Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 7-27

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__7_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

GLAISHER (J.-W.-L.), Reporter. — REPORT OF THE COMMITTEE ON MATHEMATICAL TABLES, consisting of Prof. A. Cayley, Prof. G.-G. Stokes, Prof. sir W. Thomson, Prof. H.-J.-S. Smith, Mr. J.-W.-L. Glaisher. — London, 1873. Printed by Taylor and Francis, in-8°, 175 p.

Un astronome viennois, qui a visité les États-Unis pendant l'été de 1873, rapporte qu'il a vu, dans le jardin d'un Observatoire (l'Observatoire Dudley, à Albany), une machine à calculer suédoise occupée à calculer des Tables de réfraction sous l'impulsion d'un moulin à vent. Ce simple fait ouvre toute une perspective d'avenir : c'est peut-être pour les Sciences mathématiques un pas comparable à celui qui a été fait en industrie par l'introduction des machines-outils. Les Tables de toutes sortes qui nous épargnent la peine de calculer dans chaque cas les valeurs numériques des diverses fonctions ne sont autre chose que des machines d'une espèce particulière ; mais ces machines ne sont encore ni assez nombreuses ni assez puissantes, et cela sans doute parce qu'elles coûtent trop cher à construire. C'est pourquoi il faut nous réjouir de voir surgir des inventions qui permettent de les *fabriquer* plus vite et à moins de frais.

Lorsqu'on songe à l'immense quantité de matériaux accumulés depuis près d'un siècle par le zèle des observateurs, matériaux qui vieillissent et perdent chaque jour en valeur en attendant qu'on puisse les réduire et les discuter, on ne peut en effet s'empêcher de souhaiter que le travail de ces réductions soit simplifié et rendu abordable par la construction de Tables appropriées. Jusqu'à présent les Tables auxiliaires en usage parmi les astronomes, les météorologistes, les physiciens, ne sont guère encore que des outils primitifs, qui permettent d'aller plus vite en besogne, mais qui sont loin d'épargner les calculs. Que de chiffres à remuer, par exemple, pour réduire le lieu apparent d'une étoile à son lieu moyen ou réciproquement ! Que d'opérations à faire, tout en nous aidant des Tables connues, pour nous débarrasser des effets de la précession, de la nutation, de l'aberration, puis de la réfraction et du mouvement propre, et parfois de la parallaxe annuelle ! Quelle perte de temps et quelle source d'erreurs que ces opérations multiples et fastidieuses !

Évidemment les Tables auxiliaires auraient besoin d'être spécialisées davantage ; le temps et le travail qu'on y consacrerait seraient regagnés au centuple par l'économie de temps et d'argent qui en résulterait pour la réduction des observations.

D'un autre côté, que de fonctions dont l'analyse a découvert et développé les admirables propriétés attendent, pour devenir vraiment utiles, pour obtenir droit de cité dans les bureaux de calcul, que des Tables suffisamment étendues et commodes permettent d'en faire couramment usage !

Le moment est donc venu, ce semble, de faire l'inventaire général de ce qu'on possède en matière de Tables, de déterminer ce qui reste à faire et surtout ce qui est urgent, puis d'attaquer résolûment la confection des Tables que les besoins de la Science réclament aujourd'hui.

C'est ce qu'a compris l'Association Britannique pour l'avancement des Sciences, et c'est de cette préoccupation qu'est né un premier Rapport présenté à l'Association en 1872, à la réunion de Brighton, par une Commission composée de MM. Cayley, Stokes, Thomson, Smith, membres de la Société Royale de Londres, et de M. J.-W.-L. Glaisher, rapporteur.

Ce Rapport, qui a été imprimé en 1873, après avoir reçu quelques développements nouveaux, remplit 175 pages ; il n'y est encore question que des Tables mathématiques proprement dites, qui sont d'un usage énéral dans toutes les branches des Mathématiques pures ou appliquées. Très-concis, très-substantiel, il entre en matière sans préambule : « La Commission a été nommée en vue d'un double objet : 1° former un Catalogue aussi complet que possible des Tables mathématiques qui existent ; 2° réimprimer ou construire les Tables qui seraient nécessaires aux progrès des Sciences mathématiques ».

Les Rapports du Comité des Tables paraîtront dans le Compte rendu annuel des réunions de l'Association Britannique ; mais pour les Tables on a décidé qu'elles seraient imprimées à part, et livrées à la publicité au fur et à mesure de leur impression. Comme elles sont stéréotypées, les clichés de ces Tables restent entre les mains du Comité, qui se propose de les réunir plus tard en volume. Le format choisi est l'in-4° des *Transactions Philosophiques* de la Société Royale ; il permettra de donner sur la même page les valeurs des fonctions et jusqu'aux trois premières différences.

On voulait d'abord commencer par l'impression des Tables d'exponentielles ou antilogarithmes hyperboliques (e^x et e^{-x}) et des sinus et cosinus hyperboliques, dont M. Glaisher avait entrepris la construction avant la nomination du Comité. On se proposait ensuite d'aborder le calcul des fonctions de Bessel et des fonctions elliptiques ; mais on a préféré ajourner les fonctions hyperboliques pour permettre à M. Glaisher de consacrer tout son temps à l'achèvement des Tables des fonctions elliptiques, dont la publication a paru plus urgente.

