BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 10 (1876), p. 73-105

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1876__10__73_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de conférences de l'École.

2e Série, t. III; année 1874 ([1]).

BACH. — *De l'intégration par les séries de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dy}{dx} = y.$$

(22 p.)

L'équation différentielle précédente, transformée bien connue de l'équation de Riccati, a été l'objet de nombreux travaux, dont les plus récents sont dus à MM. Cayley et Glaisher, et ont été insérés dans le *Philosophical Magazine* (novembre 1869 et juin 1872). C'est dans ces deux articles que l'auteur a puisé les éléments du travail actuel.

BRISSE (Ch.). — *Exposition analytique de la théorie des surfaces*. (60 p.)

Dans la première Section, l'auteur établit, à l'aide d'une transformation de coordonnées, les formules relatives au déplacement le plus général d'un trièdre trirectangle, et il en déduit la portion des formules de M. Codazzi, qui est indépendante de la position du trièdre par rapport à la surface. Il prouve ensuite, à l'aide de l'analyse bien connue de M. O. Bonnet, que six fonctions quelconques satisfaisant à ces trois équations définissent toujours le déplacement d'un trièdre autour de son sommet et n'en définissent qu'un.

En exprimant que le trièdre a deux de ses arêtes tangentes à une surface, on trouve la portion des formules de M. Codazzi en coordonnées rectangulaires et en coordonnées obliques, sous la forme où M. Laguerre les a données dans les *Nouvelles Annales* de 1872.

En exprimant que le trièdre est formé par la tangente, la normale et la binormale d'une courbe gauche, on obtient, au lieu des

([1]) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 196.

formules de M. Codazzi, les formules de M. Serret. Comme on a quelquefois à différentier ces formules jusqu'à un ordre élevé, l'auteur publie les résultats de cette différentiation jusqu'au sixième ordre. Il en déduit plusieurs formules qui conduisent à des théorèmes de Géométrie infinitésimale déjà démontrés par M. O. Bonnet.

Cette Section se termine par les formules qui donnent le plan osculateur, le rayon de courbure et le rayon de torsion d'une ligne tracée sur une surface, quand on connaît l'angle sous lequel elle coupe les lignes coordonnées. Ces formules sont dues à M. Laguerre.

Dans la deuxième Section sont démontrés le théorème d'Euler, celui de Gauss relatif à la courbure, celui de Meusnier. De l'étude des normales autour d'un point l'auteur déduit ensuite toutes les expressions connues de la torsion géodésique, de l'angle de deux normales infiniment voisines et de la courbure géodésique.

Dans la troisième Section se trouvent définies les lignes de courbure, les asymptotiques et les géodésiques. M. Brisse y donne le théorème de Lancret, et, d'après M. O. Bonnet, l'application de la théorie du dernier multiplicateur de Jacobi à l'intégration des géodésiques.

Enfin la quatrième Section est consacrée à l'étude des surfaces, lieux de normales.

Le travail sera continué.

Bouquet. — *Note sur le calcul des accélérations des divers ordres dans le mouvement d'un point sur une courbe gauche.* (4 p.)

L'auteur fait connaître dans ce travail la méthode qu'il a donnée depuis longtemps dans son enseignement pour le calcul des accélérations d'ordre supérieur. La méthode générale est appliquée au calcul complet des trois premières accélérations.

Durrande (H.). — *Étude de l'accélération dans le déplacement d'un système de forme variable.* (14 p.)

Dans un Mémoire inséré au tome II de ce Recueil, l'auteur a abordé une étude presque entièrement nouvelle, et il s'est occupé du déplacement d'une figure qui subit en même temps une déformation homographique. Mais ce premier Mémoire ne comprenait que l'étude des vitesses; l'étude des accélérations fait l'objet du travail actuel.

L'auteur montre que l'accélération peut être décomposée en trois autres. Il retrouve, pour représenter la déformation, une surface du second degré analogue à celle qu'il a rencontrée dans l'étude des vitesses, et il insiste principalement sur les propriétés qui ne font pas double emploi avec celles du précédent Mémoire.

Pepin (le P.). — *Nombre des classes de formes quadratiques pour un déterminant donné.* (44 p.)

Cette question a été résolue par Dirichlet dans ses *Recherches sur les applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des nombres.* M. Hermite y est revenu dans le t. LV des *Comptes rendus.* La solution proposée par l'auteur n'emprunte à l'Analyse supérieure que les notions les plus élémentaires sur la quadrature des surfaces planes. Il obtient ainsi un théorème général, d'où l'on déduit sans peine soit les formules données par Gauss dans deux Mémoires présentés à la Société de Göttingue en 1824 et 1837, pour exprimer le nombre des systèmes de valeurs de x et de y qui donnent à la forme

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

dont le déterminant est un nombre négatif, des valeurs que ne surpassent pas une limite donnée, soit les formules analogues données par Dirichlet pour les déterminants positifs. L'auteur déduit de ces formules le rapport entre les nombres de classes proprement primitives pour deux déterminants dont le rapport est un carré, ainsi que le rapport entre les deux nombres de classes comprises dans les deux ordres primitifs, pour un même déterminant. Le problème se trouve ainsi ramené à celui de trouver le nombre de classes proprement primitives pour un déterminant qui n'est divisible par aucun carré. Cette condition remplie par le déterminant permet de généraliser la formule employée par Dirichlet pour exprimer le nombre de représentations de n par le système des formes quadratiques diverses qui représentent l'ordre proprement primitif pour ce déterminant. Cette marche conduit l'auteur à une simplification analogue à celle de M. Hermite dans le travail cité plus haut.

Combescure (É.). — *Sur quelques questions qui dépendent des différences finies ou mêlées.* (58 p.)

Les différentes questions de Géométrie traitées jusqu'ici par les géomètres et dont la solution dépend du calcul des différences finies ou mêlées ont été principalement empruntées à la Géométrie plane. L'auteur s'est occupé de quelques questions du même genre dépendant de la Géométrie à trois dimensions.

Ainsi le § III traite des courbes composées individuellement de parties semblables; le § IV des courbes planes semblables à leurs $n^{\text{ièmes}}$ podaires correspondantes, et d'un cas particulier relatif aux courbes gauches. Le § V est consacré aux courbes semblables aux lieux correspondants des centres des sphères osculatrices.

Dans le § VI, l'auteur, généralisant un problème d'Euler, cherche la surface telle que le carré de la normale, terminée au plan, supposé horizontal, des xy, surpasse d'une quantité constante donnée l'ordonnée verticale de la même surface menée par le pied de cette normale.

Nous n'avons signalé dans cette analyse que les applications : le travail débute par des remarques analytiques générales.

T. IV; année 1875.

Darboux (G.). — *Mémoire sur les fonctions discontinues.* (56 p.)

Dans son célèbre Mémoire *Sur les séries trigonométriques,* Riemann a montré que la notion d'intégrale définie était applicable à des fonctions discontinues dans tout intervalle, et donné les conditions nésessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit susceptible d'intégration; l'existence de pareilles fonctions discontinues suffit à prouver qu'il y a des fonctions continues qui n'admettent point de dérivées. Ces singulières fonctions demandaient une étude, qui a été entreprise par divers géomètres; on peut citer parmi eux MM. Hankel, Gilbert, Schwarz, Klein. Dans le Mémoire qui nous occupe, M. Darboux apporte sa contribution à cet important chapitre du Calcul intégral, signale plusieurs fonctions nouvelles, et cherche à mettre dans l'énoncé et la démonstration des diverses propositions cette rigueur qu'on a le droit d'exiger dans les questions de principes.

