BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

N. NICOLAÏDÈS

Sur quelques surfaces à courbure constante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 142-145

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__142_1>

SUR QUELQUES SURFACES A COURBURE CONSTANTE;

Par M. N. NICOLAÏDÈS.

Je représente par a la première courbure absolue de l'un systèmes des lignes de courbure d'une surface, et par b cell second système. Si a et b sont constants pour tous les points surface, elle sera à courbure constante, c'est-à-dire que le pr des deux courbures principales sera constant pour tous ses pc

On peut démontrer cette proposition en se servant des équations fondamentales ; on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \frac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} = \mathrm{EE_1HH_1},\\ &\frac{\partial.\mathrm{EH}}{\partial u_1} = \mathrm{H_1}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial.\mathrm{E_1H_1}}{\partial u} = \mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u},\\ &\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1} = -\,\mathrm{EE_1G}, \qquad \frac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u} = \mathrm{EE_1G_1}.\end{aligned}\right.$$

H, H_1 sont les courbures normales des lignes de courbure ; G, G_1 les courbures géodésiques, et E, E_1 les coefficients qui figurent dans l'expression de l'arc.

On a, par hypothèse,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{G}^2 + \mathrm{H}^2 = a^2,\\ &\mathrm{G}_1^2 + \mathrm{H}_1^2 = b^2,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{EG}\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} + \mathrm{EH}\frac{\partial.\mathrm{EH}}{\partial u_1} = a^2\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1},\\ &\mathrm{E_1G_1}\frac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} + \mathrm{E_1H_1}\frac{\partial.\mathrm{E_1H_1}}{\partial u} = b^2\mathrm{E_1}\frac{\partial \mathrm{E_1}}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

d'où, en ayant égard aux équations (1),

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \mathrm{EE_1HH_1} = -\,a^2\mathrm{EE_1},\\ &\frac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} + \mathrm{EE_1HH_1} = b^2\mathrm{EE_1};\end{aligned}\right.$$

par conséquent,

$$\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} - \frac{\partial.\mathrm{E_1G_1}}{\partial u} = (2\mathrm{HH_1} - a^2 - b^2)\mathrm{EE_1},$$

c'est-à-dire (1)

$$(5)\qquad \mathrm{HH_1} = a^2 + b^2;$$

a et *b* étant constants par hypothèse, il s'ensuit que HH_1, c'est-à-dire le produit des deux courbures principales de la surface, est aussi constant.

Il est à remarquer que l'intégration des équations fondamentales s'achève aisément dans ce cas particulier. En effet, en combinant les équations (3) et (1), on obtient

$$\mathrm{EG}\,\frac{\partial.\mathrm{EG}}{\partial u_1} = -\,b^2\mathrm{E}\,\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u_1},$$

$$\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1\,\frac{\partial.\mathrm{E}_1\mathrm{G}_1}{\partial u} = -\,a^2\mathrm{E}_1\,\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial u},$$

d'où

$$\mathrm{E}^2\mathrm{G}^2 + b^2\mathrm{E}^2 = \mathrm{U},$$

$$\mathrm{E}_1^2\mathrm{G}_1^2 + a^2\mathrm{E}^2 = \mathrm{U}_1,$$

U, U_1 étant deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de u_1. Mais on peut prendre ces fonctions égales à l'unité, en espaçant convenablement les lignes du réseau; les équations précédentes deviennent, par conséquent,

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathrm{G}^2 + b^2 = \dfrac{1}{\mathrm{E}^2}, \\ \mathrm{G}_1^2 + a^2 = \dfrac{1}{\mathrm{E}_1^2}, \end{cases}$$

et encore, (2) et (5),

$$(7)\qquad \mathrm{E}^2 + \mathrm{E}_1^2 = \frac{1}{a^2 + b^2};$$

enfin, en combinant ces trois dernières équations avec les deux dernières (1), on obtient les valeurs de E, E_1; on a

$$(8)\qquad \begin{cases} f - u_1 = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,d\mathrm{E}}{\sqrt{1-b^2\mathrm{E}^2}\,\sqrt{1-(a^2+b^2)\mathrm{E}^2}}, \\ f_1 + u = \displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+b^2}\,d\mathrm{E}_1}{\sqrt{1-a^2\mathrm{E}_1^2}\,\sqrt{1-(a^2+b^2)\mathrm{E}_1^2}}, \end{cases}$$

f et f_1 étant deux fonctions arbitraires qui seront déterminées par la condition (6). D'ailleurs, les valeurs de E et E_1, substituées dans les équations (2) et (5), donneront celles de H, H_1, G, G_1.

Nous avons à communiquer à nos lecteurs une douloureuse nouvelle. Un de nos collaborateurs les plus zélés et les plus éminents, M. Painvin, s'est éteint le 12 octobre dernier dans sa cinquantième année, après une longue et cruelle maladie. Les géomètres connaissent depuis longtemps les beaux travaux qu'il a publiés en si grand nombre; nos professeurs appréciaient et étudiaient les excellentes leçons de Géométrie analytique qui reproduisaient et développaient la matière de son enseignement. Il appartient à ceux d'entre nous qui l'aimaient et le voyaient de près de rendre justice à ses belles qualités morales, à son ardeur infatigable au travail, à la loyauté qu'il apportait dans toutes ses relations, au soin jaloux avec lequel il s'occupait de ses élèves et travaillait constamment à développer leurs aptitudes mathématiques.

La Géométrie analytique, l'Algèbre moderne étaient les objets favoris de ses études, le but principal de ses efforts. L'un des premiers en France, il a cultivé cette branche de l'Analyse qui est devenue presque l'unique sujet d'études des jeunes savants français. Nous avons formé avec soin et l'on trouvera plus loin la liste des Ouvrages de notre collaborateur; elle ferait honneur même à un géomètre qui n'aurait pas eu à concilier ses études personnelles avec les travaux d'un enseignement des plus pénibles.

Apprécié de tous, notre excellent ami avait obtenu, l'année dernière, la récompense de ses efforts : il venait d'être appelé à professer à la Faculté des Sciences; la maladie ne lui a pas permis de terminer son premier Cours.