Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Jules Tannery

Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 11 (1876), p. 221-233

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__11__221_1>

MÉLANGES.

SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES PAR LESQUELLES UNE FORME QUADRATIQUE TERNAIRE SE REPRODUIT ELLE-MÊME;

PAR M. JULES TANNERY.

Dans plusieurs Mémoires bien connus, M. Hermite s'est occupé des substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. Plusieurs des formules fondamentales que l'éminent géomètre a utilisées dans ses recherches arithmétiques ont été données par lui sans démonstration. L'intérêt que ces formules ont en elles-mêmes est assez grand pour que j'aie cru pouvoir me permettre d'en donner une démonstration tout élémentaire, en insistant sur quelques points de détail.

I.

Soit

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

une forme quadratique ternaire; on se propose de trouver toutes les substitutions linéaires, telles que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{aligned} \right.$$

par le moyen desquelles on ait identiquement

$$(2) \qquad f(x, y, z) = f(X, Y, Z).$$

Désignant par $f'_x, f'_y, f'_z, f'_X, \ldots$ les demi-dérivées partielles de $f(x, y, z)$, $f(X, Y, Z)$ prises par rapport à $x, y, z, X, \ldots$, on pourra écrire l'égalité (2) sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = Xf'_X + Yf'_Y + Zf'_Z,$$

et lui adjoindre l'identité

$$xf'_X + yf'_Y + zf'_Z = Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z;$$

de là on tirera

$$(2\,bis) \quad (x-X)(f'_x+f'_X)+(y-Y)(f'_y+f'_Y)+(z-Z)(f'_z+f'_Z)=0.$$

Si la substitution (1) rend cette dernière équation identique, elle rendra de même identique l'équation (2). Or, en posant pour un instant

$$(3) \qquad \begin{cases} x-X=u, & y-Y=v, & z-Z=w, \\ f'_x+f'_X=U, & f'_y+f'_Y=V, & f'_z+f'_Z=W, \end{cases}$$

l'équation (2 *bis*) deviendra

$$(4) \qquad uU+vV+wW=0 \quad (^1).$$

Si, comme nous le supposons essentiellement, le discriminant

$$\Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

n'est pas nul, les trois dernières équations (3) pourront être résolues de manière à exprimer $x+X$, $y+Y$, $z+Z$ linéairement en U, V, W; supposons que, dans les équations ainsi obtenues, on remplace x, y, z par leurs valeurs (1) en X, Y, Z : si le déterminant

$$(d) \qquad \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta'+1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma''+1 \end{vmatrix}$$

(1) C'est à M. Hermite qu'est dû ce point de départ, consistant à ramener le problème à la recherche des substitutions linéaires par lesquelles les variables de l'un des groupes (u, v, w), (U, V, W) s'expriment au moyen des variables de l'autre groupe, et qui rendent identique l'équation (4).

est différent de zéro, on pourra exprimer X, Y, Z (et aussi x, y, z) linéairement en U, V, W; portant les valeurs trouvées dans les trois premières équations (3), on obtiendra les expressions linéaires de u, v, w en U, V, W, expressions linéaires qui devront rendre identique l'équation (4), et qui, par suite, seront nécessairement de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \nu V - \mu W, \\ v = \lambda W - \nu U, \\ w = \mu U - \lambda V. \end{cases}$$

On voit dans ce cas que les équations (1) devront rendre identique l'équation

$$(6)\qquad \lambda(x - X) + \mu(y - Y) + \nu(z - Z) = 0.$$

Examinons maintenant le cas où le déterminant (d) est nul, ou, ce qui revient au même, le cas où les équations

$$f'_x + f'_X = U, \quad f'_y + f'_Y = V, \quad f'_z + f'_Z = W$$

ne peuvent pas être résolues par rapport à X, Y, Z, quand on y a remplacé x, y, z par les valeurs (1); il existera alors trois constantes λ, μ, ν telles que ces mêmes valeurs de x, y, z rendent identique l'équation

$$(7)\qquad \lambda(f'_x + f'_X) + \mu(f'_y + f'_Y) + \nu(f'_z + f'_Z) = 0.$$

Des équations

$$uU + vV + wW = 0,$$
$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

rendues identiques par la substitution (1), on tirera, en ne tenant pas compte d'un facteur commun indifférent,

$$(8)\qquad \begin{cases} U = \nu v - \mu w, \\ V = \lambda w - \nu u, \\ W = \mu u - \lambda v, \end{cases}$$

