Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

E. Beltrami

Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 233-240

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__233_1>

FORMULES FONDAMENTALES DE CINÉMATIQUE DANS LES ESPACES DE COURBURE CONSTANTE;

PAR M. E. BELTRAMI.

(Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie Royale des Lincei, à Rome.)

Je prendrai l'expression du carré de l'élément linéaire ds sous la forme connue

$$\frac{ds^2}{R^2} = \frac{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n}{x^2}, \tag{1}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées *linéaires* d'un point quelconque du $n^{\text{ième}}$ espace (c'est-à-dire telles que chaque droite est représentée par $n - 1$ équations du premier degré), R est le rayon pseudo-sphérique constant, et x est une variable surnuméraire définie par l'équation

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2, \tag{2}$$

où a est une constante finie.

Je considère maintenant un système continu de points; je désigne par $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ les variations infiniment petites des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un de ces points par suite d'un déplacement élémentaire quelconque, par δx la variation qui s'ensuit pour x, et je vais chercher une expression de forme convenable pour la variation δds que reçoit la distance ds de deux points contigus du système.

De l'équation (1), écrite de cette manière

$$\frac{ds^2}{R^2} = \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \sum\left(\frac{dx_r}{x}\right)^2,$$

on tire

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x} + \sum\frac{dx_r}{x}\delta\frac{dx_r}{x};$$

ce qui, par suite de l'identité

$$\frac{dx_r}{x} = d\frac{x_r}{x} + \frac{x_r\,dx}{x^2},$$

peut être aussi écrit sous la forme

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x} + \sum\frac{dx_r}{x}d\delta\frac{x_r}{x} + \sum\frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right).$$

Mais on a aussi

$$\sum\frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}\sum\frac{dx_r}{x}\delta\frac{x_r}{x} + \delta\frac{dx}{x}\sum\frac{x_r\,dx_r}{x^2},$$

savoir (2),

$$\sum\frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}\sum\frac{dx_r}{x}\delta\frac{x_r}{x} - \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x};$$

donc

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \sum\frac{dx_r}{x}\left(d\delta\frac{x_r}{x} + \frac{dx}{x}\delta\frac{x_r}{x}\right),$$

d'où

$$(3)\qquad \delta ds = \frac{R^2}{x^2}\sum\frac{dx_r}{ds}\,d\left(x\delta\frac{x_r}{x}\right),$$

Telle est la forme qu'il convient de donner à l'expression de δds.

Cette formule pourrait servir, à cause de sa généralité, à la recherche des équations fondamentales de la Cinématique des systèmes de forme variable. Mais, me bornant, pour le présent, à la considération des systèmes rigides, je poserai $\delta ds = 0$, ce qui donne, comme condition nécessaire et suffisante de chaque déplacement non accompagné de déformation,

$$(4)\qquad \sum dx_r\,d\left(x\delta\frac{x_r}{x}\right) = 0.$$

Il s'agit maintenant de tirer de cette équation les valeurs les plus générales des variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Posant d'abord

$$X_r = x\,\delta\frac{x_r}{x}, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

on voit que les n fonctions inconnues $X_1, X_2, \ldots X_n$ doivent satisfaire, en vertu de l'équation (4), à l'identité

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial X_r}{\partial x_s} dx_r dx_s = 0; \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots n, \\ s = 1, 2, \ldots n, \end{array} \right.$$

ce qui exige que l'on ait

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} + \frac{\partial X_s}{\partial x_r} = 0, \tag{5}$$

pour toutes les valeurs, égales ou inégales, des indices r et s. De cette équation on tire, quel que soit le troisième indice t,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial X_r}{\partial x_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_t}\right) = 0,$$

savoir, à cause de la même équation (5) appliquée successivement aux indices r, t, et s, t,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial X_t}{\partial x_r}\right) + \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_t}{\partial x_s}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2 X_t}{\partial x_r\,\partial x_s} = 0.$$

Puisque r, s, t sont ici trois indices quelconques, égaux ou inégaux, de la série $1, 2, \ldots, n$, on voit, par cette dernière formule, que les n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont toutes leurs secondes dérivées nulles. Elles sont donc nécessairement de la forme linéaire

$$X_r = c_r + c_{1r}x_1 + c_{2r}x_2 + \ldots + c_{nr}x_n,$$

les quantités c_r, aussi bien que les $c_{r,s}$, étant constantes par rapport aux coordonnées (et fonctions, en général, du temps); mais, puisque les fonctions X doivent encore satisfaire aux conditions primitives

(5), les quantités c_{rs} ne sont pas absolument arbitraires; on doit avoir

$$(6) \qquad c_{rs} + c_{sr} = 0$$

pour toutes les valeurs, égales ou inégales, des indices r et s.