Dresser l'inventaire complet des Tables numériques déjà existantes était avant tout chose indispensable ; car ces Tables sont éparpillées dans les divers Recueils spéciaux, dans les publications des nombreuses Sociétés savantes, etc., et il n'est pas facile de s'assurer, dans chaque cas particulier, si telle Table qu'il paraît utile de faire construire n'a pas été déjà publiée quelque part. Si, dans toutes les parties de la Science, il est malaisé de savoir exactement ce qui a été déjà fait, ici la difficulté est encore augmentée par cette circonstance, que souvent le titre que portent certaines Tables en cache la véritable nature, ou du moins ne suffit pas pour la faire deviner. Des Tables numériques destinées à telle application spéciale seraient parfois d'un grand usage pour des calculs d'une nature toute différente, et il arrive ainsi que l'astronome ou le physicien regrette le manque d'une Table qui existe depuis longtemps, déguisée sous un nom qui déroute les recherches, et même qu'il se décide à la calculer à nouveau pour l'objet qu'il a en vue, perdant ainsi un temps précieux à refaire un travail fait avant lui. On sait déjà, par exemple, que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

qui, réduite en Tables, sert à la détermination de l'erreur probable dans la méthode des moindres carrés, joue également un rôle important dans la théorie de la réfraction astronomique (1) et dans la théorie de la chaleur, de sorte que la même Table peut servir pour les recherches en apparence les plus hétérogènes. De même les recueils de Tables nautiques donnent les logarithmes des sinus verses et des cosécantes sous le titre de « Tables pour le calcul de la latitude par deux hauteurs du Soleil », etc. Il est donc évident qu'avant toute chose il était nécessaire de former un Catalogue des Tables existantes avec indication exacte de leur nature et de leur contenu.

Le Catalogue du Comité doit comprendre toutes les Tables numériques qui de près ou de loin appartiennent aux Sciences mathématiques ou paraissent propres à faciliter des recherches qui en relèvent ; mais on laissera de côté toutes celles dont les nombres ou seulement les données fondamentales sont d'une nature empirique, c'est-à-dire empruntées à l'observation ou à l'expérience, comme aussi toutes celles qui concernent des applications spéciales qu'on ne saurait classer dans les Sciences mathématiques.

C'est ainsi qu'on a cru devoir exclure la plupart des Tables astronomiques, les Catalogues d'étoiles, les Tables de réfraction, les Tables qui dépendent de la figure de la Terre, etc., les données de ces Tables étant essentiellement dérivées de l'observation. On a également laissé de côté les Tables des équivalents chimiques, des poids spécifiques, les Tables de conversion des poids et mesures, celles qui servent au calcul de la longitude en mer, les Tables de mortalité, enfin celles qui se rapportent aux assurances ou qui sont destinées aux calculs commerciaux, sauf quelques-unes qui offrent

(1) *Voir*, par exemple, KRAMP, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*. Leipsic et Paris, an VII.

un certain intérêt au point de vue des Mathématiques pures, comme par exemple les Tables d'intérêts composés, qui peuvent être envisagées comme des Tables de puissances, ou certaines Tables nautiques qui, malgré leur titre annonçant un usage tout spécial, sont simplement des Tables trigonométriques. Même pour les Tables de logarithmes, etc., le rapport n'a pas la prétention d'être absolument complet : M. Glaisher déclare expressément qu'il s'est dispensé de mentionner une foule d'Ouvrages du siècle dernier qui lui ont paru dénués d'intérêt, ainsi que des Tables italiennes, espagnoles, etc. (il aurait pu ajouter : françaises et allemandes) relativement récentes, qu'il n'a pu se procurer ([1]).

Avant d'entreprendre la description des diverses Tables numériques qui existent, il fallait s'entendre sur une classification rationnelle. Le Comité adopta la classification suivante, qui est due à M. Cayley.

A. — TABLES AUXILIAIRES POUR LES CALCULS QUI SE FONT SANS LOGARITHMES.

1. Multiplication.
2. Quarts de carrés.
3. Carrés, cubes et puissances suivantes; valeurs réciproques, etc.

B. — LOGARITHMES et FONCTIONS CIRCULAIRES.

4. Logarithmes vulgaires et antilogarithmes; logarithmes d'addition et de soustraction, etc.
5. Fonctions circulaires (sinus, cosinus, etc.), valeurs naturelles; longueurs des arcs de cercle.
6. Logarithmes des fonctions circulaires.

C. — FONCTIONS EXPONENTIELLES.

7. Logarithmes hyperboliques.
8. Antilogarithmes hyperboliques (e^x) et $\log\text{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)$; sinus et cosinus hyperboliques, etc.; valeurs naturelles et logarithmes.

([1]) On verra plus loin que, parmi les Recueils oubliés dans le Rapport, il y en a de fort répandus et qui méritent de l'être. Ces lacunes, que les ressources immenses de l'Association Britannique auraient pu mettre la Commission en état de combler, nous semblent ôter au Catalogue actuel une partie de sa valeur. C'est surtout en cette occasion que l'on peut reconnaître l'utilité de cultiver avec plus de soin la Bibliographie mathématique.

D. — Constantes algébriques.

9. Valeurs exactes en nombres entiers ou fractionnaires : nombres de Bernoulli, $\Delta^n o^m$, ... Coefficients binominaux.

10. Valeurs approchées en fractions décimales, pour le calcul des développements en séries.

E. — Constantes transcendantes.

11. Les nombres e, π, γ, ..., avec leurs puissances, et fonctions de ces nombres.

F. — Fonctions arithmétiques (*arithmological*).

12. Diviseurs, nombres premiers. Racines premières. *Canon arithmeticus*, etc.
13. Équation de Pell.
14. Décompositions.
15. Formes quadratiques, a^2+b^2, ... Décomposition des nombres en carrés, cubes, bicarrés, etc.
16. Formes binaires, ternaires, etc., quadratiques, etc.
17. Théories complexes.

G. — Fonctions transcendantes.

18. Fonctions elliptiques.
19. Fonctions Γ (intégrales eulériennes).
20. Sinus intégral, cosinus intégral, logarithme intégral.
21. Fonctions de Bessel, etc.
22. Coefficients des perturbations pour des valeurs données de $\frac{a}{a'}$.
23. Transcendantes logarithmiques.
24. Mélanges.