à moins toutefois que la substitution (1) ne rende identiques les équations

$$(9)\qquad \nu v - \mu w = 0, \quad \lambda w - \nu u = 0, \quad \mu u - \lambda v = 0.$$

On fera rentrer ce cas particulier dans le cas général, en remplaçant λ, μ, ν par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, chassant les dénominateurs, et supposant que ρ puisse s'annuler.

Il ne sera pas sans intérêt de remarquer que l'on aurait pu modifier l'ordre des raisonnements, et supposer tout d'abord que l'on cherche à résoudre par rapport à x, y, z, X, Y, Z l'ensemble des équations (1) et des trois premières équations (3); cette résolution aurait été ou non possible selon que le déterminant

$$(d') \qquad \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' - 1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' - 1 \end{vmatrix}$$

aurait été différent de zéro ou non. Dans le premier cas, les variables U, V, W pourraient être exprimées linéairement en u, v, w par des formules telles que (8) et la substitution (1) rendrait identique l'équation (7), en sorte que le déterminant

$$(d) \qquad \begin{vmatrix} \alpha + 1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' + 1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' + 1 \end{vmatrix}$$

serait nécessairement nul. Si, au contraire, le déterminant (d') était nul, on serait conduit à des équations telles que (5), à moins toutefois que la substitution (7) ne rendît identiques les équations

$$(9\,bis) \qquad \nu V - \mu W = 0, \quad \lambda W - \nu U = 0, \quad \mu U - \lambda V = 0.$$

On fera encore rentrer ce cas dans le précédent, en supposant que les quantités λ, μ, ν puissent devenir infinies.

En résumé, on parvient à deux systèmes de substitutions satisfaisant à la condition énoncée.

On rendra identique l'égalité

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

en faisant soit

$$(10) \qquad \begin{cases} x - X = \nu(f'_y + f'_Y) - \mu(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda(f'_z + f'_Z) - \nu(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu(f'_x + f'_X) - \lambda(f'_y + f'_Y), \end{cases}$$

soit

$$(11)\quad \begin{cases} f'_x + f'_X = \nu(y-Y) - \mu(z-Z), \\ f'_y + f'_Y = \lambda(z-Z) - \nu(x-X), \\ f'_z + f'_Z = \mu(x-X) - \lambda(y-Y). \end{cases}$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, on aura deux systèmes d'équations telles que (1), satisfaisant à la condition énoncée, les neuf coefficients de la substitution étant exprimés au moyen des coefficients de la forme quadratique et des trois quantités λ, μ, ν.

Mais il est aisé de passer d'un système à l'autre, comme on va le montrer, en transformant légèrement les équations (10). Multipliant ces équations par a, b'', b', et ajoutant, il vient

$$(12)\qquad f'_x - f'_X = \begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix}.$$

Posons

$$A = a'a'' - b^2,\quad A' = a''a - b'^2,\quad A'' = aa' - b''^2,$$
$$B = b'b'' - ab,\quad B' = b''b - a'b',\quad B'' = bb' - a''b'',$$
$$\Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2,$$

$$\lambda' = A\lambda + B''\mu + B'\nu,$$
$$\mu' = B''\lambda + A'\mu + B\nu,$$
$$\nu' = B'\lambda + B\mu + A''\nu,$$

et remarquons que l'on a

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda' & \Delta & \Delta(x+X) \\ \mu' & 0 & \Delta(y+Y) \\ \nu' & 0 & \Delta(z+Z) \end{vmatrix}$$
$$= \Delta^2[\nu'(y+Y) - \mu'(z+Z)],$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix} = \nu'(y+Y) - \mu'(z-Z);$$

