTHEN (H.). — NOTE SUR LES SINGULARITÉS DES COURBES PLANES [1].

On appelle *équivalents plückériens d'une singularité supérieure d'une courbe plane* les quatre nombres des singularités ordinaires qui peuvent les remplacer dans les trois formules de Plücker. Cette détermination étant incomplète, M. Cayley y a ajouté l'équation qui sert à exprimer le genre de la courbe. On obtient ainsi les valeurs des équivalents, que M. Zeuthen appelle *principales*. Or ces valeurs n'indiquent pas toujours les nombres de singularités ordinaires d'une courbe variable d'un système qui sont venues former les singularités supérieures d'une courbe singulière du système. Il faut donc déterminer aussi les autres valeurs des équivalents : cela se fait sans difficulté lorsqu'on connaît les valeurs principales. Pour déterminer celles-ci, M. Zeuthen se sert de résultats trouvés et démontrés par MM. Cayley, Stolz, Halphen et Nöther. Le but de sa Note est de donner à la détermination des équivalents une forme commode pour les applications que l'on trouvera dans un travail suivant du même auteur. F. K.

APPELL (G.). — SUR LES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES GAUCHES ET LE MOUVEMENT HÉLICOÏDAL D'UN CORPS SOLIDE [2]. (30 p.).

Dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences, M. Appell s'est proposé l'étude des cubiques gauches en prenant principalement pour objet de ses recherches les propriétés qui résultent de ce que la cubique gauche est une courbe dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

La première Partie de ce travail est consacrée à la démonstration des propriétés du système des pôles et des plans polaires par rapport à une cubique gauche. Cette démonstration nouvelle est fondée sur cette remarque, que la cubique est une courbe unicursale et que, si l'on appelle λ le paramètre en fonction rationnelle duquel s'expri-

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. X ; 1876.

(2) *Annales de l'École Normale*, 2e série, t. V ; 1876.

ment les coordonnées des points de la courbe, il y a, entre les trois valeurs λ_1, λ_2, λ_3 de ce paramètre correspondantes aux trois points où la courbe est rencontrée par un plan variable passant par un point fixe, une relation de la forme

$$(1) \quad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

La proposition fondamentale de cette théorie, à savoir que les trois points de contact des plans osculateurs menés du point fixe à la cubique sont sur un plan passant par le point, résulte immédiatement de ce que les trois racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + C\lambda + D = 0,$$

obtenue en faisant, dans la relation (1), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, vérifient cette relation (1). La suite des raisonnements dans cette première Partie est présentée de façon à montrer l'analogie qu'il y a entre ces propriétés des cubiques gauches et les propriétés des pôles et polaires dans les sections coniques. Les propriétés ainsi établies des plans et de leurs pôles par rapport à une cubique gauche sont, comme il est connu, identiques aux propriétés des plans et de leurs foyers dans le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, démontrées par M. Chasles. Cette remarque conduit M. Appell à se poser deux problèmes dont la solution constitue la seconde Partie de son travail.

Le premier de ces problèmes consiste, étant donné le mouvement hélicoïdal d'un corps solide, à déterminer les cubiques telles que le foyer de chacun de leurs plans osculateurs coïncide avec le point de contact de ce plan. En prenant pour axe des z l'axe instantané glissant dans le mouvement et en appelant k le rapport de la vitesse de translation à la vitesse angulaire, M. Appell démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe ait la vitesse de chacun de ses points dirigée perpendiculairement au plan osculateur en ce point, est que ses coordonnées vérifient l'équation différentielle

$$(2) \qquad x\,dy - y\,dx + k\,dz = 0,$$

qui exprime que la vitesse d'un point de la courbe est perpendiculaire à la tangente. Cette équation, appliquée aux cubiques gauches, donne pour équations générales les cubiques cherchées

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$

$$k(z - z_0) = xy_0 - yx_0 + h\left(\frac{c - b}{\lambda - a} + \frac{a - c}{\lambda - b} + \frac{c - a}{\lambda - c}\right),$$

avec les conditions

$$\frac{BC' - CB'}{(b - c)^2} = \frac{CA' - AC'}{(c - a)^2} = \frac{AB' - BA'}{(a - b)^2} \doteq h,$$

qui expriment que les points d'inflexion de la projection de la courbe sur le plan des xy sont à l'infini.