Le seul moyen sûr de découvrir toutes les Tables, comprises dans cette classification, qui ont été publiées, c'était de parcourir l'un après l'autre tous les volumes des Recueils scientifiques mentionnés dans la liste, qui se trouve en tête du *Catalogue of scientific Papers,* imprimé par la Société Royale, sans négliger de consulter les catalogues des libraires étrangers. Il s'agissait là de compulser avec attention bien des milliers de volumes, et l'on comprend qu'une pareille besogne demande des années. Heureusement que cette difficulté n'existait pas pour certaines catégories de Tables, comme celles qui sont comprises dans les groupes A, B, C 7, F 12, ces sortes de Tables ayant été généralement publiées à part, dans des volumes spéciaux. On pouvait donc espérer d'achever cette partie du Rapport dans un délai assez rapproché, et c'est en effet la partie qui a été présentée à l'Association. On se voyait ainsi forcé d'abandonner l'ordre indiqué par la classification de M. Cayley; mais cette classification sera rétablie dans ses droits lorsqu'on dressera l'index général des divers Rapports.

Au point de vue purement pratique, les diverses Tables peuvent évidemment se classer comme il suit :

1° Tables auxiliaires (*subsidiary Tables*), destinées à faciliter les calculs, mais sans intérêt par elles-mêmes : telles sont les Tables de logarithmes, les Tables trigonométriques, les Tables de multiplication, etc; presque toutes ces Tables ont été publiées à part.

2° Tables définitives (*conclusive Tables*), dont les nombres ont de l'intérêt par eux-mêmes; cette catégorie comprend : (*a*) les Tables de fonctions continues, qui sont généralement des intégrales définies ; (*b*) les Tables qui se rattachent à la théorie des nombres.

C'est sur la première de ces divisions que roule, comme nous l'avons déjà dit, le premier Rapport présenté à l'Association Britannique par la Commission. On a soin d'ailleurs de nous avertir que ce travail n'a qu'un caractère essentiellement provisoire, et qu'on se propose de le compléter un jour par un Rapport supplémentaire.

Le nombre des Tables comprises dans cette première division, et qui sont décrites dans le Rapport, est, soit dit en passant, beaucoup plus grand que celui des Tables de la seconde division; en revanche, elles n'exigent pas, comme ces dernières, des explications détaillées. Presque toutes ont été publiées dans des ouvrages séparés; cinq ou six seulement sont mentionnées dans le Rapport, qui ont été insérées dans des Recueils périodiques. Au contraire, c'est là qu'il faudra chercher presque toutes les Tables qui forment la deuxième division.

Dès le principe, mais contrairement aux intentions primitives, le Rapport a pris la forme d'un compte rendu bibliographique. Il ne pouvait en être autrement. Tandis, en effet, que, dans une science qui se développe, les livres anciens sont bientôt détrônés par les livres nouveaux, et n'ont plus qu'un intérêt historique, une Table numérique représente une quantité de travail une fois fait et qui, s'il a été bien fait, l'a été pour tout jamais. C'est un capital, au même titre que l'or en barre qui a été extrait des entrailles de la terre. Beaucoup de Tables qui datent du XVII^e siècle ont conservé leur pleine utilité : l'*Arithmetica logarithmica* de Vlacq (1628) est encore la meilleure Table de logarithmes à dix décimales, et le *Canon sinuum* de Pitiscus (1613) la meilleure Table des sinus naturels; on peut dire la même chose du *Canon triangulorum logarithmicus* (logarithmes naturels), publié par Ursinus en 1624. Telle Table a été calculée en vue d'un but spécial, lequel dans la suite a perdu son intérêt; elle n'en est pas moins l'expression d'une certaine quantité de vérités abstraites, et elle garde à ce titre une certaine valeur, et pourra, un jour ou l'autre, être utilisée pour une application nouvelle et imprévue. C'est pour toutes ces raisons qu'on n'a pas jugé inutile d'entrer dans quelques détails bibliographiques, même sur les Recueils de Tables anciens qui, à première vue, ne paraissaient pas offrir une grande importance. On s'est notamment efforcé de fournir des indications sur le degré d'exactitude qu'il est permis d'attribuer à ces Recueils.

On a aussi profité de l'occasion pour donner une description quelque peu détaillée de divers ouvrages qui jouent un rôle mémorable dans l'histoire des Mathématiques et qui sont généralement décrits d'une manière fort inexacte. Des détails de ce genre étaient d'autant plus nécessaires que les titres des ouvrages sont souvent trompeurs. Sous le titre de « Tables de logarithmes à huit décimales », on rencontre des Tables à cinq décimales, avec une formule pour calculer les trois autres. La Table de logarithmes publiée par Steinberger en 1840 prétend donner les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 1000000, mais elle s'arrête en réalité à 10000; l'interpolation doit faire le reste! D'autres fois un Catalogue de librairie annonce une « Table des diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 1000000 », et oublie d'ajouter qu'il ne s'agit que de la première section (1 à 150000), qui a été seule publiée; et ainsi de suite.

Dans les premiers temps qui suivirent l'invention des logarithmes, l'usage était d'inscrire le nom de Neper en tête des Tables et d'y ajouter celui de Briggs quand le livre renfermait des logarithmes vulgaires. C'est de là qu'est venue l'erreur assez commune qui consiste à attribuer à Briggs ou à Neper l'*Arithmetica* d'Adrien Vlacq. Si l'on ajoute à cela les cent manières différentes dont les contemporains orthographiaient les noms des premiers inventeurs des logarithmes, on comprendra aisément que les rapporteurs aient eu quelque peine à débrouiller les informations concernant les premiers Recueils de Tables logarithmiques.