on voit que l'équation (12) peut s'écrire

$$f'_x - f'_X = \nu'(y + Y) - \mu'(z + Z).$$

Cette équation, si l'on change respectivement λ, μ, ν et X, Y, Z en λ', μ', ν' et $-X$, $-Y$, $-Z$, deviendra la première des équations (11); en faisant le même changement dans les trois équations (10), on aura donc un système équivalent au système (11). Comme le nom des variables n'importe pas, on voit, en résumé, que, des deux systèmes de substitutions auxquels nous sommes parvenus, le premier peut être mis sous l'une ou sous l'autre des deux formes équivalentes qui suivent :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x - X = \nu\,(f'_y + f'_Y) - \mu\,(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda\,(f'_z + f'_Z) - \nu\,(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu\,(f'_x + f'_X) - \lambda\,(f'_y + f'_Y); \end{cases}$$

$$\text{(I } bis\text{)} \qquad \begin{cases} f'_x - f'_X = \nu'\,(y + Y) - \mu'(z + Z), \\ f'_y - f'_Y = \lambda'(z + Z) - \nu'\,(x + X), \\ f'_z - f'_Z = \mu'(x + X) - \lambda'\,(y + Y), \end{cases}$$

et que le second se déduit du premier en changeant X, Y, Z en $-X$, $-Y$, $-Z$:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x + X = \nu\,(f'_y - f'_Y) - \mu\,(f'_z - f'_Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$\text{(II } bis\text{)} \qquad \begin{cases} f'_x + f'_X = \nu'(y - Y) - \mu'(z - Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il suffit évidemment d'étudier le premier système.

La résolution des équations (I) se fait aisément, en considérant à la fois les six équations (I), (I *bis*), et les six inconnues x, y, z, f_x, f'_y, f'_z; on voit d'abord que

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Si l'on désigne ces deux quantités égales par Π, on aura

$$\lambda' f'_x + \mu' f'_y + \nu' f'_z = \lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z = \Delta\Pi.$$

Si, des deux dernières équations (I *bis*), on tire les valeurs de f'_y et de f'_z, et qu'on les porte dans la première équation (I), on aura

$$x - \mathrm{X} = 2(\nu f'_{\mathrm{Y}} - \mu f'_{\mathrm{Z}}) + \lambda'[\lambda(x+\mathrm{X}) + \mu(y+\mathrm{Y}) + \nu(z+\mathrm{Z})]$$
$$- (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')(x + \mathrm{X}),$$

ou encore

$$x(1+\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu') = \mathrm{X}(1-\lambda\lambda'-\mu\mu'-\nu\nu') + 2(\nu f'_{\mathrm{Y}} - \mu f') + 2\lambda'\Pi;$$

on trouvera de même

$$f'_x(1+\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu') = f'_{\mathrm{X}}(1-\lambda\lambda'-\mu\mu'-\nu\nu') + 2(\nu'\mathrm{Y} - \mu'\mathrm{Z}) + 2\Delta\Pi\lambda.$$

Si donc on pose

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'$$
$$= \mathrm{A}\lambda^2 + \mathrm{A}'\mu^2 + \mathrm{A}''\nu^2 + 2\mathrm{B}\mu\nu + 2\mathrm{B}'\lambda\nu + 2\mathrm{B}''\lambda\mu = \mathrm{F}(\lambda, \mu, \nu),$$

les six équations (I) et (I *bis*) pourront être remplacées par les six équations suivantes :

$$(\mathrm{I}\ ter)\ \left\{\begin{aligned}
x[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= \mathrm{X}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\nu f'_{\mathrm{Y}} - \mu f'_{\mathrm{Z}}) + 2\Pi\lambda',\\
y[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= \mathrm{Y}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\lambda f'_{\mathrm{Z}} - \nu f'_{\mathrm{X}}) + 2\Pi\mu',\\
z[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= \mathrm{Z}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\mu f'_{\mathrm{X}} - \lambda f'_{\mathrm{Y}}) + 2\Pi\nu';\\
f'_x[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= f'_{\mathrm{X}}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\nu'\mathrm{Y} - \mu'\mathrm{Z}) + 2\Delta\Pi\mu,\\
f'_y[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= f'_{\mathrm{Y}}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\lambda'\mathrm{Z} - \nu'\mathrm{X}) + 2\Delta\Pi\lambda,\\
f'_z[1+\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] &= f'_{\mathrm{Z}}[1-\mathrm{F}(\lambda,\mu,\nu)] + 2(\mu'\mathrm{X} - \lambda'\mathrm{Y}) + 2\Delta\Pi\nu.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on déduirait bien facilement les trois dernières des trois premières, ou inversement. Si l'on voulait avoir les équations résolues par rapport à X, Y, Z, il suffirait, dans les formules précédentes, de changer x, y, z en X, Y, Z, et réciproquement, puis λ, μ, ν en $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, et par conséquent Π en $-\Pi$, λ', μ', ν' en $-\lambda''$, $-\mu''$, $-\nu''$.