Après avoir insisté sur ce qu'il faut entendre par une fonction bien définie, et montré que, si une fonction qui, en général, est de cette nature, devient indéterminée pour certaines valeurs de la variable, on doit, pour ces valeurs, la définir arbitrairement; la continuité, si elle existe, ne suffisant pas à cette définition, l'auteur adopte la définition des fonctions continues qu'a donnée M. O. Bonnet : *Une fonction $f(x)$ est dite* continue pour la valeur $x = x_0$ *quand on peut prendre h assez petit pour que l'on ait*

$$f(x_0 \pm \theta h) - f(x_0) < \varepsilon$$

en valeur absolue, θ pouvant prendre toutes les valeurs positives plus petites que 1, *et ε étant aussi petit qu'on le voudra.* Elle sera dite *continue entre* x_0 et x_1 $(x_0 < x_1)$ si elle est continue pour les valeurs intermédiaires, et si l'on a

$$\lim f(x_0 + h) = f(x_0), \quad \lim f(x_1 - h) = f(x_1),$$

h tendant vers zéro par des valeurs positives. Il introduit ensuite, pour une fonction bien définie dans un intervalle a, b de la variable, la notion des limites supérieure et inférieure M, m de la fonction, limites telles qu'il y ait au moins une valeur de la fonction supérieure à $M - \varepsilon$ et une inférieure à $m - \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on le voudra; la différence $M - m$ prend, d'après Riemann, le nom d'*oscillation de la fonction dans l'intervalle* a, b. Une fonction continue dans cet intervalle passe par toutes les valeurs intermédiaires à ses limites et atteint ces dernières valeurs. (*Voir* le *Bulletin,* t. III, p. 307.)

Ces diverses notions permettent de faire, dans les fonctions discontinues, une distinction capitale qui repose sur la proposition suivante :

Soit $f(x)$ une fonction définie dans un intervalle a, b, et assujettie à rester comprise entre deux limites fixes A, B; *intercalons entre a et b, $n - 1$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et faisons*

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2 \ldots, \quad b - x_{n-1} = \delta_n;$$

désignons par M_i, m_i, Δ_i *les limites et l'oscillation de la fonction dans l'intervalle* δ_i, *et posons*

$$\begin{aligned} M &= M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \ldots + M_n\delta_n, \\ m &= m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_n\delta_n, \\ \Delta &= \Delta_1\delta_1 + \Delta_2\delta_2 + \ldots + \Delta_n\delta_n; \end{aligned}$$

les trois sommes M, m, Δ, *qui sont liées par la relation identique*

$$\Delta = \mathrm{M} - m$$

tendront, lorsque, n augmentant indéfiniment, les intervalles δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ *décroissent indéfiniment, vers des limites déterminées qui ne dépendent que des limites* a, b *de la variable et de la nature de la fonction.*

Les fonctions discontinues se distinguent d'après cela en deux grandes classes, selon que la limite Δ_{ab} qui correspond à l'intervalle a, b est nulle ou non. Riemann a donné un caractère qui permet de distinguer les deux cas : Δ tend ou non vers zéro, suivant que la grandeur totale des intervalles pour lesquels l'oscillation est plus grande que σ tend ou non vers zéro, quand les intervalles intercalés entre a et b diminuent indéfiniment; σ est une quantité fixe, qui peut être prise aussi petite qu'on veut.

Il suit de là que les fonctions continues rentrent dans la première catégorie; M. Thomae a, en effet, établi la proposition suivante [1] :

Étant donnée une fonction $f(x)$ *continue dans l'intervalle* a, b, *on peut assigner pour chaque valeur de* σ, *aussi petite qu'on le veut, une quantité* δ *telle que, si l'on subdivise l'intervalle* a, b *en intervalles tous plus petits que* δ, *les oscillations de la fonction dans ces intervalles soient toutes plus petites que* δ.

La démonstration que donne M. Darboux de cette proposition repose sur la seule définition de la fonction continue, et s'applique au cas de plusieurs variables.

Enfin les fonctions qui, dans l'intervalle a, b, ne sont discontinues que pour des valeurs particulières en nombre limité, et qui restent finies pour ces valeurs particulières, rentrent aussi dans la première catégorie.

Si, en général, $f(x)$ est une fonction de la première catégorie entre a et b, la somme

$$\delta_1 f(x + \theta_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2 \delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_{n-1} \delta_{n-1}),$$

---

(1) *Abriss einer Theorie der complexen Funktionen.*

où a, x_1, x_2,..., x_{n-1}, δ_1, δ_2,..., δ_n ont le même sens que précédemment, et où les θ sont des quantités quelconques comprises entre zéro et 1, tend vers une limite déterminée; c'est, par définition, l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

de la fonction $f(x)$, prise entre les limites a et b; pour les fonctions de la seconde espèce, cette somme est indéterminée, et peut varier entre M et m. Il suit de là que toutes les fonctions continues et les fonctions qui ont le genre de discontinuité dont nous venons de parler ont une intégrale; que cette intégrale ne change pas si, pour des valeurs particulières en nombre fini de la variable, on change la valeur de la fonction, et que l'intégrale d'une fonction continue est elle-même une fonction continue.

Passant ensuite à l'étude des séries, M. Darboux introduit la notion essentielle des séries uniformément (*gleichmässig*) convergentes, séries qui ont été l'objet de récents et importants travaux. Ce qui caractérise ces séries, dont les termes sont d'ailleurs des fonctions continues ou discontinues de la variable x dans un intervalle donné (a, b), c'est que l'on peut toujours prendre n assez grand pour que le reste R_n de la série qui correspond au $n^{\text{ième}}$ terme soit inférieur à une quantité σ aussi petite qu'on le veut pour toutes les valeurs de x égales à a, b ou comprises entre a et b. Dans une telle série, si les termes sont des fonctions continues de x, la série elle-même est une fonction continue; si les termes sont simplement susceptibles d'intégration, la série jouira de la même propriété, et son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes; inversement, étant donnée une série $f(x)$ dont tous les termes sont des fonctions continues ayant des dérivées, si la série des dérivées est uniformément convergente dans un intervalle donné, et si les termes sont susceptibles d'intégration, elle représentera la dérivée de la série $f(x)$.

On a maintenant les éléments essentiels pour construire des fonctions discontinues dans tout intervalle et des fonctions n'admettant point de dérivées pour des valeurs de la variable aussi rapprochées qu'on voudra, et même n'admettant de dérivées pour aucune valeur de la variable.

Considérons, en effet, quelqu'une de ces fonctions de x, dont la valeur pour $x = x_1$ dépend de la façon dont x tend vers x_1, celles, par exemple, qui tendent vers deux valeurs distinctes selon que x tend vers x_1 par des valeurs négatives ou par des valeurs positives; si $\varphi(x)$ est une telle fonction, nous désignerons ces valeurs par $\varphi(x_1 - 0)$ et $\varphi(x_1 + 0)$: telle est la fonction $E(x)$ qui représente le plus grand nombre entier contenu dans x; si n est un entier, on aura

$$E(n-0) = n-1, \quad E(n) = n, \quad E(n+0) = n.$$

Si

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots$$

est une série uniformément convergente, et si

$$\varphi_1(x_1 - 0), \quad \varphi_2(x_1 - 0), \quad \varphi_3(x_1 - 0), \ldots$$

existent, ainsi que

$$\varphi_1(x_1 + 0), \quad \varphi_2(x_1 + 0), \quad \varphi_3(x_1 + 0), \ldots,$$

$f(x_1 - 0)$ et $f(x_1 + 0)$ existeront aussi, et l'on aura

$$f(x_1 - 0) = \varphi_1(x_1 - 0) + \varphi_2(x_1 - 0) + \ldots,$$
$$f(x_1 + 0) = \varphi_1(x_1 + 0) + \varphi_2(x_1 + 0) + \ldots.$$

Cela posé, considérons, par exemple, la série

$$f(x) = a_1 \frac{E(x)}{x} + a_2 \frac{E(2x)}{2x} + a_3 \frac{E(3x)}{3x} + \ldots.$$

Si la série des constantes

$$A = a_1 + a_2 + \ldots$$

est absolument convergente, la série $f(x)$ sera uniformément convergente, et l'on aura

$$f(x \mp 0) = \Sigma a_n \frac{E(nx \pm 0)}{nx};$$

si x est incommensurable, $f(x)$ est continue; si x est égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on aura

$$f(x+0) = f(x),$$
$$f(x-0) = f(x) - \frac{1}{qx}\left(a_q + \frac{a_{2q}}{2} + \frac{a_{3q}}{3} + \ldots\right).$$

Or la série $f(x)$ a tous ses termes susceptibles d'intégration; on trouve aisément

$$\int_0^x \frac{E(nx)}{x}\,dx = \log\varphi(nx),$$

où

$$\varphi(x) = \frac{x^{E(x)}}{1.2.3\ldots E(x)},$$

et par suite

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \sum \frac{\log\varphi(nx)}{n}.$$

Voici donc une fonction continue qui admet une dérivée pour toutes les valeurs incommensurables de x, et qui n'en admet point pour les valeurs commensurables, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ tendant vers deux limites distinctes, selon que h tend vers zéro par des valeurs positives ou par des valeurs négatives. On conçoit que, par des procédés plus ou moins analogues, on puisse former autant de fonctions que l'on voudra qui présentent des singularités du même genre. Un exemple d'un autre genre est donné par la série

$$\sum \frac{\sin[1.2.3\ldots(n+1)x]}{1.2.3\ldots n},$$

qui est uniformément convergente, et représente une fonction continue : cette fonction n'admet de dérivée pour *aucune* valeur de x.