Des Notices bibliographiques sur ces vieux livres forment un élément important de l'Histoire des Sciences mathématiques en général, et elles ont d'autant plus de prix que les renseignements que l'on trouve dans les Recueils bibliographiques sont souvent peu dignes de confiance. « L'examen d'un grand nombre d'Ouvrages spéciaux qu'il nous a fallu consulter », dit M. Glaisher, « a montré combien sont inexacts, non-seulement dans les détails, mais encore dans les faits importants, les renseignements bibliographiques qu'on rencontre chez la plupart des écrivains. Si nous exceptons Delambre, Lalande (*Bibliographie astronomique*) et de Morgan, on peut dire hardiment qu'il n'est pas un seul écrivain sur la matière auquel on puisse se fier complétement [1]. Ceux qui ont eu l'occasion d'élucider un point d'histoire, comme par exemple l'invention des logarithmes, peuvent seuls juger du peu de souci qu'on avait de l'exactitude avant le commencement du siècle présent, qui peut être considéré comme l'aurore d'un âge plus scrupuleux ».

Parmi les listes de Tables mathématiques dressées par divers érudits avant la nomination du Comité de l'Association Britannique, la plus complète était celle que de Morgan avait donnée en 1842, à l'article *Table* de la *Penny Cyclopædia*, et qu'il avait ensuite fait réimprimer avec beaucoup d'additions, dans l'Encyclopédie de Knight (*English Cyclopædia*), en 1861. Cette liste renferme 457 Tables, dont beaucoup cependant étaient en dehors du cadre de ce Rapport.

On a puisé en outre des indications plus ou moins précieuses dans les Ouvrages suivants :

HEILBRONNER. — *Historia Matheseos universæ.* — Lipsiæ, 1742.

KAESTNER (A.-G.).— *Geschichte der Mathematik.* — Göttingen, 1796-1800.

MURHARD (J.-W.-A.).— *Bibliotheca mathematica.* — Lipsiæ, 1797-1804.

ROGG (J.). — *Bibliotheca mathematica sive index criticus librorum mathemati-*

(1) M. Glaisher aurait pu citer, à côté des précédents auteurs, l'étude remarquable publiée par Biot en 1835, dans le *Journal des Savants*.

corum, etc. — Tubingue, 1830. — De cet Ouvrage, la première Section seule a été publiée.

SOHNCKE (L.-A.). — *Bibliotheca mathematica.* (Catalogue de livres publiés de 1830 à 1854.) — Leipzig et Londres, 1854.

LA LANDE (J. DE). — *Bibliographie astronomique.* — Paris, 1803.

ERSCH (J.-S.). — *Literatur der Mathematik, Natur-und Gewerbskunde.* Neue Ausgabe, von J.-W. Schweigger-Seidel. — Leipzig, 1828.

POGGENDORFF. — *Biographisch-literarisches Handwörterbuch.* — Leipzig, 1863.

MILLIET-DECHALES (R.-P.). — *Cursus seu mundus mathematicus.* — Lugduni, 1690.

MORGAN (DE). — *Arithmetical Books.* — London, 1847.

PEACOCK. — *History of Arithmetic*, etc., etc.

Le Comité n'a pu se procurer le Recueil de Scheibel (*Einleitung zur math. Bücher-Kenntniss*, Breslau, 1769-1798), qui est souvent cité par Murhard et d'autres. L'*Histoire des Mathématiques* de Montucla n'a rendu aucun service; au contraire l'*Histoire de l'Astronomie moderne* de Delambre (Paris, 1821) a fourni de précieux renseignements.

Les bibliothèques qui ont été mises à contribution pour la description des Ouvrages sont celles du British Museum, de la Société Royale, de l'Université de Cambridge, de l'Observatoire de Greenwich, du Collége de la Trinité à Cambridge, de la Société Royale Astronomique, et celle de feu Graves, qui appartient au Collége de l'Université de Londres et qui renferme une des plus belles collections de livres de Mathématiques anciens; malheureusement cette dernière n'était pas encore classée, et plusieurs des grandes bibliothèques publiques n'ont pas de Catalogue. De là sans doute plus d'une lacune grave dans le Rapport; on s'en aperçoit en jetant les yeux sur la statistique suivante, où sont classés par nationalités les 230 Recueils de Tables que le rapporteur a pu se procurer :

Angleterre	109	Suisse	2
Allemagne, Autriche	66	Espagne	1
France	27	Portugal	1
Hollande	8	Suède	1
Danemark	7	Russie	1
Italie	3	Égypte	1
États-Unis	3		

Le Comité espère que ces lacunes pourront être comblées par la publication d'un supplément, et il prie les mathématiciens et les bibliophiles de tous pays de lui communiquer les titres des Ouvrages non mentionnés dans son Catalogue qui seraient à leur connaissance (1). On se propose également de donner dans ce supplément une plus large place aux *errata* des Tables les plus répandues. On trouvera plus loin une liste de quelques-uns des Ouvrages qui ne figurent pas dans le Rapport, et qui pour la plupart nous ont été obligeamment signalés par M. Hoüel.

Le Rapport décrit d'abord avec plus ou moins de détails les Tables numériques classées sous les vingt-cinq rubriques suivantes :

1. Tables de multiplication.
2. Parties proportionnelles.
3. Quarts de carrés.
4. Carrés, cubes, racines carrées et cubiques.
5. Puissances plus élevées que la troisième.
6. Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales.
7. Valeurs réciproques.
8. Diviseurs et nombres premiers.
9. Tables sexagésimales et sexcentenaires.
10. Valeurs naturelles des fonctions trigonométriques.
11. Longueurs des arcs de cercle.
12. Conversion des heures, minutes et secondes en fractions du jour; conversion du temps en degrés, et *vice versa*.
13. Logarithmes vulgaires.
14. Antilogarithmes.
15. Logarithmes vulgaires des fonctions trigonométriques.
16. Logarithmes naturels (ayant pour base le nombre e)
17. Logarithmes népériens.
18. Logarithmes logistiques et proportionnels.
18\. Logarithmes d'addition et de soustraction.
20. Conversion des logarithmes vulgaires en logarithmes naturels, et *vice versa*.
21. Tables d'interpolation.