Si, dans les équations (1 *ter*), on remplace λ, μ, ν par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, qu'on chasse les dénominateurs et qu'on fasse $\rho = 0$, on trou-

15.

vera

$$x = -X + \frac{2\Pi\lambda'}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

$$y = -Y + \frac{2\Pi\mu'}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

$$z = -Z + \frac{2\Pi\nu'}{F(\lambda, \mu, \nu)}.$$

Ce sont les mêmes valeurs qu'on tirerait des équations (9 *bis*) ou

$$\frac{f'_x + f'_X}{\lambda} = \frac{f'_y + f'_Y}{\mu} = \frac{f'_z + f'_Z}{\nu},$$

en leur adjoignant la condition

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z);$$

car, si l'on désigne par t la valeur commune des trois rapports, on voit aisément que ces équations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$x = -X + \lambda' \frac{t}{\Delta},$$

$$y = -Y + \mu' \frac{t}{\Delta},$$

$$z = -Z + \nu' \frac{t}{\Delta};$$

t sera déterminé par l'équation

$$f(X, Y, Z) = f\left(-X + \lambda' \frac{t}{\Delta}, \; -Y + \mu' \frac{t}{\Delta}, \; -Z + \nu' \frac{t}{\Delta}\right),$$

ou

$$2(\lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z) = \frac{t}{\Delta} f(\lambda', \mu', \nu').$$

Or

$$\lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z = \Delta\Pi,$$

$$\begin{aligned} f(\lambda', \mu', \nu') &= \lambda' f'_{\lambda'} + \mu' f'_{\mu'} + \nu' f'_{\nu'} \\ &= \Delta(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = \Delta F(\lambda, \mu, \nu); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{t}{\Delta} = \frac{2\Pi}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

et l'on retombe par conséquent sur les mêmes valeurs que précédemment.

Pour résoudre les équations (II) ou (II *bis*), il suffira évidemment, dans les formules (I *ter*), de changer X, Y, Z en $-X$, $-Y$, $-Z$; on trouvera ainsi

$$\text{(II ter)}\quad \left\{\begin{array}{l} x[1+F(\lambda,\mu,\nu)] = -X[1-F(\lambda,\mu,\nu)] \\ \qquad\qquad\qquad -2(\nu f'_Y - \mu f'_Z) - 2\Pi\lambda', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

II.

Je passe maintenant à la question suivante : si, dans les équations (I), qui définissent x, y, z au moyen de X, Y, Z, on remplace X, Y, Z par des fonctions linéaires de X_1, Y_1, Z_1 définies par les équations (I) elles-mêmes, dans lesquelles on aurait substitué respectivement X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; λ_1, μ_1, ν_1 à x, y, z; X, Y, Z; λ, μ, ν, on exprimera x, y, z linéairement en X_1, Y_1, Z_1, de façon que l'on ait évidemment

$$f(x,y,z) = f(X_1, Y_1, Z_1),$$

en sorte que les coefficients de la substitution devront dépendre de trois quantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ analogues à λ, μ, ν; ces trois quantités dépendent évidemment de λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 et des coefficients de la forme quadratique : je me propose de les calculer.