L'auteur termine son Mémoire en montrant qu'il existe des fonctions discontinues qui jouissent d'une propriété que l'on regarde quelquefois comme le caractère distinctif des fonctions continues, celle de ne pouvoir varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires; telles sont les fonctions dont la dérivée existe pour toutes les valeurs de x, mais est discontinue. On peut citer, par exemple, la fonction obtenue en intégrant la série uniformément convergente

$$f(x) = \Sigma\pi a_n\varphi'(\sin nx\pi)\cos nx\pi,$$

où la série des a_n est absolument convergente, et où l'on suppose

$$\varphi(y) = y^2 \sin\frac{1}{y},$$

$$\varphi'(y) = 2y \sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y} \quad \text{pour} \quad y \quad 0,$$

et

$$\varphi'(0) = 0.$$

Resal (H.). — *Application de la flexion circulaire des lames élastiques au tracé des arcs de cercle.* (14 p.)

Le tracé d'un arc de cercle, que l'on pourra, si l'on veut, supposer déterminé par trois de ses points, n'est pas sans difficultés pratiques lorsque le rayon du cercle est très-grand. M. Tchébychef a proposé, pour éluder ces difficultés, un instrument qui se compose en principe d'une lame élastique, lame qu'on peut, par un mécanisme particulier, faire fléchir, de façon que son profil ait huit points communs avec un arc de cercle auquel on peut substituer ce profil par approximation.

M. Resal propose et décrit un instrument qui permet aussi de résoudre le problème pratique. Cet instrument est composé essentiellement d'une lame élastique encastrée par ses extrémités dans deux pièces mobiles à volonté autour de deux axes fixes; en faisant tourner en sens inverse ces encastrements d'un même angle, le profil de la lame affectera la forme d'un arc de cercle, où, en raison de la symétrie, les encastrements ne donneront lieu qu'à des couples égaux et de sens contraire.

M. Resal détermine ensuite les modifications apportées dans son appareil à la forme circulaire de la lame par la courbure de cette lame dans les encastrements, puis par les frottements.

Tannery (J.). — *Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables.* (70 p.)

La considération des variables imaginaires a permis aux géomètres contemporains d'aborder l'étude des fonctions définies par des équations différentielles. On ne s'était guère occupé jusqu'ici que des équations du premier ordre. Dans ces dernières années, un géomètre allemand, M. Fuchs, a publié d'importants Mémoires sur les équations linéaires d'ordre quelconque. Dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences, M. Tannery a exposé et complété les recherches de M. Fuchs. Il ne sera pas inutile d'attirer l'attention des géomètres sur ce remarquable travail en en signalant les principaux résultats.

I. La première Section est consacrée à la définition précise de l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes, sauf en des points particuliers. La démonstration repose sur les principes employés par MM. Briot et Bouquet, pour une équation du premier ordre et pour un système d'équations du premier ordre. Une équation d'ordre quelconque pouvant se ramener à un système d'équations du premier ordre, les mêmes principes devaient s'appliquer. Cependant, à cause de l'importance de la classe d'équations dont il s'agit, il était intéressant d'avoir une démonstration directe.

II. M. Tannery s'occupe ensuite de la forme particulière à l'intégrale générale d'une équation différentielle linéaire. On sait que cette intégrale est de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_m y_m,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ étant des constantes arbitraires, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ des fonctions telles que le déterminant

$$\Delta = \left| \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \quad \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}}, \quad \ldots, \quad y_m \right|$$

soit différent de zéro. En adoptant pour les constantes un système de valeurs, on forme m autres intégrales particulières : le déterminant Δ_1 relatif à ces m fonctions nouvelles est lié à Δ par la relation

$$\Delta_1 = \delta \Delta,$$

δ étant le déterminant des coefficients de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dans les fonctions nouvelles. On a donc à la fois un moyen simple de reconnaître si un système d'intégrales est *fondamental*, c'est-à-dire formé d'intégrales *distinctes*, et d'en déduire autant de systèmes fondamentaux qu'on voudra. Quand on déduit les intégrales y_1, $y_2, \ldots, y_m$ les unes des autres par des substitutions bien connues, de la forme

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

on obtient un système fondamental, et le déterminant Δ prend une forme très-simple.

III. Quand la variable décrit un petit cercle autour d'un point singulier, les nouvelles valeurs des intégrales sont liées aux premières par des relations linéaires à coefficients constants, et, si les m intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ forment un système fondamental, leurs nouvelles valeurs jouissent de la même propriété. Cette proposition est de la plus haute importance dans cette théorie ; car on montre que, si, lorsque la variable tourne autour d'un point singulier, les nouvelles valeurs de m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sont liées aux valeurs initiales par des équations linéaires à coefficients constants, ces fonctions sont les intégrales d'une équation linéaire à coefficients uniformes. En particulier, les m solutions d'une équation algébrique d'ordre m, se permutant quand la variable tourne autour d'un point critique, sont les solutions d'une équation différentielle d'ordre m, que M. Tannery apprend à former.

Parmi les systèmes fondamentaux d'intégrales, il en est un dont les éléments se décomposent en groupes tels que, dans un même groupe, les nouvelles valeurs de chaque élément, après que la variable a décrit un petit cercle autour d'un point singulier, sont des fonctions linéaires homogènes des anciennes valeurs de l'élément dont on s'occupe et de ceux qui précèdent. La considération de ce système particulier montre que, dans le *domaine* du point singulier $x = a$, les intégrales sont de la forme

$$(x-a)^r\{\varphi_0 + \varphi_1 \log(x-a) + \ldots + \varphi_\lambda[\log(x-a)]^\lambda\},$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda$ étant des fonctions uniformes dans le domaine du point a.

IV. Parmi les équations linéaires, il faut remarquer celles dont toutes les intégrales restent finies pour $x = a$, quand on les multiplie par des puissances convenables de $x - a$, et pour $x = \infty$ quand on les multiplie par certaines puissances de x. Ces équations sont de la forme

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1}{x-a}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2}{(x-a)^2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P_m}{(x-a)^m}y,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_m$ étant des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point a. Ce résultat paraît être le plus important de la nouvelle théorie. Il en résulte que :

Les équations différentielles linéaires à coefficients uniformes dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *et restent finies pour chacun de ces points singuliers quand on les multiplie par une puissance de* $x - a$, *et pour* $x = \infty$ *quand on les multiplie par une puissance convenable* x, *sont de la forme*

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{p-1}}{\psi(x)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(p-1)}}{[\psi(x)]^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{F_{m(p-1)}}{[\psi(x)]^m} y,$$

où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_p),$$

et où les F *désignent des polynômes entiers en* x *dont le degré ne dépasse pas l'indice.*

Et réciproquement :

L'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_1}{x - a} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{P_2}{(x - a)^2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + \frac{P_m}{(x - a)^m} y,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *sont des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point* a, *admet dans le domaine de ce point un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis pour* $x = a$, *quand on le multiplie par une puissance convenable de* $x - a$. *Ces intégrales sont de la forme indiquée à la fin du* § III, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ *désignant des fonctions uniformes et continues dans le domaine du point* a.

V. M. Tannery tire des résultats précédents diverses conditions auxquelles doit satisfaire une équation différentielle pour que toutes ses intégrales soient algébriques ; puis il applique les résultats du § IV à des équations spéciales, en particulier à l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique.

Lemonnier (H.). — *Mémoires sur les fonctions elliptiques qui correspondent à la fonction* $\cos x + i \sin x$. (67 p.)

Les trois fonctions représentées, en adoptant les notations de MM. Briot et Bouquet, par les formules

$$\mu(z) + i\lambda(z), \quad \nu(z) + ki\lambda(z), \quad \frac{\nu(z) + k\mu(z)}{k'},$$

se présentent naturellement dans les recherches relatives aux fonctions elliptiques, et méritent l'étude particulière que M. Lemonnier en a entreprise.