Le second problème consiste, étant donnée une cubique gauche, à déterminer le mouvement hélicoïdal correspondant. En écrivant les équations de la cubique sous la forme

$$x = \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c},$$

$$y = \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c},$$

$$z = \frac{A''}{\lambda - a} + \frac{B''}{\lambda - b} + \frac{C''}{\lambda - c},$$

et en appelant v_x, v_y, v_z les composantes de la vitesse de translation suivant les axes, p, q, r celles de la vitesse angulaire, M. Appell trouve

$$v_x = (B'C'' - C'B'')(c - b) + (C'A'' - A'C'')(a - c) + (A'B'' - B'A'')(b - a),$$
$$p = A(c - b)^2 + B(a - c)^2 + C(b - a)^2,$$

et d'autres formules analogues pour les autres projections.

M. Appell termine son travail par l'exposition de quelques propriétés générales des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

MÉLANGES.

NOTE RELATIVE AUX FORMES BINAIRES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. JULES TANNERY.

Considérant deux équations en x du $n^{\text{ième}}$ degré

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

l'équation en λ du $2n - 2^{\text{ième}}$ degré

$$F(\lambda) = 0,$$

obtenue en écrivant que l'équation en x

$$\lambda\varphi(x) + \psi(x) = 0$$

a une racine double, aura pour racines les valeurs que prend $-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ ou $-\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$, quand on y remplace x par les $2n - 2$ racines de l'équation

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = 0,$$

$\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ désignant les dérivées de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$. Or, si les deux équations proposées

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0$$

ont une racine commune, cette racine commune annule

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x)$$

et sa dérivée

$$\varphi(x)\psi''(x) - \psi(x)\varphi''(x),$$

et, par suite, l'équation en x,

$$\varphi(x)\psi'(x) - \psi(x)\varphi'(x) = 0,$$

et l'équation en λ,

$$F(\lambda) = 0,$$

ont une racine double : il suit de là que les discriminants de ces deux équations doivent contenir en facteur le résultant des deux équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. Dans le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont du second degré, les deux discriminants coïncident avec le résultant :

je me suis proposé d'effectuer les calculs dans le cas de deux équations du troisième degré, et de mettre en évidence le second facteur qui, pour le discriminant de l'équation en λ, se trouve être un cube parfait.

La condition pour que l'équation

$$(1)\quad \lambda(a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3)+(a'_0x^3+3a'_1x^2+3a'_2x+a'_3)=0$$

ait une racine double est

$$(2)\qquad \alpha\lambda^4+\beta\lambda^3+\gamma\lambda^2+\delta\lambda+\varepsilon=0,$$

en faisant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 4wv+u^2,\\ \beta &= 4w\eta+4v\zeta+2u\xi,\\ \gamma &= 4wv'+4w'v+4\eta\zeta+\xi^2+2uu',\\ \delta &= 4w'\eta+4v'\zeta+2u'\xi,\\ \varepsilon &= 4w'v'+u'^2,\end{aligned}\right.$$

où l'on suppose

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u &= a_0a_3-a_1a_2, \quad u'=a'_0a'_3-a'_1a'_2,\\ v &= a_1a_3-a_2^2, \quad v'=a'_1a'_3-a'^2_2,\\ w &= a_1^2-a_0a_2, \quad w'=a'^2_1-a'_0a'_2,\\ \xi &= a_0a'_3+a'_0a_3-a'_1a_2-a_1a'_2,\\ \eta &= a_1a'_3+a'_1a_3-2a_2a'_2,\\ \zeta &= 2a_1a'_1-a_0a'_2-a'_0a_2.\end{aligned}\right.$$

Le discriminant de l'équation (2) s'exprime, comme on le sait, au moyen des deux invariants i et j, définis par les égalités

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 6i &= 12\alpha\varepsilon-3\beta\delta+\gamma^2,\\ 72j &= 72\alpha\gamma\varepsilon+9\beta\gamma\delta-2\gamma^3-27(\alpha\delta^2+\varepsilon\beta^2),\end{aligned}\right.$$

et que je me propose de calculer.