Posons donc

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x - X = \nu\,(f'_y + f'_Y) - \mu\,(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda\,(f'_z + f'_Z) - \nu\,(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu\,(f'_x + f'_X) - \lambda\,(f'_y + f'_Y); \end{array}\right.$$

$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} f'_x - f'_X = \nu'(y + Y) - \mu'(z + Z), \\ f'_y - f'_Y = \lambda'(z + Z) - \nu'(x + X), \\ f'_z - f'_Z = \mu'(x + X) - \lambda'(y + Y); \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} X - X_1 = \nu_1(f'_Y + f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_Z + f'_{Z_1}), \\ Y - Y_1 = \lambda_1(f'_Z + f'_{Z_1}) - \nu_1(f'_X + f'_{X_1}), \\ Z - Z_1 = \mu_1(f'_X + f'_{X_1}) - \lambda_1(f'_Y + f'_{Y_1}); \end{array}\right.$$

$$(2\,bis)\quad \begin{cases} f'_X - f'_{X_1} = \nu'_1(Y + Y_1) - \mu'_1(Z + Z_1), \\ f'_Y - f'_{Y_1} = \lambda'_1(Z + Z_1) - \nu'_1(X + X_1), \\ f'_Z - f'_{Z} = \mu'_1(X + X_1) - \lambda'_1(Y + Y_1). \end{cases}$$

Les équations (1) et (1 *bis*) sont équivalentes ainsi que les équations (2) et (2 *bis*); les quantités λ', μ', ν', d'une part, et λ'_1, μ'_1, ν'_1, de l'autre, dépendent de λ, μ, ν et de λ_1, μ_1, ν_1, comme il a été expliqué dans la première Partie.

Tirant des deux dernières équations (2 *bis*) f'_Y et f'_Z, et les portant dans la première équation (1), il vient

$$(3)\quad \begin{cases} x - X = \nu(f'_y + f'_{Y_1}) - \mu(f'_z + f'_{Z_1}) \\ \qquad + \lambda'_1[\lambda(X+X_1) + \mu(Y+Y_1) + \nu(Z+Z_1)] - \Gamma(X+X_1), \end{cases}$$

en faisant

$$(4)\quad \begin{cases} \Gamma = \lambda\lambda'_1 + \mu\mu'_1 + \nu\nu'_1 = \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu' + \nu_1\nu' \\ \quad = A\lambda\lambda_1 + A'\mu\mu_1 + A''\nu\nu_1 \\ \qquad + B(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) + B'(\lambda\nu_1 + \lambda_1\nu) + B''(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu). \end{cases}$$

Tirant de même f'_Y et f'_Z des deux dernières équations (1 *bis*) et les portant dans la première équation (2), il vient

$$(5)\quad \begin{cases} X - X_1 = \nu_1(f'_y + f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_z + f'_{Z_1}) \\ \qquad - \lambda'[\lambda_1(x + X) + \mu_1(y + Y) + \nu_1(z + Z)] + \Gamma(x + X_1); \end{cases}$$

ajoutant les équations (3) et (5), et tenant compte des identités

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = \lambda x + \mu y + \nu z,$$
$$\lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1,$$

il vient

$$(6)\quad \begin{cases} (1 - \Gamma)(x - X) = (\nu + \nu_1)(f'_y + f'_{Y_1}) - (\mu + \mu_1)(f'_z + f'_{Z_1}) \\ \qquad + \lambda'_1[\lambda(x + X_1) + \mu(y + Y_1) + \nu(z + Z_1)] \\ \qquad - \lambda'[\lambda_1(x + X_1) + \mu_1(y + Y_1) + \nu_1(z + Z_1)]. \end{cases}$$

Or les deux derniers termes du second membre, si l'on y remplace $\lambda, \ldots, \lambda_1, \ldots$ par $\dfrac{a\lambda' + b''\mu' + b'\nu'}{\Delta}, \ldots, \dfrac{a\lambda'_1 + b''\mu'_1 + b'\nu'_1}{\Delta}, \ldots,$

deviennent

$$\frac{1}{\Delta}\lambda'_1[\lambda'(f'_x+f'_{X_1})+\mu'(f'_y+f'_{Y_1})+\nu'(f'_z+f'_{Z_1})]$$

$$-\frac{1}{\Delta}\lambda'[\lambda'_1(f'_x+f'_{X_1})+\mu'_1(f'_y+f'_{Y_1})+\nu'_1(f'_z+f'_{Z_1})],$$

en sorte que l'équation (6) prend la forme

$$(1-\Gamma)(x-X)=\left(\nu+\nu_1+\frac{\lambda'_1\mu'-\lambda'\mu'_1}{\Delta}\right)(f'_y+f'_{Y_1})$$
$$-\left(\mu+\mu_1+\frac{\nu'_1\lambda'-\nu'\lambda'_1}{\Delta}\right)(f'_z+f'_{Z_1}).$$