(1) Ces Communications devront être adressees à M. J.-W.-L. Glaisher, Trinity College, Cambridge.

22. Tables de mensuration (aires de surfaces, volumes, etc.).
23. Logarithmes dualistiques.
24. Constantes mathématiques, nombres usuels.
25. Tables diverses : nombres figurés, etc.

Cette description analytique remplit 70 pages du Rapport (p. 14-85); chacun des paragraphes consacrés aux diverses catégories de Tables est précédé d'une courte introduction. Dans la seconde partie du Rapport, on trouve la description détaillée de 118 Ouvrages, qui sont des Recueils de Tables diverses et qu'il eût été difficile de classer sous l'une des 25 rubriques spéciales qui précèdent (p. 85-143). Enfin les titres de tous les Ouvrages décrits dans ces deux Chapitres sont réunis dans une liste où ils sont classés par ordre alphabétique des noms d'auteurs (p. 143-164). Un *post-scriptum* rend compte de l'état du travail au moment de l'impression du Rapport.

Ne pouvant suivre le savant rapporteur dans les détails qu'il donne sur l'histoire de ces diverses catégories de Tables, nous nous contenterons de prendre çà et là ce qui nous a paru intéressant.

Les premières Tables de multiplication sont probablement celles de Thomas Finck, publiées à Copenhague en 1604; mais les premières qui aient une certaine étendue sont celles de Herwart de Hohenburg (1610), qui ont été égalées, mais non surpassées, par les Tables de Crelle (1864), les plus commodes que l'on possède aujourd'hui, et les plus répandues.

Ces Tables étant à double entrée, on a cherché, par divers artifices, à construire des Tables de multiplication à une seule entrée; telles sont les Tables des quarts des carrés (*arithnomes*), dont le principe est fondé sur la formule

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2.$$

Pour obtenir le produit de deux nombres a, b, il suffit de chercher dans la Table le quart du carré de leur somme et celui de leur différence, et de retrancher le dernier du premier. Voisin a fait paraître une Table de ce genre en 1817; mais Ludolf en avait indiqué le principe dès 1690. D'autres Tables analogues ont été publiées par Centnerschwer (1825), Merpaut (1832), Laundy (1856);

Ce dernier avait été conduit à construire ses Tables par la lecture d'un Mémoire de M. Sylvester. Au reste, une Table des carrés peut évidemment servir au même usage, témoin la *Table des carrés* publiée dans ce dessein par M. A. Gossart en 1865.

Laplace, dans un Mémoire *Sur divers points d'Analyse* que l'on trouve dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1809), s'est également occupé de cette question; il montre que la multiplication au moyen d'une Table à une seule entrée peut s'obtenir de trois manières différentes : par les logarithmes, par les quarts de carrés, et par les fonctions trigonométriques en profitant de la relation connue

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

« Cette manière ingénieuse [1] de faire servir des Tables de sinus à la multiplication des nombres », dit-il, « fut imaginée et employée un siècle environ avant l'invention des logarithmes ».

Il est à remarquer que le produit $\sin a \sin b \sin c$ peut s'exprimer d'une manière analogue par une somme de quatre sinus, puisque

$$\begin{aligned}\sin a \sin b \sin c = \frac{1}{4}[&\sin(a+b-c) + \sin(a+c-b)\\ &+ \sin(b+c-a) - \sin(a+b+c)],\end{aligned}$$

et qu'on trouve des expressions analogues pour les produits de quatre et cinq sinus, etc.; de sorte que les Tables de sinus permettent d'exécuter la multiplication d'un nombre quelconque de facteurs. C'est là une supériorité que les formules trigonométriques ont sur les formules algébriques correspondantes; car, en partant de ces dernières, la multiplication de deux facteurs exigerait une Table des carrés, la multiplication de trois facteurs une Table des cubes, et ainsi de suite, puisque

$$abc = \frac{1}{24}[(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (a+c-b)^3 - (b+c-a)^3], \text{ etc.}$$

Ces formules algébriques se déduisent d'ailleurs des formules

---

[1] Methode de la prostapherèse, connue du temps de Tycho Brahe. (Voir les *Astron. Mittheilungen* de R. Wolf, et *Bulletin*, t. VII, p. 35.)

trigonométriques en développant et égalant les puissances homologues.

De bonnes Tables des puissances successives des nombres seraient très-utiles pour le calcul numérique de diverses fonctions qu'on peut développer en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes ou descendantes de la variable ; car il arrive parfois, pour certaines valeurs de la variable, qu'il faut aller jusqu'à quinze ou vingt termes pour avoir la valeur de la fonction exacte à sept décimales. Les Tables de logarithmes ne sont pas toujours suffisantes pour ces calculs, et c'est alors qu'on serait bien aise d'avoir sous la main une Table des puissances élevées.

M. Glaisher avait déjà calculé en double une Table des douze premières puissances des nombres depuis 1 jusqu'à 1000 ; dès qu'elle aura été calculée une troisième fois et collationnée, on la fera stéréotyper pour la livrer à la circulation.

Des Tables des plus petits diviseurs des nombres ont été données par Burckhardt pour les trois premiers millions, puis récemment par Dase, pour le septième, le huitième et le neuvième million. Ce travail fut entrepris par le célèbre calculateur vers 1850, à l'instigation de Gauss, qui était d'avis qu'il fallait étendre les Tables des diviseurs jusqu'aux dix premiers millions. Un manuscrit contenant ces diviseurs pour le quatrième, le cinquième, le sixième million avait été déjà présenté à l'Académie des Sciences de Berlin par Crelle ; il ne restait donc alors qu'à compléter le travail par les quatre derniers millions. Dase est mort en 1862 avant d'avoir achevé sa tâche ; le manuscrit de Crelle dort encore dans les cartons de l'Académie. Il paraît d'ailleurs que Burckhardt a laissé un travail analogue. L'existence de ces deux manuscrits a peut-être empêché les calculateurs de bonne volonté de combler la lacune qui existe encore dans les Tables des diviseurs : c'est ainsi qu'un manuscrit qu'on ne publie pas peut devenir un obstacle au progrès.

