Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 287-303

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__287_1>

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI [2].

La Correspondance mathématique, entre Legendre et Jacobi, est une des Correspondances les plus mémorables qu'on trouve dans la littérature des sciences exactes. Il a fallu un concours de circonstances heureuses pour la conserver en entier à la postérité.

C'est à M. Bertrand que nous devons la publication de onze Lettres de Jacobi à Legendre, insérées aux *Annales de l'École Normale* de 1869. En les faisant imprimer, l'éminent géomètre a sauvé

(1) Cet écrit est une nouvelle rédaction de l'écrit indiqué ci-dessus sous le n° 23.

(2) Extrait du journal de M. Borchardt.

ce trésor, les manuscrits originaux ayant péri en 1871 dans les incendies de la Commune. Cette publication fut en même temps un acte de justice pour la mémoire de Jacobi.

Une grave erreur historique avait été répandue concernant la découverte de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques. On avait avancé qu'à Abel seul revenait la découverte de cette théorie, en vertu de ses Mémoires contenus dans les volumes 2 et 3 du *Journal de Crelle;* que Jacobi, sans y ajouter rien d'essentiel, en avait seulement formé un corps de doctrines, publié trois ans plus tard dans ses *Fundamenta nova*. Cette opinion se trouvait déjà, quand elle fut émise, en contradiction manifeste avec les Notes et Mémoires de Jacobi et d'Abel insérés dans le *Journal astronomique* de Schumacher (1), et non moins avec le célèbre Rapport de Poisson (2) sur les *Fundamenta nova* de Jacobi; mais rien n'y aurait pu donner un démenti plus formel que la publication des Lettres de Jacobi, dans lesquelles l'illustre analyste raconte avec une rare franchise l'historique de ses découvertes et la filiation de ses idées (3).

Au mois de septembre 1827, parurent, à Berlin, le 2e cahier, vol. II, du *Journal de Crelle* (4), et à Altona, le n° 123, vol. VI, des *Nouvelles astronomiques* de Schumacher. Le Cahier du *Journal de Crelle* contient la première publication d'Abel (5) relative à la nouvelle théorie des fonctions elliptiques. On y trouve leur double périodicité, la théorie analytique de leur multiplication et de leur division, leur définition par des produits infinis. Le numéro des *Nouvelles astronomiques* contient deux Lettres de Jacobi à Schumacher, écrites de Königsberg et datées du 13 juin et du 2 août 1827. Dans la première Lettre, il donne les transformations du troisième et du cinquième ordre dans leur forme algébrique, avec les transformations complémentaires à la multiplication. Dans la seconde, il établit les formules analytiques générales pour la transformation de l'ordre n.

Pour un géomètre qui a sous les yeux ces deux publications si-

(1) *Astronomische Nachrichten*, Bd. VI, nos 123, 127, 138.

(2) Lu à la séance de l'Académie des Sciences du 21 décembre 1829.

(3) Lettre de Jacobi du 12 avril 1828.

(4) M. G. Reimer, en recherchant dans les livres de son imprimerie et de l'année 1827, a bien voulu constater le mois dans lequel ce cahier a été expédié aux abonnés.

(5) Abel était de retour à Christiania depuis le mois de mai 1827.

multanées, il est évident qu'en les écrivant Abel et Jacobi ont été chacun en possession de l'ensemble de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques, qu'ils y sont parvenus indépendamment l'un de l'autre, Abel en partant de la multiplication, Jacobi en partant de la transformation des fonctions elliptiques.