Si donc on pose

$$\mathcal{L}=\frac{\lambda+\lambda_1+\dfrac{\mu'_1\nu'-\mu'\nu'_1}{\Delta}}{1-\Gamma},\quad \mathfrak{M}=\frac{\mu+\mu_1+\dfrac{\nu'_1\lambda'-\nu'\lambda'_1}{\Delta}}{1-\Gamma},$$

$$\mathfrak{N}=\frac{\nu+\nu_1+\dfrac{\lambda'_1\mu'-\lambda'\mu'_1}{\Delta}}{1-\Gamma},$$

x, y, z s'exprimeront au moyen de X_1, Y_1, Z_1 par les formules

$$(7)\qquad \begin{cases} x-X_1=\mathfrak{N}(f'_y+f'_{Y_1})-\mathfrak{M}(f'_z+f'_{Z_1}),\\ y-Y_1=\mathcal{L}(f'_z+f'_{Z_1})-\mathfrak{N}(f'_x+f'_{X_1}),\\ z-Z_1=\mathfrak{M}(f'_x+f'_{X_1})-\mathcal{L}(f'_y+f'_{Y_1}),\end{cases}$$

qui sont tout à fait analogues aux formules (1).

Les valeurs de $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ peuvent être mises sous une forme un peu différente.

En faisant

$$\begin{aligned} l&=\mu\nu_1-\mu_1\nu,\\ m&=\nu\lambda_1-\nu_1\lambda,\\ n&=\lambda\mu_1-\lambda_1\mu,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L&=al+b''m+b'n,\\ M&=b''l+a'm+bn,\\ N&=b'l+bm+a''n,\end{aligned}$$

on vérifie aisément que l'on a

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \mu' \nu'_1 - \mu'_1 \nu',\\
\Delta M &= \nu' \lambda'_1 - \nu'_1 \lambda',\\
\Delta N &= \lambda' \mu'_1 - \lambda'_1 \mu';
\end{aligned}$$

les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ peuvent donc s'écrire sous la forme suivante, que leur a donnée M. Hermite :

$$\mathfrak{L} = \frac{\lambda + \lambda_1 - L}{1 - \Gamma}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\mu + \mu_1 - M}{1 - \Gamma}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\nu + \nu_1 - N}{1 - \Gamma}.$$

Nous avons combiné deux substitutions du type I; on obtiendra des résultats analogues en combinant deux substitutions du type II.

Si l'on fait

$$\begin{aligned}
x + X &= \nu (f'_y - f'_Y) - \mu (f'_z - f'_Z),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
X + X_1 &= \nu_1 (f'_Y - f'_{Y_1}) - \mu_1 (f'_Z - f'_{Z_1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned}
x - X_1 &= \mathfrak{N} (f'_y + f'_{Y_1}) - \mathfrak{M} (f'_z + f'_{Z_1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ conservant les mêmes valeurs que précédemment. En combinant deux substitutions appartenant toutes les deux au même type, on obtient donc comme résultat une substitution appartenant au premier type; au contraire, si l'on combine deux substitutions appartenant à des types différents, on obtient une combinaison appartenant au second type. Si l'on fait, par exemple,

$$\begin{aligned}
x - X &= \nu (f'_y + f'_Y) - \mu (f'_z + f'_Z),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
X + X_1 &= \nu_1 (f'_y - f'_{Y_1}) - \mu_1 (f_z - f'_{Z_1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

on trouvera, en changeant simplement X_1, Y_1, Z_1 en $-X_1$, $-Y_1$,

$-\mathbf{Z}_1$ dans les équations (7),

$$x + \mathbf{X}_1 = \mathfrak{N}(f'_y - f'_{\mathbf{Y}_1}) - \mathfrak{M}(f'_z - f'_{\mathbf{Z}_1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

naturellement les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont encore les mêmes.