Dans un premier Mémoire, l'auteur signale les propriétés fondamentales de ces fonctions, leurs zéros et leurs infinis; il donne ensuite leurs développements en série de produits, en sommes de fractions, en séries circulaires, et traite les mêmes questions sur leurs rapports qui n'ont que des zéros et des infinis doubles.

M. Lemonnier annonce trois autres Mémoires sur les mêmes fonctions. Nous aurons donc l'occasion de revenir sur son travail.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON.

T. XXXV; 1874-1875 (suite) ([1]).

Mai 1875.

DUNKIN (ED.). — *Sur le mouvement propre de l'étoile 793 dn British Association Catalogue.*

Le mouvement propre remarquable de cette étoile (qu'on connaît encore sous les noms de Piazzi II 123, Taylor II 228, W. 156 et Weisse II 464) et sa variabilité apparente ont attiré, depuis quelque temps, l'attention des astronomes; aussi a-t-elle été inscrite par l'Astronome Royal, en 1852, sur la liste d'observation journalière, comme un des astres dont il fallait une détermination exacte; et, depuis, on en a fait à l'Observatoire de Greenwich d'assez nombreuses observations qui ont été publiées dans le *Six-year Catalogue* et le *Seven-year Catalogue*. (Ce dernier en renferme 29 observations en Æ et 30 en D. P. N., distribuées presque uniformément de 1854 à 1858.) M. Smyth paraît n'avoir pas eu connaissance de ces observations. En les faisant toutes entrer en ligne de compte et les discutant avec soin, M. Dunkin arrive à une conclusion différente de celle de M. Smyth; et d'après lui, sauf les variations dues aux erreurs d'observation qui influent surtout lorsqu'il y a peu d'observations de l'étoile dans la même année, on doit considérer la variation annuelle

---

([1]) Voir *Bulletin*, t. X, p. 37.

de cette étoile comme constante, soit en ascension droite, soit en déclinaison.

Wilson (J.-M.). — *Sur la révolution de l'étoile double η de la Couronne boréale.*

Les valeurs différentes trouvées pour la durée de la révolution de cette étoile par les astronomes qui en ont successivement calculé l'orbite, présentent le caractère remarquable qu'elles diminuent progressivement à mesure que l'époque du calcul se rapproche de nous. Ainsi :

Herschel,	en 1833,	trouve...........	ans 44,242
Mädler,	en 1838,	»	43,310
Mädler,	en 1842,	»	43,456
Mädler,	en 1847,	»	42,500
Villarceau,	en 1854,	»	42,501

M. Wilson a repris le calcul de cette orbite, et, se fondant sur les observations récentes de Dembowski, Dawes, Talmage, Gledhill, Smyth, Seabroke et lui-même, il arrive à une durée de révolution égale à

41,2 ans.

Il semble donc, en effet, qu'il y ait dans la durée de chaque révolution successive une diminution accompagnée sans doute d'un déplacement de la ligne des apsides.

Struve (O. v.). — *Observations et orbite de l'étoile n° 1728 du Catalogue de Struve* (Σ, 1728, *ou* 42 *de la Chevelure de Bérénice.*)

Cette étoile double, découverte par W. Struve en 1826, attira particulièrement toute son attention dès 1833, époque à laquelle elle offrit, pour la première fois, l'apparence d'une étoile unique; depuis lors, elle a été observée aussi régulièrement que possible chaque année par W. Struve, d'abord à Dorpat, et par son fils ensuite à Poulkova. Ce système binaire est, en effet, fort intéressant. D'abord ses deux composantes sont de même grandeur (la 6^e, d'après W. Struve) et de même éclat, à tel point qu'il est impossible de les distinguer l'une de l'autre à la simple inspection. De plus, leur mouvement relatif est rectiligne, car les angles de position observés aux différentes époques ont sensiblement la même valeur.

M. O. Struve publie aujourd'hui les éléments de l'orbite auxquels ont conduit les quarante années d'observations de son père et lui, ainsi que celles, plus récentes, de MM. Dawes, Secchi et Dembowski.

Tout d'abord, pour déterminer la durée de la révolution, on a actuellement quatre occultations successives de l'une des étoiles par l'autre, en 1834, 1845, 1859 et 1870-1871. L'intervalle qui sépare deux occultations successives n'est pas constant; il est tantôt d'environ douze ans, tantôt d'environ quatorze ans : la durée de la révolution est donc de près de vingt-six ans et de plus l'orbite du système binaire est très-excentrique, et son grand axe n'est pas fort incliné sur la direction suivant laquelle nous voyons les étoiles.

D'autre part, puisque l'angle de position ne varie pas sensiblement, c'est que le plan de cette orbite passe par le Soleil. M. O. Struve admet que l'inclinaison de ce plan sur celui du cercle de déclinaison est de 90 degrés, et que l'angle compris entre le nœud ascendant et le cercle de déclinaison est de 10 degrés, valeur moyenne de toutes les directions observées; des sept éléments nécessaires pour déterminer l'orbite, il n'en reste donc plus que cinq à chercher.

Or, en 1866, M. O. Struve avait donné les valeurs suivantes :

Temps de passage ou périastre............	$T = 1860,0$
Angle dans le plan de l'orbite entre le périastre et le nœud ascendant...........	$\lambda = 100°$
Demi-grand axe..........................	$a = 0'',693$
Excentricité............................	$e = 0,50$
Durée de la révolution en années..........	$P = 26,0$

Un assistant de l'Observatoire de Poulkova, M. Dubiago, a comparé toutes les *distances* observées aux *distances* (¹) correspondantes déduites de ces éléments, et il a été conduit à modifier comme il suit les valeurs données plus haut :

T.............	$1869,92 \pm 0,080$
λ..............	$99°,11' \pm 0°,45',6$
a.............	$0'',657 \pm 0'',0126$
e..............	$0,0480 \pm 0,0239$
P.........	$25^{ans},71 \pm 0,084$

(¹) On ne peut en effet se servir ici des angles de position.

M. Struve considère ces éléments comme aussi exacts que possible, et il fait remarquer ce fait curieux et jusqu'alors isolé, que l'orbite de l'étoile 1728 du Catalogue de Struve se trouve entièrement déterminée par les distances seules.

DOBERCK (W.). — *Éléments de systèmes stellaires doubles.*

En admettant les notations précédentes et désignant en outre par N l'angle compris entre le nœud ascendant et le cercle de déclinaison et par i l'inclinaison du plan de l'orbite sur celui du cercle de déclinaison, M. Doberck, astronome du colonel Cooper, donne, pour les orbites de μ^2 du Bouvier et b de la Couronne, les éléments suivants :

	μ^2 Bouvier.	b de la Couronne.
N	182°.59′	6°.45′
i	44.26	29.40
λ	17.41	89.17
e	0,6174	0,7502
P	290$^{\text{ans}}$,07	843$^{\text{ans}}$,2
T	1863,51	1828,91
a	1″,500	6″,0010

KNOTT (G.). — *Sur l'étoile* 61 *des Gémeaux.*

A propos de la Note de M. Webb, M. Knott fait remarquer que, lui aussi, a cherché vainement le Compagnon signalé par l'amiral Smyth, les 2 et 26 février 1861 et le 20 décembre 1871, avec un objectif d'Alvan Clark, dont l'ouverture a 7,33 pouces (0^m, 19) d'ouverture.

Juin 1875.

WARREN DE LA RUE. — *Installation des instruments de M. Warren de la Rue au nouvel Observatoire de l'Université d'Oxford.*

Ces instruments, aujourd'hui complétement installés, sont les suivants :

1° Le télescope de 13 pouces (0^m,33) d'ouverture, dont M. de la Rue s'est servi à Canonbury, puis plus tard à Cranford, et qui est monté équatorialement;

2° Un second télescope, semblable au précédent, destiné à l'observation des zones;

3° Une machine pour le polissage des miroirs et tout ce qui est nécessaire au polissage des miroirs paraboliques ou plans;

4° Un appareil de Foucault pour l'essayage des miroirs;

5° Deux miroirs de 13 pouces de rechange.

Le nouvel Observatoire Savilien possède donc en tout actuellement quatre miroirs de $0^m,33$ d'ouverture; deux sont métalliques et ont été polis par M. Warren de la Rue; les deux autres sont en verre et proviennent, l'un de Steinheil, l'autre de With.