L'histoire des Tables des sinus, tangentes et sécantes est fort curieuse. Les premières lignes trigonométriques, déjà employées par les anciens, étaient les cordes ; on trouve une Table des cordes chez Ptolémée ; mais la division sexagésimale y est appliquée au rayon aussi bien qu'à la circonférence ; on prend pour unité l'arc de 60 degrés, dont la corde est égale au rayon. Ainsi la corde de l'arc de 90 degrés a pour valeur $84^{\circ}51'10''$, le rayon étant égal à 60 degrés. Les Tables des sinus calculées par Purbach et par Regiomontanus au xv[e] siècle ne paraissent pas avoir été imprimées. D'après de Morgan, la première Table de ce genre qui ait été imprimée est une Table publiée avant 1500, sans nom d'auteur.

Regiomontanus a fait paraître en 1504 sa Table des tangentes, puis Rheticus en 1551 un Canon complet des six rapports des côtés d'un triangle rectangle. Une Table de tangentes s'appelait alors *Tabula fœcunda,* une Table des sécantes *Tabula benefica* ou *fœcundissima.* En 1596, 20 ans après la mort de Rheticus, parut son grand Canon trigonométrique intitulé : *Opus palatinum*, où les valeurs naturelles des six rapports sont données avec dix décimales, de dix en dix secondes ; puis, en 1613, Pitiscus publia les Tables des sinus calculées par Rheticus avec quinze décimales, dont il avait retrouvé le manuscrit à moitié pourri parmi les papiers du libraire qui avait édité l'*Opus palatinum.* Ces Ouvrages, avec l'*Arithmetica logarithmica* et la *Trigonometria artificialis* de Vlacq, sont les sources d'où dérivent les Tables modernes.

Parmi les auteurs qui ont raconté l'histoire de l'invention des logarithmes, quelques-uns, comme Hutton, ont accusé John Napier d'avoir passé sous silence la part d'initiative qui revient à Briggs dans l'introduction du système décimal à la place du système naturel ; d'autres, comme Mark Napier, diminuent Briggs et en font un simple calculateur. Le rapport de M. Glaisher rétablit la vérité sur ce point en montrant par des citations que Briggs et Napier ont eu, chacun de son côté, l'idée de ce perfectionnement, et que ces deux hommes sont restés, jusqu'à la mort de Napier, dans les relations les plus amicales, ce qui suffit à laver la mémoire de Napier de tout reproche.

On sait d'ailleurs que les logarithmes népériens ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux que l'on appelle aujourd'hui logarithmes *hyperboliques* ou *naturels,* et qui ont pour base le nombre $e = 2,71828\ldots$. Les deux systèmes sont liés l'un à l'autre par la relation suivante :

$$e^{\log \text{nat.}} = 10000000\, e^{-\frac{\log \text{nép}}{10000000}}$$

ou bien

$$\log \text{nép.}\, x = 10000000\,(\log \text{nat.}\, 10000000 - \log \text{nat.}\, x).$$

Quoique le nom de Juste Byrg ou Bürgi ne soit pas passé sous silence, M. Glaisher ne donne ni le titre de son Ouvrage (publié à Prague en 1620), ni aucune indication sur son système. Bürgi n'emploie pas le mot de *logarithmes*; mais ses « nombres rouges » peuvent être considérés comme formant un système de logarithmes dont la base serait le nombre 1,0001, de sorte que

$$\log \text{Bürgi} = \log \text{nat.} \times 10000{,}49999166\ldots,$$

et

$$\log \text{Bürgi}\, 10 = 23027{,}00220\ldots.$$

Il est bien entendu d'ailleurs que les droits de Neper au titre d'inventeur des logarithmes sont hors de toute contestation. Comme Archimède avait trouvé dans les progressions numériques le moyen de compter les grains de sable que peut contenir la sphère des étoiles, ainsi le « baron écossais » y a vu celui de nous libérer de l'écrasant labeur des divisions et des multiplications, et il a facilité dans une étonnante mesure les progrès de l'intelligence humaine.

Les Tables de logarithmes à quatorze décimales de Briggs, réduites à dix décimales et complétées par Adrien Vlacq, sont la source où Vega a puisé son *Thesaurus*, publié en 1794. Cependant à ce moment la France possédait déjà les fameuses Tables du Cadastre, calculées en double sous la direction de Prony, « le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu ». Il en existe deux exemplaires manuscrits, formant chacun 17 volumes in-folio, dont l'un est déposé aux Archives de l'Observatoire de Paris, l'autre à la Bibliothèque de l'Institut. M. Lefort en a donné une description détaillée en 1858, dans les *Annales de l'Observatoire*. En 1820, le Gouvernement anglais offrit, paraît-il, de faire la moitié des frais d'impression, mais cette offre ne fut point acceptée.

Parmi les publications récentes les plus importantes, il faut citer les Tables de M. Sang (1871), qui donnent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1000 avec dix décimales, et depuis 20000 jusqu'à 200000 avec sept décimales, disposition qui offre de grands avantages au point de vue des interpolations.

Les premières Tables logarithmiques des sinus et tangentes sont celles de Gunter (1620), qui ont sept décimales, puis viennent la *Trigonometria Britannica* de Briggs (1633), qui donne les logarithmes des sinus, etc., avec quatorze décimales pour chaque centième de degré, et la *Trigonometria artificialis* de Vlacq, qui les donne avec dix décimales de 10 en 10 secondes.

