A. MAYER

Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales, et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 87-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__87_0>

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES ABSOLUMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES, ET SUR L'INTÉGRATION SIMULTANÉE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES [1];

Par M. A. MAYER, à Leipzig.

Toute équation linéaire aux différentielles partielles du premier ordre est équivalente à un certain système d'équations différentielles ordinaires. De la même manière, il existe, entre les systèmes d'équations linéaires aux différentielles partielles du premier ordre, admettant une solution commune, et certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, une dépendance réciproque facile à reconnaître, qui, du reste, a déjà été plusieurs fois remarquée et utilisée dans des cas spéciaux, par exemple dans la méthode d'Ampère pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre qui ont une intégrale intermédiaire.

Soient, en effet, les $m-1$ équations simultanées aux dérivées partielles

$$\text{(I)} \qquad A_1(f)=0, \quad A_2(f)=0, \ldots, \quad A_{m-1}(f)=0,$$

dans lesquelles on a, en général,

$$A_\iota(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+a^\iota_m\frac{\partial f}{\partial x_m}+\ldots+a^\iota_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

les coefficients a^ι_k étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si ces équations admettent une solution commune f, cette solution sera toujours, en même temps, et quelles que soient les fonctions arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une solution de l'équation linéaire aux différentielles partielles

$$\lambda_1 A_1(f)+\lambda_2 A_2(f)+\ldots+\lambda_{m-1}A_{m-1}(f)=0,$$

et, par conséquent, en l'égalant à une constante arbitraire, f sera une intégrale des $n-1$ équations différentielles ordinaires

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{m-1} : dx_m : \ldots : dx_n$$
$$= \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_{m-1} : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a_m^h : \ldots : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a_n^h,$$

et partant aussi une intégrale des $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales

$$(\mathrm{II}) \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \, dx_h, \quad (k = m, m+1, \ldots, n),$$

que l'on obtient par l'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ entre les précédentes, et l'on voit immédiatement que, réciproquement, si les équations (II) admettent une intégrale $f =$ const., c'est-à-dire s'il existe une fonction f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont la différentielle s'annule identiquement en vertu des seules équations (II), cette fonction est une solution commune des équations (I).

Le problème de trouver une solution commune des $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles (I) est, d'après cela, identique avec le problème de trouver une intégrale des $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales (II). En conséquence, on doit s'attendre à ce que toute méthode conduisant à l'intégration des équations (II) devra aussi contenir le germe d'une méthode d'intégration pour les équations (I). C'est cette idée qui a donné lieu aux recherches suivantes, dont le but principal est de trouver une voie par laquelle on puisse arriver, par le moindre nombre possible d'intégrations, à trouver une solution commune de plusieurs équations linéaires simultanées aux différentielles partielles du premier ordre d'une même fonction inconnue.

On peut d'ailleurs introduire préalablement une simplification importante. En effet, ainsi que l'a fait voir Clebsch [1], tout système d'équations aux différentielles partielles de cette forme, qui admet généralement une solution commune, pouvant se ramener à

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 65, p. 257.

un système *jacobien*, c'est-à-dire, en particulier, à un système de la forme (I), dans lequel les opérations A satisfont aux $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ identités suivantes :

$$\text{(III)} \qquad A_i[A_k(f)] - A_k[A_i(f)] = 0,$$

il suffit alors de considérer les systèmes d'équations aux différentielles totales dont les coefficients satisfont aux conditions qui résultent des identités (III).

Ces systèmes jouissent de la propriété d'être satisfaits par $n - m + 1$ intégrales, et l'on peut d'abord montrer que leur intégration revient à l'intégration complète de $m - 1$ systèmes chacun de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, comme l'a déjà remarqué M. Natani ([1]), dans l'hypothèse d'un système d'équations aux différentielles totales admettant le nombre indiqué d'intégrales.