Liais (Emm.). — *Sur les oppositions de Mars pour la détermination de la parallaxe solaire.*

M. Emm. Liais, directeur de l'Observatoire de Rio-Janeiro, fait remarquer l'accord entre la valeur $8'',760$ de la parallaxe solaire déduite de ses observations de Mars, à son opposition en 1860, avec le nombre qui résulte des expériences de M. Cornu sur la vitesse de la lumière combinée avec la valeur de la constante de l'aberration donnée par Struve. Les valeurs les plus récentes de la constante de l'aberration sont les suivantes :

Struve (1843)........	$20'',445$
Lindenau (1842).........	20,449
Peters (1850).....	20,503
Lundahl (1832)...............	20,550
Moyenne...	20,487

Or cette valeur moyenne, combinée avec la valeur trouvée par M. Cornu pour la vitesse de la lumière, conduit au nombre

$$8'',779$$

pour la parallaxe solaire, nombre qui ne diffère que de $0'',02$ de celui que nous citions d'abord. M. Liais se propose d'ailleurs de profiter des oppositions de 1875 et 1877, qui ont lieu dans des circonstances favorables, pour reprendre ses observations de 1860.

Proctor (R.-A.). — *Sur la Photographie dans le passage de Vénus.*

Knobel (E.-B.). — *Sur l'application de la méthode des ouvertures réduites à la photométrie des étoiles visibles à l'œil nu.*

Les expériences de M. Knobel sur la classification exacte des étoiles par ordre de grandeur sont intéressantes : en se servant d'un miroir non argenté et du diaphragme triangulaire, dont nous avons parlé plus haut, il arrive à pouvoir éteindre toutes les étoiles, depuis la 1^re^ jusqu'à la 9^e^ ou 10^e^ grandeur, et avec le miroir argenté il éteint les étoiles de la 8^e^ à la 15^e^ grandeur. Ce procédé paraît donc extrêmement propre à relier par une chaîne ininterrompue les étoiles télescopiques aux étoiles visibles à l'œil nu.

WOLFERS (F.-Ph.). — *Comparaison des ascensions droites et des déclinaisons des étoiles fondamentales observées à l'Observatoire de Radcliffe (Oxford), avec les ascensions droites et les déclinaisons tabulaires des mêmes étoiles dans le* Berliner Jahrbuch.

MAIN (R.). — *Observations des occultations et des phénomènes des satellites de Jupiter, faites à l'Observatoire de Radcliffe, en* 1874 *et* 1875.

DUNKIN (E.). — *Note additionnelle sur le mouvement propre de l'étoile* B.A.C.793 (*Piazzi,* II 123).

M. Dunkin complète la Note qu'il a déjà publiée, le mois dernier, en rappelant que, dans les *Untersuchungen über die Eigenbewegungen von* 250 *Sternen,* Argelander comprenait cette étoile, parmi celles dont le mouvement propre est supérieur à la moyenne [1]. De plus, ce même Mémoire renferme une comparaison des positions de cette étoile données dans les différents Catalogues depuis Lalande, avec l'époque 1794,0, et de celles que donne le Catalogue de Paris, avec l'époque 1864,0, comparaison qui met en évidence des irrégularités considérables dans les résultats déduits des différentes observations.

DOBERCK (W.). — *Éléments de τ Ophiuchus et γ Lion.*

En adoptant les mêmes notations que plus haut, on a :

	τ Ophiuchus.	γ Lion.
N..........	$67^\circ 1'$	$111^\circ 50'$
i..........	$36^\circ 26'$	$43^\circ 59'$
λ..........	$46^\circ 8'$	$194^\circ 22'$
e..........	0,6055	0,7390
P..........	$217^{\text{ans}},87$	$402^{\text{ans}},62$
T..........	1818,50	1741,11
a..........	$1'',193$	$2'',087$

(1) *Bonner Observationen,* t. VII; 1869.

W. Abney (W. de w.). — *Sur un diaphonomètre.*

Juillet 1875.

Le Verrier (U.-J.). — *Sur la théorie de Saturne et la marche de Jupiter.*

Cette Communication est la traduction de la Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* des 23 et 30 août 1875.

Lambert (S.-J.). — *Remarque sur les dessins faits par miss Hirst à Auckland (Nouvelle-Zélande.)*

Miss Hirst s'occupe d'Astronomie depuis seize ans; l'instrument dont elle se sert est un télescope de Browning à miroir de verre argenté de 8 $\frac{1}{2}$ pouces ($0^{m},22$) d'ouverture. M. Lambert présente en son nom des dessins de la planète Jupiter, relatifs à l'opposition de 1875, et des observations de passages des satellites et de leurs ombres sur le disque de la planète. Ces passages présentent ce curieux phénomène, surtout pour le satellite III, que, lorsque le satellite arrive au voisinage des bords de la planète, ceux-ci paraissent se prolonger à l'est et à l'ouest en une bande lumineuse, tandis que la tache qui représente le satellite reste uniformément obscure.

Quant aux dessins de la planète, ils montrent que celle-ci a dû subir quelques changements durant la dernière opposition.

Tennant (R.-E.). — *Sur une apparence particulière dans les ombres des taches solaires.*

Le colonel Tennant a revu nettement le fait signalé autrefois par M. Langley : « des filaments d'une ténuité incomparable paraissent de temps en temps projetés sur les ombres des taches, produisant par leur ensemble une apparence très-analogue à celle de la laine cardée. »

Newcomb (S.). — *Sur la position des équinoxes.*

Les positions de l'équinoxe, déduites des observations de Washington et de Greenwich, offrent une différence de $0^{s},067$, qui s'est maintenue même après le renouvellement complet des instruments d'observation. M. Newcomb se déclare complétement incapable d'indiquer la cause de cette divergence. En fait, tandis que les deux Observatoires donnent le même résultat pour l'ascension droite absolue du Soleil, ou pour l'instant de l'équinoxe, les différences des ascensions droites du Soleil et des étoiles sont constamment plus grandes de 1 seconde pour Greenwich que pour Washington.

Wackerbarth (A.-D.). — *Corrections à la liste des ascensions droites de* 103 *étoiles fondamentales données par M. le professeur Gyldén dans le numéro de mai* 1875.

Tebbutt (J.). — *Observation de la Comète de Coggia* III, 1874.

Doberck (W.). — *Éléments des étoiles doubles* ζ *du Verseau,* 36 *Andromède et* ι *Lion.*

	ζ du Verseau.	36 Andromède.
Passage au périhélie.......	1924,15	1798,80
Angle de position du nœud ascendant..............	140° 51′	57° 54′
Angle dans le plan de l'orbite entre le périastre et le nœud ascendant........	134° 40′	142° 19′
Inclinaison sur le plan du cercle de déclinaison....	40° 42′	41° 39′
Période en années........	1578,33	349,1
Demi-grand axe..........	7′,64	1″,54
Excentricité.............	0,6518	0,6537

Pour le système binaire formé par ι du Lion, on a :

Angle de position....	$93°,75 - 0,544(t - 1830)$
Distance...............	$2'',20 + 0'',01\,(t - 1830)$

Struve (O.). — *Système stellaire multiple formé par l'étoile* ζ *de la constellation de l'Écrevisse.*

Ce système stellaire est formé par trois belles étoiles de 5^e à 6^e grandeur, de couleur jaune et d'éclat un peu variable. Avec une bonne jumelle de spectacle on aperçoit très-aisément deux des étoiles de ce groupe, ou plutôt on sépare l'une d'elles de l'ensemble très-lumineux que forment les deux autres; avec cette jumelle, on aperçoit, à 5 secondes environ de distance, une étoile de 5^e,5 grandeur, et une autre plus brillante et moins nette de 5^e grandeur. La première, que nous désignerons par C, est simple, mais l'autre est en réalité double, ainsi que sir William Herschel l'a reconnu le premier en février 1781, et l'image que nous avions obtenue tout à l'heure résultait de la superposition des images de deux étoiles, l'une A de 5^e^ et l'autre B de 6^e^ grandeur, dont la distance est en moyenne d'environ $0'',8$, et qu'un objectif de 6 pouces ($0^m,16$) sépare aisément dans la plupart des cas.