Il faut ensuite mentionner les Tables de Michael Taylor (1792), de Bagay (1829) et de Shortrede (1844), qui toutes sont à sept décimales et vont de seconde en seconde. Les Tables trigonométriques du Cadastre ont été calculées pour la division décimale du quart de la circonférence.

Sans l'apparition des Tables de Vlacq, il est probable que la division décimale du degré ordinaire, inaugurée par Briggs, eût prévalu. M. Glaisher exprime l'espoir qu'on y reviendra, et que ce système, qui offre tant d'avantages, sera un jour définitivement adopté; « car il faut tenir pour certain », dit-il, « que la grandeur du degré ne sera jamais changée ». Selon le rapporteur, le centième du quart de la circonférence est une unité tout aussi arbitraire que le degré nonagésimal, et la substitution de l'un à l'autre n'aurait que des inconvénients, tandis que la division décimale du degré, en nous débarrassant des minutes et secondes, nous procurerait tous les avantages d'un véritable système décimal. Il nous semble cependant que le quart de la circonférence, pris comme unité, mérite la préférence dès qu'on dépasse 90 degrés, comme dans la plupart des calculs de la Mécanique céleste. Des Tables construites suivant la division naturelle du quadrant, laquelle est sans aucun doute la division décimale, serviraient aux astronomes calculateurs (qui n'empruntent que très-peu de données aux recueils d'observation, et se bornent à opérer sur un petit nombre d'angles donnés), aux mathématiciens purs, aux ingénieurs, aux arpenteurs. Toutes les personnes sans exception qui en ont fait l'essai y ont trouvé de très-grands avantages, et notamment une réelle économie de temps, ce qui entraîne toujours comme conséquence une diminution des erreurs de calcul. Une question aussi capitale eût d'ailleurs mérité d'être discutée à fond dans le Rapport, au lieu d'être tranchée en quelques lignes, au bas d'une page.

Il est digne d'être noté que la division décimale du degré avait été proposée par Simon Stevin longtemps avant Briggs, dans son célèbre Traité de *la Disme,* où il expose l'invention des fractions décimales (1585). Voici le passage qui renferme cette proposition :

« Article V. — *Des computations astronomiques.* — Aians les anciens astronomes parti le circle en 360 degrez, ils voioient que les computations astronomiques d'icelles, avec leurs partitions, estoient trop laborieuses, pourtant ils ont parti chasque degré en certaines parties, et les mesmes autrefois en autant, etc., à fin de pouuoir par ainsi tousiours operer par nombres entiers, en choisissans la soixantiesme progression, parce que 60 est nombre mesurable par plusieurs mesures entières, à sçauoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ; mais, si l'on peut croire l'expérience (ce que nous disons par toute reuerence de la venerable antiquité et esmeu avec l'vmilité commune), certes la soixantiesme progression n'estoit pas la plus commode, au moins entre celles qui consistoient potentiellement en la nature, ains la dixiesme, qui est telle : Nous nommons les 360 degrés aussi *commencemens*, les dénotans ainsi : 360 $(^0)$, et chascun degré ou 1 $(^0)$ se diuisera en dix parties égales, desquelles chascune fera 1 $(^1)$, puis chasque 1 $(^1)$ en 10 $(^2)$, et ainsi des autres, comme le semblable est faict par plusieurs fois ci-deuant ».

Les logarithmes logistiques ou proportionnels sont des logarithmes de certains rapports ; ce sont des logarithmes ordinaires qu'on a retranchés d'un nombre constant. Les logarithmes d'addition et de soustraction, dont la première idée est due à Leonelli (1802), ont été vulgarisés par Gauss, et on les a modifiés de bien des manières. Il est à regretter que le Rapport ne discute pas la disposition plus ou moins convenable adoptée par les divers auteurs ; celle de la *fine Table of Gaussian Logarithms* de Wittstein (p. 78 du Rapport) est la moins bonne de toutes.

Notons encore que les Tables de Babbage, si vantées pour leur correction, renferment environ 250 fautes sur la dernière figure, dans la partie à 8 décimales (à la fin), empruntée de confiance à Callet, qui a calculé avec peu de soin les logarithmes de 102000 à 108000. Ces fautes ont été reproduites dans le Recueil de Vega-Hülsse (où elles se trouvent encore aujourd'hui) et dans les Tables de Köhler, où elles ont été ensuite corrigées. C'est M. Hoüel et M. Lefort qui les ont signalées les premiers et corrigées d'après les Tables du Cadastre.

En 1863, M. Oliver Byrne a fait une curieuse tentative pour remplacer les logarithmes par un autre système de nombres qu'il appelle *Dual Logarithms* et dont il a publié des Tables. Un

« nombre dualistique (*Dual Number*) de l'échelle ascendante » est un produit formé par les puissances entières des facteurs :

$$1,1\,;\quad 1,01\,;\quad 1,001\,;\quad \ldots.$$

On se contente d'écrire les exposants précédés du signe $\leqq$, de sorte que

$$\leqq 6,\,9,\,7,\,6 = (1,1)^6\,(1,01)^9\,(1,001)^7\,(1,0001)^6.$$

Quand tous les exposants, sauf le dernier, sont égaux à zéro, on a ce que M. Byrne appelle un *logarithme dualistique*. Il s'arrête à huit facteurs ; ses logarithmes dualistiques ont par conséquent sept zéros avant le chiffre qui les caractérise. La branche descendante est formée par les produits des puissances de facteurs, tels que

$$0,9,\quad 0,99,\quad 0,999,\quad \ldots.$$

dont on écrit les exposants suivis du signe $\overline{\overline{<}}$, et ainsi de suite.

Ces citations suffiront pour faire comprendre l'intérêt que présente le Rapport du Comité des Tables, et le service que la publication de ce travail a rendu à la Science. Ajoutons quelques mots sur les Tables dont la construction et l'impression ont été commencées.