Mais, par une transformation des équations données, pareille à celle qui a servi à M. P. du Bois-Reymond pour ramener les équations linéaires aux différentielles totales intégrables par une seule équation à une seule équation différentielle ordinaire du premier ordre, entre deux variables ([2]), on peut faire en sorte que l'intégration du premier de ces $m - 1$ systèmes suffise déjà pour l'intégration des équations données, ce qui ramène en même temps la solution complète du système jacobien équivalent à l'intégration complète d'un seul système de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Il en résulte enfin, ce qui est beaucoup plus important dans les applications, que, pour la détermination d'une solution commune du système jacobien, il n'est indispensable de connaître qu'une seule intégrale de ce système d'équations différentielles ordinaires; ainsi, par exemple, le nombre d'intégrales dont on a besoin pour la solution complète d'une équation non linéaire aux différentielles partielles du premier ordre est, abstraction faite de la première, égale précisément à la moitié du nombre d'intégrales dont la connaissance était nécessaire dans la meilleure des anciennes méthodes, celle de Weiler et Clebsch ([3]).

([1]) *Journal de Crelle*, t. 58, p. 30.
([2]) *Journal de Crelle*, t. 70, p. 312.
([3]) *Journal de Crelle*, t. 65, p. 263.

§ I.

Conditions d'integrabilite absoluê.

On est conduit aux systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, que nous considérerons exclusivement dans ce qui va suivre, en égalant à des constantes arbitraires $n-m+1$ fonctions quelconques, indépendantes entre elles, de n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$, et prenant les différentielles totales des équations ainsi obtenues.

La résolution des équations dérivées par rapport à $n-m+1$ des n différentielles donne $n-m+1$ équations différentielles simultanées de la forme

$$(1) \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h dx_h, \quad (k = m, m+1, \ldots, n),$$

dans lesquelles a_k^h sont des fonctions données de toutes les n variables, et auxquelles, par suite de leur mode de formation, on pourra satisfaire en prenant pour $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ des fonctions convenables des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, fonctions qui contiendront encore de plus $n-m+1$ constantes arbitraires. Pour pouvoir m'exprimer plus brièvement, je donnerai à un tel système d'équations linéaires aux différentielles totales (1) le nom de *système absolument intégrable.*

Étant proposé, réciproquement, un système d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme (1), on peut se demander d'abord sous quelles conditions il sera absolument intégrable, et ensuite, quand ces conditions sont remplies, comment on pourra l'intégrer.

Pour qu'il existe $n-m+1$ fonctions $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ satisfaisant identiquement aux équations données (1), il faut que, h et i désignant deux nombres quelconques, différents entre eux, de la suite $1, 2, \ldots, m-1$, on ait, pour ces fonctions,

$$(2) \qquad \frac{\partial x_k}{\partial x_h} = a_k^h, \quad \frac{\partial x_k}{\partial x_i} = a_k^i,$$

et par suite, en indiquant par la caractéristique d que, dans la différentiation, $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ doivent être considérés comme des fonctions de x_h et de x_i, pour lesquelles ont lieu les relations (2), il faut que l'on ait

$$\frac{da_k^h}{dx_i} - \frac{da_k^i}{dx_h} = 0,$$

c'est-à-dire que ces fonctions satisfassent aux équations

$$(3) \qquad \frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0.$$

Si l'on emploie la notation $A_i(f)$ pour désigner généralement l'opération

$$(4) \qquad A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

les équations (3) pourront s'écrire plus simplement de cette manière :

$$(5) \qquad A_i(a_k^h) - A_h(a_k^i) = 0.$$

Ces conditions, au nombre de $\frac{(n-m+1)(m-1)(m-2)}{2}$, doivent être satisfaites, d'après cela, par les fonctions $x_m, \ldots, x_n$ des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_{m-1}$, qui résolvent les équations (1). Mais si, comme on le suppose ici, ces fonctions doivent contenir $n-m+1$ constantes arbitraires, cela ne pourra avoir lieu que si ces conditions sont déjà identiques par elles-mêmes.

La vérification identique des relations (3) ou (5) est donc nécessaire dans tous les cas pour que les équations (1) soient absolument intégrables. Cette condition est, de plus, suffisante, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, où l'on montrera comment, dans la supposition des identités (3), on peut déterminer $x_m, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_{m-1}$ et de $n-m+1$ constantes arbitraires, de manière à satisfaire identiquement aux équations (1).

En attendant, je ferai encore remarquer que, comme on a, en vertu de (4),

$$\mathrm{A}_i[\mathrm{A}_k(f)] - \mathrm{A}_k[\mathrm{A}_i(f)] = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} [\mathrm{A}_i(a_\lambda^k) - \mathrm{A}_k(a_\lambda^i)] \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

les identités (5) entraîneront aussi les suivantes :

$$(6) \qquad \mathrm{A}_i[\mathrm{A}_k(f)] = \mathrm{A}_k[\mathrm{A}_i(f)],$$

qui ont lieu pour toute fonction f, et qui, réciproquement, peuvent remplacer les conditions (5).