Tel est le système stellaire que, après W. Herschel, ont étudié successivement sir James South à Passy, près de Paris, en 1825, Wilhelm Struve à Dorpat, de 1826 à 1830, et son fils, M. Otto Struve à Poulkova, de 1840 à 1874. De toutes leurs observations, il résulte que l'on se trouve bien en présence d'un groupe physique, d'un monde particulier; car les trois étoiles dont nous parlons sont entraînées d'un mouvement d'ensemble, avec une vitesse commune d'environ $0'',15$ par an ([1]). Tel était l'état de nos connaissances au sujet de ce groupe stellaire, lorsque M. O. Struve en a repris l'étude. Ses belles observations y ont beaucoup ajouté.

Considérons d'abord la partie principale du groupe, les astres dominants A et B : la seconde de ces étoiles décrit autour de la première une orbite dont M. Struve a calculé les éléments, qui sont les suivants :

Angle de position du périastre................	$199°,0$
Angle de position du nœud ascendant.........	$109°,0$
Inclinaison...................................	$20°,7$
Excentricité..................................	$0,353$
Demi-grand axe..............................	$0''908$
Durée de la révolution en années...............	$62,4$
Époque la plus récente du passage au périastre.	$1869,3$

Or la combinaison des mesures faites par Herschel, en 1781, avec celles de M. Struve conduit, au contraire, à cette conclusion que les deux astres ont effectué une révolution complète au bout de 59,4 années. Cette différence de deux années ne peut être entièrement attribuée aux erreurs d'observation; car, la variation annuelle de l'angle de position de B étant d'environ 6 degrés, il faudrait admettre une erreur de 10 à 12 degrés dans l'angle de position donné

([1]) Si, prenant arbitrairement la masse de l'étoile A égale à 10 fois celle du Soleil (la masse de Sirius est égale à 14), on calcule la parallaxe de ζ de l'Écrevisse, à l'aide des formules données par Savary dans la *Connaissance des Temps* pour 1830, on voit que ce déplacement angulaire correspond à une vitesse de 31 lieues par seconde et double de la vitesse linéaire de la 61^e^ du Cygne.

par Herschel, ce qui n'est guère probable. N'y aurait-il pas plutôt là une raison de croire, ou tout au moins de supposer, une action perturbatrice due à la troisième étoile? Cette conclusion, quelque difficile à admettre qu'elle paraisse au premier abord, en raison de l'énorme distance du groupe (A, B) à l'étoile C (avec la parallaxe 0″,006, calculée comme nous l'avons dit plus haut, elle est d'environ 6000 fois la distance de la Terre au Soleil), se trouve cependant confirmée par les observations de M. O. Struve, qui croit avoir reconnu des traces de cette attraction dans ses mesures de distances entre les deux étoiles A et B, et peut-être aussi par l'étude de la troisième étoile C de ce groupe. M. Struve rapporte les positions successives de l'étoile C au centre optique O des étoiles A et B, qu'il suppose intimement liées entre elles. Il reconnaît ainsi que l'angle de position de C, qui a changé de 23° environ depuis 1826, ne varie pas uniformément. Ce mouvement du rayon vecteur change, au contraire, par périodes alternatives d'environ dix ans, pendant lesquelles il est tantôt plus rapide, parfois nul et parfois même rétrograde; en outre, les accroissements rapides du mouvement angulaire sont toujours accompagnés d'un accroissement très-net de la distance, et les variations en sens inverse d'une diminution bien accusée. Ces irrégularités sont d'ailleurs trop considérables pour pouvoir être attribuées à des erreurs d'observation, et leur périodicité montre bien qu'elles résultent d'un phénomène physique déterminé, que M. Struve pense être dû, au moins en partie, aux variations des attractions exercées sur C par les étoiles A et B.

Serrons d'ailleurs le problème de plus près : toutes les positions observées de l'étoile C sont suffisamment bien représentées par les deux formules suivantes, où P est l'angle de position par rapport au centre O, d la distance à ce centre et T l'époque de l'observation :

$$P = 155^\circ - 0^\circ{,}50\,(T - 1831{,}3) - 3^\circ \sin 18^\circ\,(T - 1831{,}3),$$
$$d = 5'',5 + 0'',20 \cos 18^\circ\,(T - 1831{,}3).$$

Si l'on remarque que, à la distance de 5″,5, un arc de 3 degrés correspond à une longueur mesurée par 0″,29, on conclura, de l'examen des derniers termes des deux formules précédentes, que les irrégularités présentées par l'orbite de l'étoile C s'expliquent assez bien, en supposant que, tout en se mouvant autour du centre O sur une orbite régulière, cette étoile décrit en outre, dans une période d'environ vingt ans, une orbite secondaire approximativement circulaire et de $0'',2$ à $0'',3$ de rayon. Les attractions qu'exercent les étoiles A et B sur la troisième composante C du système stellaire peuvent-elles rendre compte complétement de ces variations? ou bien, et cela paraît plus probable, ces attractions, si elles existent, ne seraient-elles point concomitantes avec l'action d'un corps perturbateur encore inconnu, éteint ou incandescent, satellite ou nouveau soleil de ce monde éloigné? Telle est l'opinion du savant directeur de l'Observatoire de Poulkova. C. A.

МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ.

T. VII, 3e et 4e cahiers. — Moscou, 1874 (1).

Sonine (N.-J.). — *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* (34 p.)

M. Sonine fait remarquer que les géomètres peu nombreux qui se sont occupés jusqu'à ce jour de ce problème n'ont donné pour sa solution que des méthodes particulières ou artificielles, n'ayant aucun lien commun. Ainsi Lagrange (2) se borne à indiquer le nombre de constantes arbitraires dans les intégrales complètes et le moyen de transformation de ces intégrales en intégrales générales. La méthode d'Ampère (3), fondée sur la transformation des variables indépendantes, est artificielle. M. Darboux (4), tout en prenant pour point de départ la méthode d'Ampère, arrive à indiquer une nouvelle méthode, correspondant à celle de Jacobi pour les équations du premier ordre; mais l'auteur ne pense pas qu'il ait complétement réussi.

En partant d'un nouveau point de vue, qui semble très-naturel, M. Sonine établit un procédé d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, qui

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 233.

(2) *Sur les intégrales particulières des équations différentielles.* — *Œuvres*, t. IV.

(3) *Journal de l'École Polytechnique*, XVIIe cahier, 1875.

(4) *Annales de l'École Normale*, 1870.

relie entre eux les résultats obtenus par Lagrange et ceux d'Ampère et de M. Darboux.

Voici, en quelques mots, le résumé de cette méthode :

Soit une équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}) = 0$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z' = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z'_{,} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad z_{,,} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et en général $z^i_k = \dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}$.

Le but du problème est de déterminer z en fonction de x et y. Si ce but était atteint, on pourrait obtenir les valeurs de dérivées de z qui transformeraient en identités les expressions

$$(2) \quad dz = z'\,dx + z_{,}dy, \quad dz' = z''\,dx + z'_{,}\,dy, \quad dz_{,} = z'_{,}\,dx + z_{,,}\,dy;$$

et réciproquement, si l'on pouvait trouver des valeurs de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ en fonction de $x, y, z, z', z_{,}$, satisfaisant identiquement à l'équation (1) et permettant d'intégrer le système (2), en éliminant entre les trois intégrales de ce système z' et $z_{,}$, on obtiendrait z en fonction de x et y.

En un mot, intégrer l'équation (1) signifie intégrer complétement le système (2), dans lequel les coefficients z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ doivent être considérés comme des fonctions des $x, y, z, z', z_{,}$, satisfaisant identiquement à $f = 0$ et aux conditions d'intégrabilité des équations (2).

Au lieu de déterminer d'abord les fonctions z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ et d'intégrer ensuite (2), on peut étudier immédiatement les intégrales de (2), que l'on appellera *intégrales du premier ordre* de (1), et soit $\varphi(x, y, z, z', z_{,}) = a$ l'une d'elles.