Pour cela, je ferai

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a &= 2(a_1a'_2-a'_1a_2),\\ a' &= 2(a_0a'_1-a'_0a_1),\\ a'' &= 2(a_2a'_3-a'_2a_3),\\ b &= a_1a'_2-a_2a'_1-a_0a'_3+a'_0a_3,\\ b' &= a_1a'_3-a'_1a_3,\\ b'' &= a_2a'_0-a'_2a_0;\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \begin{cases} A = a'a'' - b^2, & B = b'b'' - ab, \\ A' = aa'' - b'^2, & B' = bb'' - a'b', \\ A'' = aa' - b''^2, & B'' = bb' - a''b'', \\ \Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2. \end{cases}$$

Les fonctions des huit coefficients a_0, a_1, ..., a'_0, a'_1, ..., que définissent les égalités précédentes, sont liées entre elles par plusieurs identités simples, parmi lesquelles je citerai les suivantes :

$$(8)\quad A + 4B + (a+b)^2 = 0,$$

$$(9)\quad \begin{cases} A = 4uu' - \xi^2, & B = 2wv' + 2w'v - \eta\zeta, \\ A' = 4vv' - \eta^2, & B' = 2wu' + 2w'u - \xi\zeta, \\ A'' = 4wv' - \zeta^2, & B'' = 2vu' + 2v'u - \xi\eta; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} a\xi + b''\eta + b'\zeta = 2(wv' - w'v), \\ b''\xi + a'\eta + b\zeta = 2(uw' - u'w), \\ b'\xi + b\eta + a''\zeta = 2(vu' - v'u); \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} au + b''v + b'w = w\eta - v\zeta, \\ b''u + a'v + bw = u\zeta - w\xi, \\ b'u + bv + a''w = v\xi - u\eta; \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} au' + b''v' + b'w' = v'\zeta - w'\eta, \\ b''u' + a'v' + bw' = w'\xi - u'\zeta, \\ b'u' + bv' + a''w' = u'\eta - v'\xi; \end{cases}$$

$$(13)\quad a\xi^2 + a'\eta^2 + a''\zeta^2 + 2b\eta\zeta + 2b'\xi\zeta + 2b''\xi\eta + \Delta = 0.$$

Toutes ces identités se vérifient très-aisément, sauf la dernière, en remplaçant les diverses quantités qui y entrent par leurs valeurs en fonction des huit coefficients a_0, a_1, ..., a'_0, a'_1, ... Quant à la dernière, on la déduit des identités (10) ou (11), par l'élimination des quantités u, v, w, ou u', v', w'.

Je reviens maintenant au calcul des deux invariants i et j, qui s'expriment tous les deux, ainsi que le résultant R des deux équations

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$
$$a'_0x^3 + 3a'_1x^2 + 3a'_2x + a'_3 = 0,$$

au moyen des six quantités a, a', a'', b, b', b''. Les quantités α, β, γ, δ, ε sont exprimées par les équations (3) en fonctions de u, v, w,

u', v', w', ξ, η, ζ : on reconnaît de suite que, en se servant des égalités (9), on peut éliminer u, v, w, u', v', w' de γ et des produits $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$; dès lors on pourra exprimer i au moyen de A, A', A'', B, B', B'', ξ, η, ζ. Or il arrive que, en effectuant les calculs, ces trois dernières quantités disparaissent d'elles-mêmes, et que l'on trouve

$$6i = (A - 2B)^2 + 12(A'A'' + B'B'').$$

En vertu d'identités bien connues, on peut remplacer respectivement A'A'' et B'B'' par $\Delta a + B^2$ et $\Delta b + AB$; on obtient ainsi