Le fait historique de cette coïncidence remarquable a été reconnu par tous les géomètres contemporains, parmi lesquels il suffira de nommer Legendre, Poisson et Lejeune-Dirichlet. D'ailleurs, jamais aucune discussion de priorité n'a eu lieu entre Abel et Jacobi. Ils ont réalisé l'attente de Legendre : « Vous serez sans doute dignes l'un de l'autre par la noblesse de vos sentiments et par la justice que vous vous rendrez réciproquement (1). »

En comparant les onze Lettres de Jacobi, publiées par M. Bertrand, avec douze Lettres manuscrites de Legendre, qui se sont trouvées dans la succession de Jacobi, j'ai pu vérifier que ces vingt-trois lettres forment la Correspondance scientifique entière qui a eu lieu entre Legendre et Jacobi (2). M. Bertrand, ayant bien voulu m'exprimer son assentiment à l'impression de cette Correspondance entière, je la fais paraître suivant l'ordre chronologique dans lequel les Lettres ont été écrites. A côté des *Fundamenta nova* de Jacobi, des Notes et Mémoires d'Abel et de Jacobi imprimés dans le *Journal de Crelle* et dans les *Nouvelles astronomiques* de Schumacher, cette Correspondance est un des documents les plus précieux pour l'histoire de la découverte de la nouvelle théorie des fonctions elliptiques.

Quatre grands géomètres, Legendre, Gauss, Abel et Jacobi, ont eu leur part dans cet événement. Legendre l'avait préparé; vieillard de 75 ans, en 1827, il avait cultivé, depuis 1786, pendant plus de quarante ans, le calcul des intégrales elliptiques et en avait formé une discipline particulière. Ses travaux avaient été peu appréciés par les célèbres analystes de son propre pays, dont l'intérêt se dirigeait plutôt vers les recherches applicables à l'Astronomie et à la Physique. Parmi les savants étrangers à la France, Gauss connais-

(1) Lettre de Legendre à Abel du 28 octobre 1828.

(2) Outre ces douze Lettres de Legendre, je n'ai trouvé qu'un billet du 6 septembre 1829 (séjour de Jacobi à Paris), simple billet d'invitation qui n'offre point d'intérêt et n'a aucun rapport aux Mathematiques.

sait parfaitement l'importance du sujet; mais, dès son début, il avait montré, à l'égard de Legendre, une froideur que ce dernier ne lui pardonnait pas. La découverte de 1827 avait d'ailleurs, pour Gauss, un intérêt très-personnel. Depuis plus de vingt ans il était en possession des résultats par lesquels Abel et Jacobi ont étonné les géomètres. Des recherches entreprises pendant les années de 1797 à 1808, dans lesquelles il partait de la transformation du second ordre et des moyennes arithmético-géométriques, l'y avaient conduit, mais il n'en avait rien publié. Pendant toute sa vie il n'en a jamais parlé que dans des lettres ou des conversations privées.

Lorsque, en 1827, Legendre reçut la première nouvelle de la récente découverte de Jacobi, d'abord par le n° 123 du *Journal de Schumacher*, puis par la Lettre de Jacobi du 5 août 1827, il l'accueillit avec un vrai enthousiasme. L'intérêt qu'il prenait à la discipline qui, pendant une si grande partie de sa vie, avait formé son travail principal, était en lui d'une telle pureté qu'il n'éprouvait point de jalousie de se voir surpassé et son œuvre couronnée par un jeune homme de 23 ans, qui se nommait avec raison son disciple. Mais, lorsqu'il fut averti d'une assertion de Gauss, qui aurait pu enlever à Jacobi une partie de la gloire de sa découverte, son irritation fut grande. Il n'hésita pas à douter de la vérité de l'assertion, et ce fut alors Jacobi qui se chargea de la défense de Gauss.

Pour les caractères de Legendre et de Jacobi leur Correspondance est un beau monument.

Legendre qui, par son travail infatigable, avait initié la nouvelle génération à la théorie des intégrales elliptiques, montre pour Jacobi une bienveillance qui lui fait le plus grand honneur. En ce qui concerne Abel, après avoir vaincu la difficulté qu'il trouvait d'abord à se familiariser avec ses idées, il exprime la haute considération due à ses travaux.