§ II.

Reduction du système (1), lorsque les relations (3) ont lieu identiquement, à $m-1$ systèmes de $n-m+1$ equations differentielles ordinaires du premier ordre.

Lorsqu'on a en général $n-m+1$ fonctions $x_m, \ldots, x_n$ des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_{m-1}$ satisfaisant aux équations (1), elles devront d'abord satisfaire aux $n-m+1$ équations

$$(7) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial x_1} = a_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = a_{m+1}^1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = a_n^1.$$

Ces équations, dans lesquelles $x_2, \ldots, x_{m-1}$ n'entrent que comme des constantes, forment un système de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires entre $x_m, \ldots, x_n$ et x_1.

Si donc les équations

$$(8) \quad \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = c_\lambda, \quad (\lambda = m, m+1, \ldots, n)$$

sont $n-m+1$ intégrales de ce système, indépendantes les unes des autres, les solutions $x_m, \ldots, x_n$ des équations (1) doivent être contenues dans les équations (8), dans lesquelles les constantes d'intégration c_λ ne peuvent dépendre que de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Les équations (8), étant les intégrales complètes du système (7), peuvent être toujours résolues par rapport à $x_m, \ldots, x_n$. On peut donc utiliser ces relations pour introduire $c_m, \ldots, c_n$ comme de nouvelles variables à la place de $x_m, \ldots, x_n$.

Des équations (8) on tire, en différentiant complétement, et substituant les valeurs données par les équations (1),

$$dc_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_k}\right) dx_h.$$

Or ici le coefficient de dx_1 est identiquement nul, puisque les équations (8) sont, par hypothèse, des intégrales du système (7). En faisant usage de la notation (4), il restera donc simplement

$$dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} \mathrm{A}_h(\varphi_\lambda)\, dx_h.$$

De ces $n-m+1$ équations, dans les seconds membres desquelles on remplacera $x_m, \ldots, x_n$ par leurs valeurs résultant des équations (8), on devra tirer les nouvelles variables $c_m, \ldots, c_n$.

Mais, pour que les équations (8) continuent à être des intégrales du système (7), il faudra que les c_λ deviennent indépendants de x_1; donc x_1 ne devra pas entrer dans les équations (9).

C'est en effet ce qui a lieu; car, comme on a, d'après (6),

$$\mathrm{A}_1[\mathrm{A}_h(\varphi_\lambda)] = \mathrm{A}_h[\mathrm{A}_1(\varphi_\lambda)]$$

et

$$\mathrm{A}_1(\varphi_\lambda) = 0,$$

il en résulte que $f = \mathrm{A}_h(\varphi_\lambda)$ est aussi une solution de l'équation $\mathrm{A}_1(f) = 0$; autrement, $\mathrm{A}_h(\varphi_\lambda) =$ const. est une intégrale du système (7). Aussi, lorsqu'on aura substitué pour $x_m, \ldots, x_n$ leurs valeurs provenant des intégrales (8), les expressions $\mathrm{A}_h(\varphi_\lambda)$ seront indépendantes de x_1

Les équations (9) sont donc toutes indépendantes de x_1, et *ne peuvent par conséquent pas changer, quelle que soit la valeur que l'on y attribue à cette variable.*

Le système donné (1) est maintenant ramené au système (9), qui contient encore $m-2$ variables indépendantes. Ce dernier système ne peut évidemment être établi en général [c'est-à-dire tant que l'on ne précise pas davantage le système d'intégrales des équations (7) au moyen duquel les quantités c_λ ont été introduites comme constantes d'intégration] qu'après que l'on a trouvé ces intégrales. Mais, si l'on prend pour les c_λ un système déterminé de constantes d'intégration des équations (7), savoir les valeurs initiales des variables dépendantes, on obtient le grand avantage de pouvoir former les équations (9) avant toute intégration.

On peut reconnaître ce fait directement sur les équations (9); mais il se manifeste plus clairement encore quand on prend pour point de départ un autre système d'équations équivalent au système (9).