En vertu des équations (2), la différentielle $d\varphi$ doit être identiquement nulle; on aura donc deux équations

$$(4) \qquad \varphi' + z''\frac{\partial \varphi}{\partial z'} + z'_{,}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} = 0, \qquad \varphi_{,} + z'_{,}\frac{\partial \varphi}{\partial z'} + z_{,,}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} = 0,$$

qui, combinées avec (1), suffiront pour déterminer les valeurs de z'', $z'_{,}$, $z_{,,}$ en fonction de $x, y, z, z', z_{,}$, ou n'y suffiront pas. On partagera donc les intégrales du premier ordre de $f = 0$ en deux classes, et l'on appellera en particulier *intégrale de premier ordre et de première classe* les expressions $\varphi = a$ qui, combinées avec $f = 0$, ne suffisent pas pour déterminer les dérivées secondes de z.

Nous ne reproduirons pas, faute d'espace, les diverses équations de condition qui doivent être satisfaites pour obtenir φ. Nous nous bornerons à dire que cette recherche revient à l'intégration d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et que φ peut contenir une, deux ou trois constantes arbitraires.

Il est clair que, dans le cas de deux ou trois constantes, on obtient, en posant l'une des constantes égale à une fonction arbitraire des autres et en éliminant ces dernières entre l'intégrale donnée et ses dérivées, une intégrale de première classe avec une fonction arbitraire. Cette dernière n'est autre que l'intégrale générale de Lagrange, tandis que l'intégrale à deux constantes arbitraires est son intégrale complète.

Si l'équation (1) admet une intégrale de premier ordre et de première classe, et que cette intégrale soit trouvée, la solution complète du problème est ramenée à l'intégration de deux équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et l'on obtient une intégrale finie avec deux fonctions arbitraires.

Dans le cas où les intégrales de première classe ne peuvent pas être déterminées, on a recours aux intégrales de seconde classe.

Soient

$$(5)\qquad F_1(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}) = a_1, \quad F_2(x, \ldots, z_{,,}) = a_2$$

deux équations qui, combinées avec l'équation (1), fournissent les valeurs des secondes dérivées de z satisfaisant aux conditions d'intégrabilité du système (2), et soient

$$(6)\qquad F_3(x, y, \ldots, z_{,,}) = a_3, \quad F_4 = a_4, \quad F_5 = a_5$$

les intégrales de ce système.

Si l'on différentie les équations (5), (6) et (1), et si l'on en déduit les différentielles des six variables dépendantes, les résultats satisferont évidemment aux six équations

$$(7)\qquad \begin{cases} dz = z'\,dx + z_{,}\,dy, & dz' = z''\,dx + z'_{,}\,dy, & dz_{,} = z'_{,}\,dx + z_{,,}\,dy, \\ dz'' = z'''\,dx + z''_{,}\,dy, & dz'_{,} = z''_{,}\,dx + z'_{,,}\,dy, & dz_{,,} = z'_{,,}\,dx + z_{,,,}\,dy, \end{cases}$$

et l'on peut considérer les équations (5), (6) et (1) comme des intégrales du système (7), dans lequel les troisièmes dérivées de z sont des fonctions de toutes les autres variables. Or, $f = 0$ étant une intégrale particulière de (7), la différentielle de f doit être identiquement nulle, ce qui donne deux équations pareilles aux équations (4) qui, combinées avec l'équation (1), doivent fournir les troisièmes dérivées de z, satisfaisant aux conditions d'intégration.

Au lieu de cela, on peut, comme dans le premier cas, considérer immédiatement les intégrales de (7), que l'on appellera *intégrales du second ordre* de l'équation donnée.

Soit $F = a$ une de ces intégrales. Il peut arriver, comme précédemment, que les équations qu'on obtient en égalant à zéro les différentielles de F et de f soient suffisantes pour déterminer les quatre dérivées troisièmes de z, ou qu'elles ne le soient pas.

On partagera, d'après cela, les intégrales F du second ordre en deux classes, la *première* correspondante au second cas et la *seconde* correspondante au premier cas.

Ainsi la recherche des intégrales de premier ordre et de seconde classe est ramenée à celle des intégrales *du second ordre et de la première classe*.

Par une analyse semblable à celle qu'on a employée dans la recherche des intégrales de première classe et du premier ordre, on établit les conditions nécessaires pour trouver une intégrale de première classe et de second ordre. Dans le cas où cette intégrale existe, elle contient une fonction arbitraire sous le signe de laquelle peuvent rentrer z et ses dérivées *du premier ordre seulement*.

Une de ces intégrales $F = a$ étant trouvée, on peut en obtenir une autre semblable $\Phi = A$, et l'on démontre que cette recherche conduit à trouver en même temps et $F = a$ et les valeurs des troisièmes dérivées de z.

Cela obtenu, pour résoudre complétement le problème, il suffit de substituer dans les équations (7) les valeurs des troisièmes dérivées de z et de trouver les trois autres intégrales de ce système, ou, ce qui revient au même, de déterminer les secondes dérivées de z à l'aide des équations $F = a$, $\Phi = A$, $f = a$, et d'intégrer le système (2). Il est facile de voir que, si F contient une fonction arbitraire, l'intégrale finie en contiendra deux.

Si la recherche des intégrales de première classe et de second ordre est infructueuse, on aura recours aux intégrales de seconde classe dont la recherche peut être ramenée, comme il est facile de s'en apercevoir, à celle des intégrales de première classe et de troisième ordre, et ainsi de suite.

Dans tous les cas, étant trouvée une intégrale de première classe d'un ordre quelconque n, la solution complète du problème se réduit à l'intégration d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, laquelle fournit une expression finie de z contenant deux fonctions arbitraires et $2n-1$ constantes, celles-ci *pouvant* être réunies à celles-là.

L'auteur fait remarquer enfin que ses recherches peuvent aussi conduire à une solution complète du problème de l'intégration d'un système d'équations simultanées, lorsque l'une d'elles est du second ordre, les autres devant être considérées comme les intégrales de celle-là.

Schiller (N.-N.). — *Recherches expérimentales sur les vibrations électriques.* (54 p., 1 pl.)

Berg (Dr F.). — *Détermination d'une orbite elliptique d'après trois observations.* (35 p.)

L'auteur propose un procédé simplifié, tout en étant rigoureux, et conduisant à l'emploi d'un nombre de logarithmes inférieur à celui qui résulte des méthodes de Hansen ou de Gauss.

Tsinger (V.-I.). — *De la signification géométrique des inégalités.* (11 p.)

La signification géométrique des inégalités de la forme $F(x,y)>0$ ou $F(x,y,z)>0$, employées fréquemment dans la Géométrie et dans la Mécanique, n'est pas précisée avec assez de rigueur. Ordinairement on se borne à faire voir que la courbe ou la surface $F=0$ sépare les points pour lesquels $F>0$ des points déterminés par $F<0$.

Ces conclusions ne sont vraies que dans certaines conditions particulières; elles cessent d'être exactes lorsque l'on considère les équations dans toute leur généralité.

En effet, l'équation d'une courbe n'a rien de parfaitement déterminé; elle représente une relation entre les coordonnées, à laquelle on peut donner diverses formes, pourvu qu'on n'introduise aucun multiplicateur ayant une signification géométrique différente, c'est-à-dire pourvu qu'on ne réunisse pas à la courbe de nouveaux points situés à des distances finies. Une équation à deux variables $f(x,y)-c=0$ représente, si l'on fait varier c, toute une famille de courbes. L'ensemble des courbes d'une famille peut remplir entièrement l'espace, ou une portion seulement de cet espace. Dans ce dernier cas, il y a une certaine limite (l'enveloppe par rapport au paramètre c) qui sépare les points pour lesquels les valeurs de $f(x,y)$ sont réelles de ceux pour lesquels ces valeurs sont imaginaires.

Si, en même temps que $f=0$, on considère deux autres équations

$$f(x,y)-c=\alpha \quad \text{et} \quad f(x,y)-c=-\alpha,$$

où α est un infiniment petit, les trois courbes représentées par ces équations se couperont en général en certains points a, b, c, .. de la première. Il en résulte que $f(x,y)-c$, nul sur cette courbe reçoit les valeurs positives ou négatives, tantôt d'un côté, tantôt de l'autre de cette courbe, les changements de signe ayant lieu aux points a, b, c,.... L'enveloppe étant le lieu de ces derniers points, les zones des valeurs positives ou négatives de $f(x,y)-c$ sont comprises entre cette enveloppe et les arcs ab, bc,.... Ces zones peuvent se superposer en partie, et, dans ce cas, les deux inégalités contraires ont lieu simultanément.

Les points situés de deux côtés différents d'une courbe seront déterminés par des inégalités contradictoires seulement dans le cas où les positions infiniment voisines de la courbe ne se coupent pas.