Jacobi se montre plein de vénération pour Legendre, dont les œuvres lui ont fourni le point de départ de ses profondes études. C'est dans ce ton que sont écrites toutes ses Lettres, à l'exception d'un seul passage dans lequel il s'agit de la plus grande découverte de son émule Abel, oubliée pendant deux ans parmi les papiers de Cauchy. A l'égard de Gauss, son jugement est juste et sans prévention. Son admiration pour les travaux d'Abel est telle qu'il les place au-dessus des siens propres. La grande découverte à laquelle il a donné le nom de *théorème d'Abel* est désignée par lui comme « la découverte la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons ».

En présentant au monde scientifique cette Correspondance de deux géomètres de nationalité différente et pour lesquels l'intérêt de leur science fait disparaître toute autre considération, je ne puis me refuser à exprimer l'espérance que cet exemple ne sera pas perdu pour la génération présente.

BORCHARDT.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, en Prusse, le 5 août 1827.

MONSIEUR,

Un jeune géomètre ose vous présenter quelques découvertes faites dans la théorie des fonctions elliptiques, auxquelles il a été conduit par l'étude assidue de vos beaux écrits. C'est à vous, Monsieur, que cette partie brillante de l'Analyse doit le haut degré de perfectionnement auquel elle a été portée, et ce n'est qu'en marchant sur les vestiges d'un si grand maître que les géomètres pourront parvenir à la pousser au delà des bornes qui lui ont été prescrites jusqu'ici. C'est donc à vous que je dois offrir ce qui suit comme un juste tribut d'admiration et de reconnaissance.

Je commence à exposer les moments principaux des résultats que je viens d'obtenir. Soit p un nombre impair quelconque; on remarque aisément, en poursuivant les théorèmes concernant la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, proposés dans le tome I des *Exercices de Calcul intégral*, que l'on peut toujours parvenir à l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}}=\frac{p\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2 z^2}}$$

au moyen d'une substitution rationnelle

$$x = \frac{z\left(A + A'z^2 + A''z^4 + \ldots + A^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}\right)}{B + B'z^2 + B''z^4 + \ldots + B^{\frac{p^2-1}{2}} z^{p^2-1}}.$$

J'ai observé, depuis, que cette substitution peut être remplacée par les deux autres, employées successivement,

$$x = \frac{y\left(a + a'y^2 + a''y^4 + \ldots + a^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}\right)}{b + b'y^2 + b''y^4 + \ldots + b^{\frac{p-1}{2}} y^{p-1}},$$

$$y = \frac{z\left(\alpha + \alpha'z^2 + \alpha''z^4 + \ldots + \alpha^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}\right)}{\beta + \beta'z^2 + \beta''z^4 + \ldots + \beta^{\frac{p-1}{2}} z^{p-1}}.$$

Après une première substitution, la fonction elliptique va être transformée dans une autre de module différent, de sorte qu'on aura

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}} = \frac{M\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 y^2}},$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2 y^2}} = \frac{p\,dz}{M\sqrt{1-z^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}}.$$

Or, en donnant au nombre p des valeurs différentes, on trouve le théorème remarqueable, que *chaque module donné fait part d'une infinité d'échelles de modules, dans lesquels il peut être transformé par une substitution algébrique et même rationnelle.*

Aussi je suis parvenu à trouver l'expression générale de ces deux substitutions-là, que je présenterai sous la forme trigonométrique, qui me paraît la plus commode. Elles pourront être transformées aisément dans la forme algébrique mentionnée. Je commence par la substitution dernière, qui me fournit le théorème suivant :

Théorème I (²). — *Soit pris l'angle* φ' *de manière qu'on ait* $F(\varkappa, \varphi') = \frac{1}{p} F^1(\varkappa)$, *et nommons en général* φ^m *un angle tel que*

(¹) Je me servirai ici et dans la suite des signes des *Exercices de Calcul intégral.*

$F(\varkappa, \varphi^m) = \frac{m}{p} F^1(\varkappa)$. *Cherchons un angle* ψ *au moyen de la formule*