Désignons par

$$(10) \qquad x_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n)$$

les résultats que l'on obtient en résolvant les intégrales (8) suivant $x_m, \ldots, x_n$, ou les solutions complètes des équations différentielles (7). Si l'on introduit directement, au moyen des équations (10), les quantités c_λ comme nouvelles variables dépendantes dans les équations (1), on aura maintenant, pour déterminer les c_λ, les équations

$$(11) \qquad \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial\psi_k}{\partial c_\lambda} dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial\psi_k}{\partial x_h}\right) dx_h,$$

dans lesquelles on devra exprimer aussi, à l'aide des substitutions (10), les a_k^h au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n$, et par la formation desquelles on aura gagné ceci, que ces substitutions rendront identiques les équations

$$a_k^1 - \frac{\partial\psi_k}{\partial\psi_h} = 0.$$

Si l'on résout ces $n - m + 1$ équons paitar rapport à $dc_m, \ldots, dc_n$, on devra retomber sur les équations (9). On pourra donc remplacer ces dernières par les équations (11), et comme, d'après ce qui précède, les équations (9) ne contiennent pas x_1, il sera permis d'*attribuer directement, dans les équations* (11), *avant même de les résoudre, à la variable* x_1 *une valeur arbitraire,* pour laquelle ces équations restent encore résolubles.

Cela établi, soient maintenant

$$(12) \qquad x_k = \chi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0)$$

les solutions complètes des équations (7), exprimées au moyen de x_1 et des valeurs $x_m^0, \ldots, x_n^0$ des variables dépendantes $x_m, \ldots, x_n$, qui correspondent à la valeur initiale x_1^0 de x_1. Cette valeur initiale x_1^0 peut être choisie arbitrairement; seulement il faut, pour que les valeurs correspondantes des variables dépendantes restent arbitraires, qu'aucune des quantités a_k^1 ne puisse, pour cette valeur, devenir infinie ou indéterminée. Les expressions χ_k, représentant les valeurs qui résultent pour les variables x_k de la résolution des équations suivantes, conséquences des intégrales (8),

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = \varphi_l(x_1^0, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0),$$

ont alors la propriété de se réduire à x_k^0 pour $x_1 = x_1^0$.

Par conséquent, si, dans le système

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda^0} dx_\lambda^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \chi_k}{\partial x_h}\right) dx_h,$$

qui se déduit de (1) quand on introduit par les substitutions (12), comme nouvelles variables, à la place des quantités $x_m, \ldots, x_n$, leurs valeurs initiales $x_m^0, \ldots, x_n^0$, x_1 pouvant d'ailleurs prendre, d'après ce qui précède, une valeur quelconque, on pose $x_1 = x_1^0$; il se réduit au suivant :

$$(13) \qquad dx_k^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} a_k^{h0} dx_h,$$

dans lequel a_k^{h0} représente ce que devient a_k^h lorsqu'on remplace les quantités $x_1, x_m, \ldots, x_n$ par $x_1^0, x_m^0, \ldots, x_n^0$.

C'est à l'aide de ces $n - m + 1$ équations (13), qui peuvent être établies, comme on le voit, avant toute intégration du système (7), que l'on déterminera les valeurs initiales, considérées comme des fonctions de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Les équations (13) forment un nouveau système tout à fait semblable aux équations données (1), seulement avec une variable indépendante x_1 de moins; car, puisque, par hypothèse, on a identiquement

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{dx_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0,$$

on a aussi identiquement

$$\frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^{i0} \frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_\lambda^0} - a_\lambda^{h0} \frac{\partial a_k^0}{\partial x_\lambda^0} \right) = 0.$$

Le système (13) remplit donc aussi les conditions de l'intégrabilité absolue. On pourra, par conséquent, opérer sur ce second système exactement comme sur le système donné, c'est-à-dire que l'on pourra, par l'intégration d'un second système de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, le ramener à un système complétement intégrable, ne contenant plus que $m - 3$ variables indépendantes, et ainsi de suite; de sorte que finalement, après l'intégration de $m - 1$ systèmes, chacun de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, et pouvant chacun s'établir et se traiter indépendamment des autres, on parviendra à l'intégration complète du système donné (1), et l'on obtiendra, par un système récurrent de formules, $x_m, \ldots, x_n$ au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et des $n - m + 1$ constantes arbitraires du dernier de ces $m - 1$ systèmes.

(*A suivre.*)