Les *Tables des fonctions de Legendre* donnent les valeurs exactes des sept premiers $P^n(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et l'unité, de centième en centième. On a

$$P^1 = x,\quad P^2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\quad \ldots,$$
$$P^7 = \frac{1}{16}(429\,x^7 - 693\,x^5 + 315\,x^3 - 35\,x).$$

Ces Tables ont été calculées en double, par M. W. Barrett Davis et par les calculateurs placés sous les ordres de M. Glaisher. Elles seront publiées avec une introduction de M. Cayley.

Les *Tables des fonctions elliptiques* donneront les valeurs des quatre fonctions ϑ et leurs logarithmes à huit décimales pour les arguments

$$x = 1^\circ,\quad 2^\circ,\quad \ldots,\quad 90^\circ,$$
$$k = \sin 1^\circ,\quad \sin 2^\circ,\quad \ldots,\quad \sin 90^\circ.$$

Ces Tables, qui sont à double entrée, renferment par conséquent

8 nombres pour chacun des 8100 arguments, en tout 64800 nombres. Huit calculateurs ont été employés à ce travail sous la direction de M. James Glaisher et du Rapporteur ; on espérait qu'elles seraient achevées dans le courant de l'année 1874. Elles seront précédées d'une introduction dans laquelle MM. Cayley, Smith, Thomson et Stokes exposeront les usages variés auxquels se prêtent les fonctions elliptiques. « La publication de ces Tables », dit M. Glaisher, « ouvrira aux applications pratiques une vaste et fertile province du domaine de l'Analyse. »

Il faut regretter qu'on n'ait pas adopté, pour ces Tables, la division décimale du quadrant, qui en aurait beaucoup facilité l'usage. Au reste, l'emploi de l'ancienne division n'est pas le seul inconvénient qu'elles offrent. Il est à craindre que ces Tables à double entrée ne soient d'un usage peu commode, l'interpolation de pareilles Tables étant plus difficile que le calcul direct à l'aide des formules que l'on possède maintenant. Ce qui serait très-utile, ce seraient des Tables à simple entrée, donnant les valeurs de K, E, $q, \ldots$, en fonction du module; avec cela et de bonnes Tables des fonctions hyperboliques, le calcul des fonctions ϑ se ferait probablement dans tous les cas avec presque autant de rapidité que la recherche d'un nombre par interpolation simple. R. Radau.

OUVRAGES OMIS DANS LE RAPPORT DU COMITÉ DES TABLES.

Bürgi (Jobst). — *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol.* — Gedruckt in der alten Stadt Prag, im Jahr 1620. — In-4°, de 7 ½ feuilles. (Cité par Kästner. Les nombres sont imprimés en noir, les logarithmes en rouge. Voir à ce sujet un Mémoire de M. Gieswald, publié vers 1856 dans l'*Archiv* de Grunert, et cité à la page 71 du Rapport).

Baudusson. — *Le Rapporteur exact* ou *Table des cordes,* etc. 4e édition. — Paris, 1861.

Bouché. — *Notice sur les usages d'un nouveau système de logarithmes.* In-8°, avec une planche. — Angers, 1859. (Log. graphiques.)

Carr (Rev. John). — *A Synopsis of Practical Philosophy.* — London, 1843.

Noel Durret. — *Tabulæ Richelianiæ,* 1641. (Log. népériens.)

Étienne. — *Tables des racines carrées,* 1852.

Gossart. — *Table des carrés de* 1 *à* 100 *millions, au moyen de laquelle on obtient des produits exacts,* etc., 1865.

HERTZER. — *Mathematische Tabellen.* — Berlin, 1864.

HOÜEL. — *Recueil de formules et de Tables numériques.* In-8°. — Paris, 1866. (Contient 19 Tables de logarithmes et d'autres fonctions telles que les fonctions hyperboliques, elliptiques, etc., et une excellente Introduction; le Rapporteur y aurait trouvé d'utiles renseignements et l'accomplissement de quelques-uns des *desiderata* qu'il signale.)

KÜSTER. — *Tabelle der Sinus und Cosinus,* etc. In-fol. — Mühlhausen, 1868.

LE BESGUE. — *Table des plus petits diviseurs de* 1 *à* 215000. — *Tables d'indices* pour les nombres premiers < 200.

OYON. — *Tables de multiplication.* 2 vol. in-4°. 4e édition. — Paris, 1864.

PRESTET. — *Éléments de Mathématiques,* 1689. (Log. de 1 à 20000.)

SCHWEIZER. — *Quadrattafeln.* — Mitau, 1862.

Tables de logarithmes. A 27 décimales : Fédor Thoman, 1867.

A 7 décimales : Caillet, 1848; Croizet; Luvini, 1865; Matzek, 1861; Querret, 1830; Vega (1re édition), 1783.

A 6 décimales : Bouguer, Bezout; Caillet, 1858, 1872; Guépratte; Hierl, 1851; Marie et Lalande, 1760; Plauzoles, 1809, 1830; Queipo, 1863, 1876; Rühlmann (7e édition), 1865; Stampfer, 1852.

A 5 décimales : August, 1846 (6e édition, 1865); Bourget et René, 1864; Delagrive, 1806; F.-G. Gauss, 1870; Gernerth, 1866; Hahn, 1823; Keith, 1826; Ligowski, 1867; Lukas, 1860; Lutter, 1866; Meldola, 1840; Midy (*Tables prestinventives*), 1830; Nell, 1866; Oeltzen (antilogarithmes), 1866; Picarte; de Prasse et Mollweide, 1821; Westphal, 1821; Wittstein, 1859; R. Wolf, 1860.

A 4 décimales : Hoüel, 1866; Schoder, 1869; Wittstein; Wild; Zech, 1864.