Ces conditions étant supposées satisfaites, on a donc

$$x\,\delta\frac{x_r}{x} = c_r + \sum_i c_{ir}\,x_i,$$

d'où l'on tire

$$\delta x_r = c_r + \sum_i c_{ir}\,x_i + \frac{x_r}{x}\,\delta x, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Multipliant par x_r et sommant par r, eu égard aux équations (2) et (6), on trouve

$$\delta x = -\frac{x}{a^2}\sum c_r\,x_r,$$

valeur qui, étant substituée dans la formule précédente, donne enfin

$$(7) \qquad \delta x_r = c_r + \sum_i c_{ir}\,x_i - \frac{x_r}{a^2}\sum_i c_i\,x_i,$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n$. On doit compléter ces n expressions par celle de δx,

$$(8) \qquad \delta x = -\frac{x}{a^2}\sum c_i x_i.$$

Les n équations (7) sont les formules différentielles fondamentales (analogues à celles d'Euler) de la Cinématique des corps solides dans un n-espace de courbure constante. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités arbitraires c_r et c_{rs}, qu'on doit considérer, généralement parlant, comme des fonctions arbitraires du temps t, multipliées par δt (durée infiniment petite du déplacement élémentaire), sont les analogues des six composantes de la translation et de la rotation dans la théorie ordinaire.

De l'équation complémentaire (8), qui est une suite nécessaire des formules (7), on peut tirer une conséquence très-importante. Il en résulte, en effet, que, pour tous les points du $(n-1)$-espace-limite $x = 0$ (supposés reliés au système solide), on a $\delta x = 0$; c'est-à-dire que ces points ne quittent pas cet $(n-1)$-espace, ou, ce qui est la même chose, que cet espace se déplace sur lui-même, en restant invariable par rapport au n-espace que l'on considère. Cette propriété, qui n'est ici qu'un corollaire de l'invariabilité qu'on a supposé à l'élément linéaire, devient au contraire la définition de la transformation homographique *spéciale,* appelée *mouvement de système invariable,* lorsque la géométrie des espaces de courbure constante est envisagée, d'après MM. Cayley et Klein, comme une théorie projective générale; la conception projective de la *distance* est la clef de cette identité admirable autant que fondamentale.

Désignant par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les coordonnées d'un point ou pôle, l'équation linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = a^2, \tag{9}$$

représente ce qu'on peut appeler le $(n-1)$-plan polaire de ce point par rapport à l'espace limite $x = 0$. Si le point (u) est réel, je veux dire *intérieur* à $x = 0$, le plan (9) est idéal, c'est-à-dire *extérieur* à $x = 0$; si, au contraire, le point (u) est idéal, le plan (9) est réel, c'est-à-dire qu'il possède une région simplement connexe, et indéfinie en tous sens, intérieure à $x = 0$. Comme, du reste, l'équation (9) peut représenter un $(n-1)$-plan quelconque, on peut définir aussi les coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du premier membre de cette équation comme les coordonnées (tangentielles) d'un $(n-1)$-plan. Or, si l'on considère le lieu limite $x = 0$ et le plan quelconque (9) comme invariablement liés entre eux, le pôle (u) du plan devient, lui aussi, invariablement lié au lieu $x = 0$; et puisque ce lieu ne fait que glisser sur lui-même lorsqu'il fait partie d'un système invariable mobile dans le n-espace, il est évident que le pôle (u) doit se déplacer, lui aussi, avec le système, et par suite que les variations $\delta u_1, \delta u_2, \ldots, \delta u_n$ des coordonnées tangentielles d'un $(n-1)$-plan, qui fait partie d'un système invariable mobile dans le n-espace, sont des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de même forme que les $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$, par rapport aux $x_1, x_2, \ldots$.

Cette conclusion peut être vérifiée directement, en tirant de l'équation (9)

$$\Sigma u_r \delta x_r + \Sigma x_r \delta u_r = 0,$$

savoir (7)

$$\Sigma c_r u_r + \Sigma_r \Sigma_i c_{ir} u_r x_i - \Sigma c_r x_r + \Sigma x_r \delta u_r = 0,$$

ou encore

$$\Sigma_r (\delta u_r - \Sigma_i c_{ir} u_i - c_r) x_r + \Sigma_i c_i u_i = 0.$$

La relation que cette formule établit parmi les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne peut évidemment différer de celle (9) dont on est parti; on aura donc

$$\frac{\delta u_r - c_r - \Sigma_i c_{ir} u_i}{u_r} + \frac{\Sigma_i c_i u_i}{a^2} = 0,$$

d'où

$$(7)' \qquad \delta u_r = c_r + \Sigma_i c_{ir} u_i - \frac{u_r}{a^2} \Sigma_i c_i u_i,$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n$. Ces n formules sont parfaitement semblables aux formules (7).