$$6i = (A + 4B)^2 + 12\Delta(a + b),$$

ou, en vertu de l'égalité (8),

$$6i = (a + b)[12\Delta + (a + b)^3]. \tag{14}$$

On calculera j d'une façon analogue, c'est-à-dire qu'au moyen des identités (9) on cherchera à l'exprimer en fonction des quantités A, A', A'', B, B', B'', ξ, η, ζ. La valeur des trois premiers termes qui entrent dans la valeur donnée plus haut de $72j$,

$$72j = 72\alpha\varepsilon\gamma + 9\beta\delta\gamma - 2\gamma^3 - 27(\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2),$$

s'obtiendra immédiatement en utilisant les valeurs de $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$ et γ dont on a eu besoin pour le calcul de i; quant au calcul de $\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2$, on l'abrégera en se servant de l'identité suivante, qui résulte immédiatement des égalités (3) :

$$\begin{aligned}\alpha\delta^2 + \varepsilon\beta^2 = {} & 4(w\delta + w'\beta)(v\delta + v'\beta) \\ & + (u\delta + u'\beta)^2 - 2\beta\delta(2wv' + 2w'v + uu').\end{aligned}$$

On aperçoit, en effet, qu'au moyen des identités (9) il est facile d'éliminer u, v, w, u', v', w' des quantités $w\delta + w'\beta$, $v\delta + v'\beta$, $u\delta + u'\beta$, $2wv' + 2w'v + uu'$; on parviendra ainsi, et sans autres réductions que celles qui se présentent d'elles-mêmes dans la suite des calculs, à la valeur suivante :

$$\begin{aligned}36j = {} & 54[(A'A'' - B^2)\xi^2 + (AA'' - B'^2)\eta^2 + (AA' - B''^2)\zeta^2 \\ & + 2(B'B'' - AB)\eta\zeta + 2(BB'' - A'B')\xi\zeta + 2(BB' - A''B'')\xi\eta] \\ & + (A - 2B)^3 - 36(A - 2B)(A'A'' + B'B'') - 54AB^2 \\ & + 54A(A'A'' + B'B''),\end{aligned}$$

qui, en se servant des identités

$$A'A'' - B^2 = \Delta a, \text{ etc.}$$

et de l'identité (13), se réduit à

$$36j = -54\Delta^2 + 18(A + 4B)(a + b)\Delta + (A + 4B)^3,$$

ou finalement, en vertu de l'identité (8),

$$(15) \qquad 36j = -[54\Delta^2 + 18\Delta(a + b)^3 + (a + b)^6].$$

D'après cela, le discriminant de l'équation en λ est

$$(16) \qquad i^3 - 6j^2 = \frac{-\Delta^3}{2}[27\Delta + 2(a + b)^3].$$

Le facteur $27\Delta + 2(a + b)^3$ n'est autre que le résultant des deux équations

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0,$$
$$a'_0 x^3 + 3a'_1 x^2 + 3a'_2 x + a'_3 = 0,$$

ainsi qu'on le reconnaît de suite, en formant le résultant d'après la règle de Bézout; les éléments du déterminant du troisième ordre que l'on forme d'après cette règle s'expriment immédiatement au moyen de a, a', a'', b, b', b'', et, en développant, on arrive sans peine à le mettre sous la forme indiquée.

D'après ce que j'ai dit en commençant, ce résultant doit aussi se mettre en facteur dans le discriminant de l'équation

$$\begin{vmatrix} a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2, & a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 \\ a'_0 x^2 + 2a'_1 x + a'_2, & a'_1 x^2 + 2a'_2 x + a'_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$a' x^4 - 4b'' x^3 + (4a - 2b)x^2 + 4b' x + a'' = 0.$$

Ici les calculs sont beaucoup plus aisés; on trouve facilement

$$i = \frac{2}{3}(a + b)^2, \qquad j = \frac{2[(a + b)^3 + 27\Delta]}{9},$$

$$i^3 - 6j^2 = -8\Delta[27\Delta + 2(a + b)^3].$$