M. Tsinger éclaircit ces considérations par des exemples particuliers tirés de la considération : 1° des ellipses concentriques ; 2° des coniques passant par quatre points donnés et enfin des coniques $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k^2$, en y posant successivement $k^2=ab$ et $b^2=ka$.

Sloudskï (T.-A.). — *Du nombre des conditions pouvant être exprimées par des inégalités.* (5 p.)

A l'aide de considérations géométriques très-simples, l'auteur démontre que :

Pour un système de n points dont les liaisons sont exprimées respectivement par $3n-1$ et $3n-2$ équations, le nombre de conditions exprimées par des inégalités *linéaires* [1] ne peut surpasser un et deux. Si le nombre d'équations est égal ou inférieur à $3n-3$, le nombre d'inégalités est illimité.

Bougaïef (N.-V.). — *Quelques questions d'Algèbre numérique.* (13 p.)

Cette Note a pour objet la théorie des équations dépendantes des fonctions numériques et, en particulier, du symbole E, c'est-à-dire des équations de la forme

$$(1)\qquad \psi(x) = \mathrm{E}\,\psi_1(x),$$

le symbole E étant défini par la relation

$$(2)\qquad x = \mathrm{E}x + \omega,$$

où ω est une quantité positive plus petite que l'unité.

L'auteur désigne cette quantité par le symbole $(0, 1)$ et l'appelle *unité arbitraire*. En général, le symbole (a, b), *quantité arbitraire*, représente une grandeur variable entre les *limites* b et a. La différence $b-a$ est son *échelle de variabilité*. Toute quantité arbitraire peut être mise sous la forme $p+q\omega$, en vertu de l'égalité suivante :

$$(a, b) = a + (0, b-a) = a + (b-a)(0, 1) = a + (b-a)\omega.$$

L'expression $f(a+b\omega)$ est appelée *fonction de la quantité arbitraire*.

En vertu de la relation (2) l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{I})\qquad \psi(x) = \psi_1(x) - \omega,$$

où $\omega = (0, 1-\varepsilon)$. Cette équation, appelée l'*équation fondamentale* de (1), détermine les limites des racines de (1).

Si $\xi = \theta(\omega)$ est une des racines de (I), pour qu'elle satisfasse à (1),

---

[1] On appelle *inégalité linéaire* une relation de la forme

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + \ldots + p \gtrless 0.$$

il faut que $\psi(\xi) = \psi[\theta(\omega)]$ soit un nombre entier. Donc, si l'on désigne par $E_1 \psi[\theta(\omega)]$ tous les nombres entiers que l'on obtiendra en faisant varier ω de zéro à $1 - \varepsilon$, les racines de (1) seront données par l'équation *résolvante*

$$\text{(I)} \qquad \psi(x) = E_1 \psi \theta(\omega).$$

Les valeurs de x tirées de cette dernière satisferont à l'équation (1), pourvu qu'elles soient comprises entre les limites de variabilité de ξ.

Dans le cas où $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ sont des fonctions algébriques de x, l'équation (I) admettra en général m racines, dont chacune donnera naissance à une *classe* de racines de (1).

Une quelconque de ces classes sera caractérisée par l'équation $\xi_k = \theta_k(\omega)$, dont la résolvante correspondante $\psi(x) = E_1 \psi \theta_k(\omega)$ aura n racines, dont chacune fournira un *groupe* de racines de (1). Le nombre de racines de chaque groupe ne dépassera pas le nombre des nombres entiers obtenus au moyen de l'expression $\psi \theta_k(\omega)$ en y faisant varier ω de zéro à $1 - \varepsilon$.

En particulier, pour une équation de premier degré de la forme $ax + b = E(cx + d)$, l'équation fondamentale $a\xi + b = c\xi + d - \omega$ fournira la valeur de ξ, et l'on aura

$$a\xi + b = \frac{ad - bc}{a - c} - \frac{a\omega}{a - c} = \text{entier}.$$

La résolvante sera donc

$$ax + b = E_1\left(\frac{ad - bc}{a - c} - \frac{a\omega}{a - c}\right),$$

d'où l'on tirera x.

Les équations du premier degré ont une classe et un groupe de racines.

Le Mémoire est terminé par la recherche du nombre des racines d'une équation numérique du premier degré; ce nombre peut varier de zéro à l'infini.

SERDOBINSKÏ (V.-E.). — *Résolution de l'équation*

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = E(a_1 x^2 + b_1 x + c_1).$$

(23 p.)

Si, dans une équation numérique $\psi(x) = E\psi_1(x)$, on pose $\psi(x) = m =$ entier, et si l'on tire de cette dernière relation la valeur de $x = \varphi(m)$, l'équation donnée prendra la forme

$$M = E\{\psi_1[\varphi(m)]\} = E\{m + \psi_1[\varphi(m)] - m\},$$

d'où l'on voit qu'elle ne pourra être satisfaite qu'à la condition que l'on ait

$$\psi_1[\varphi(m)] - m = 0, \quad \psi_1[\varphi(m)] < 1.$$

La résolution d'une équation numérique peut donc être ramenée à l'examen du reste ci-dessus.

En égalant à m le premier membre de l'équation (1), on aura, en vertu de la définition de E,

$$(2) \qquad a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = m + \theta,$$

où

$$(3) \qquad 0 \leqq \theta < 1,$$

équation qui sera transformée en identité par la substitution des racines x_1, x_2 de l'équation $ax^2 + bx + c = m$.

En tirant de l'équation (2), ainsi transformée, la valeur de θ et la substituant dans l'expression (3), on obtiendra les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer le nombre entier et positif m, et par conséquent les racines x_1, x_2.

Les inégalités auxquelles on parvient ainsi présentent onze cas différents selon les valeurs des coefficients.

L'auteur examine ces différents cas, et résume les résultats de ces recherches dans un tableau qui donne une quantité auxiliaire n déterminant les limites de m.

Liventsof (A.-J.). — *Étude de la force tangentielle dans le mouvement tautochrone.* (25 p.)

Newton a démontré géométriquement que, dans le vide, la force tangentielle qui produit un mouvement tautochrone est proportionnelle à l'arc restant à parcourir.

L'auteur donne une démonstration analytique générale de ce théorème et de son inverse, à l'aide de la formule d'Abel. Il examine ensuite le cas où le mouvement a lieu dans un milieu résistant, la résistance étant proportionnelle à la vitesse ou au carré de cette vitesse.

Enfin il aborde le problème dans toute sa généralité, tel qu'il a été posé par Lagrange : « Trouver une force considérée comme fonction de la vitesse et de l'espace qui produirait le tautochronisme », et dont la solution est donnée par la formule connue

$$p = v^2 \left[\frac{\varphi\left(\frac{v}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{1}{\xi}\frac{d\xi}{ds} \right] \quad (^1).$$

M. Bertrand a fait remarquer que le problème posé dans ces termes est indéterminé et que la formule ci-dessus ne s'applique qu'au cas où la résistance est proportionnelle à une fonction de la vitesse, de la forme $a + bv + cv^2$. M. Liventsof démontre que cette formule contient tous les cas de tautochronisme, et qu'il n'y en a pas d'autres.

Minine (A.). — *Développement en série numérique de la fonction*

$$\left(n - 2\mathrm{E}\frac{n}{2}\right)\left(n - 3\mathrm{E}\frac{n}{3}\right)$$

représentant le produit des restes de la division d'un nombre n par 2 *ou* 3. (5 p.)

Sloudskï (T.-A.). — *Du nombre des positions d'équilibre d'un prisme triangulaire flottant.* (15 p.)

Si la section droite du prisme est un triangle acutangle, le nombre de ses positions d'équilibre ne peut pas dépasser 18. Il se réduit à 8 pour le cas où cette section est un triangle obtusangle ou rectangle.

Ces résultats, déduits de considérations géométriques, sont déterminés par les conditions exprimées par des inégalités de la forme $\xi \lesseqgtr \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2}$, où ξ est la densité relative du prisme, a, b, c les côtés de sa section droite. A. P.

(1) Dans cette formule, $p =$ force, $v =$ vitesse, $\varphi =$ une fonction arbitraire de $\frac{v}{\xi}$, ξ une fonction arbitraire de l'espace s, qui devient nulle pour $s = 0$.