Si, pendant le mouvement élémentaire du système invariable, il y a quelque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui reste immobile, les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ de ses coordonnées doivent être toutes $= 0$ à l'instant considéré; et partant on aura aussi, pour ce même point, $x\,\delta x = 0$, c'est-à-dire $\delta x = 0$, si l'on suppose que ce point ne se trouve pas à la limite $x = 0$. Or ces conditions, $x > 0$, $\delta x = 0$ donnent, à cause de (8),

$$\Sigma c_i x_i = 0,$$

et, par suite, les conditions $\delta x_r = 0$ donnent à leur tour

$$(10) \qquad c_{ir} + \Sigma c_{ir} x_i = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

équations qui entraînent la précédente.

Lorsqu'il existe un système de valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant à ces n équations linéaires, il y a un point (réel ou idéal suivant qu'on a $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 <$ ou $> a^2$) qui possède les caractères d'un *centre instantané de rotation*, et dont le $(n-1)$-plan polaire par rapport à $x = 0$ est un $(n-1)$-*plan instantané de glissement* (idéal ou réel suivant que le pôle est réel ou idéal).

Or le déterminant

$$\Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{nn}$$

des équations (10) est, à cause de (6), égal à zéro ou à une quantité positive, généralement différente de zéro, suivant que le nombre n est impair ou pair. Donc :

Dans un n-espace de courbure constante, il existe toujours, lorsque n est pair, soit un centre réel instantané de rotation, soit un $(n-1)$-plan réel instantané de glissement pour chaque mouvement élémentaire (tout à fait général) de système rigide.

Dans un n-espace de courbure constante, lorsque n est impair, il n'existe, en général, ni centre de rotation ni $(n-1)$-plan de glissement pour chaque mouvement élémentaire de système rigide ; mais, si le mouvement est tel qu'il y ait un centre instantané [ou un $(n-1)$-plan instantané], il y en a une infinité, formant une droite ou un faisceau.

Je m'arrête, pour le moment, à ces conclusions de nature absolument générale, dont le développement et la discussion me mèneraient d'ailleurs très-loin. J'ajouterai la simple remarque que la Cinématique ordinaire nous offre déjà, dans ses théorèmes fondamentaux, des exemples particuliers des propriétés générales qui précèdent. Elle nous apprend, en effet, que dans le plan il existe toujours un centre instantané de mouvement, tandis que dans l'espace à *trois* dimensions il n'existe pas, en général, de point analogue, ou, s'il en existe un, il y en a une infinité en ligne droite. Dans cet espace il existe toujours, au contraire, une droite instantanée, qu'on appelle *axe central* de mouvement : or ce fait s'accorde parfaitement avec les théorèmes précédents; car l'espace euclidien, lorsqu'on y considère la droite comme élément primitif (point analytique) est un n-espace de courbure constante, pour lequel n est pair et $=4$; il doit donc y avoir toujours un élément instantanément invariable, et cet élément, qui est dans ce cas une droite, est précisément l'axe central. Dans ce même cas de $n=4$ on a, comme on sait,

$$\Sigma(\pm c_{11}\, c_{22}\, c_{33}\, c_{44}) = (c_{14}\, c_{23} + c_{24}\, c_{31} + c_{34}\, c_{12})^2,$$

et, dans l'hypothèse particulière $c_{14}\, c_{23} + c_{24}\, c_{31} + c_{34}\, c_{12} = 0$, le nombre des éléments invariables peut devenir infini. Cette condition répond, ainsi qu'on peut s'en assurer, à celle de la rotation (ordinaire) simple.

En adoptant, avec M. Schering, la dénomination d'espaces *gaussiens* et *riemanniens* pour les espaces de courbure constante dont la mesure de courbure est négative ou positive (respectivement), on voit que les résultats précédents se rapportent aux espaces gaussiens. Il y a une théorie tout à fait semblable pour les espaces riemanniens, et il sera facile au lecteur de la constituer d'après celle qui précède. Il n'y a pas de différence essentielle quant aux n-espaces pour lesquels n est impair; mais, lorsque n est pair, le centre de rotation et le $(n-1)$-plan de glissement existent toujours *simultanément* à l'état réel, quel que soit le mouvement élémentaire. L'exemple le plus simple, tiré de la Cinématique ordinaire, est offert par le déplacement d'une figure sphérique sur sa propre sphère : il y a toujours alors un centre de rotation et, en même temps, un grand cercle de glissement (dont le centre est le pôle).