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi'-\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi'''+\varphi}{2}\cdots\operatorname{tang}\frac{\varphi^{p-2}\pm\varphi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi'+\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi'''-\varphi}{2}\cdots\operatorname{tang}\frac{\varphi^{p-2}\mp\varphi}{2}}\left(\operatorname{tang}45^\circ \mp \frac{\varphi}{2}\right);$$

on aura

$$F(\varkappa, \varphi) = \frac{M}{p} F(\lambda, \psi).$$

Le signe supérieur ou inférieur doit être pris selon que p *est de la forme* $4n+1$ *ou de la forme* $4n-1$. *Toutefois que* φ *se trouve entre les limites* φ^m *et* φ^{m+1}, *il faudra prendre l'angle* ψ *entre les limites* $\frac{m}{2}\pi$ *et* $\frac{m+1}{2}\pi$. *La détermination des constantes* M, λ *pourra se faire par les formules*

$$M = \frac{p}{2(\operatorname{coséc}\varphi' - \operatorname{coséc}\varphi''' + \ldots \mp \operatorname{cosec}\varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2})},$$
$$\lambda = \frac{2\varkappa M}{p}\left(\sin\varphi' - \sin\varphi''' + \ldots \mp \sin\varphi^{p-2} \pm \frac{1}{2}\right).$$

Je passe maintenant au théorème II, qui répond à l'autre substitution, par laquelle on peut passer du module λ au module $\varkappa$, et qui, joint au précédent, sert à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce.

Théorème II. — *Soit* $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$; *soit en général* ψ^m *un angle tel, que*

$$F(\lambda', \psi^m) = \frac{m}{p} F^1(\lambda');$$

qu'on fasse

$$\operatorname{tang}\theta' = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi', \quad \operatorname{tang}\theta''' = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi''', \ldots,$$
$$\operatorname{tang}\theta^{p-2} = \operatorname{tang}\psi \operatorname{coséc}\psi^{p-2};$$

soit enfin $\theta = 2\left(\theta' - \theta''' + \theta^{\text{v}} - \ldots \mp \theta^{p-2} \pm \frac{1}{2}\psi\right)$; *on aura*

$$F(\varkappa, \theta) = MF(\lambda, \psi).$$

Les angles $\theta', \theta''', \ldots$ *doivent être pris dans le même quadrant de cercle dans lequel se trouve l'angle* ψ.

Les théorèmes I et II joints ensemble donnent

$$F(\varkappa, \theta) = pF(\varkappa, \varphi).$$

Je passe sous silence les nombreuses relations analytiques très-curieuses que vont fournir les deux théorèmes proposés. Je n'ajouterai ici qu'une méthode qui peut servir à l'évaluation des transcendantes $F(\varkappa, \varphi)$, la plus commode, à ce que je crois, qu'on puisse imaginer.

En effet, λ se trouvant toujours très-petit, quand même le nombre p ne surpasse 5 ou 7, on pourra négliger les termes de l'ordre λ^2. On aura donc simplement

$$F(\varkappa, \varphi) = \frac{M}{p}\psi.$$

La constante M ne différant que de l'ordre λ^2 de la quantité $\frac{2}{\pi}F^1(\varkappa)$, on introduira celle-ci dans le calcul au lieu de M. Par là on aura en même temps corrigé le résultat de la partie non périodique de l'erreur commise en négligeant les quantités de cet ordre. Notre formule deviendra donc

$$F(\varkappa, \varphi) = \frac{2}{p\pi}F^1(\varkappa)\psi,$$

et l'erreur commise ne comportera que $-\frac{\lambda^2}{4p\pi}F^1(\varkappa)\sin 2\psi$. C'est donc la correction à ajouter pour que l'erreur ne soit que de l'ordre λ^4 (1).

Soit, par exemple, $p = 5$, $\varkappa = \sin 45^\circ$, je trouve dans le tome III des *Exercices*, p. 215,

$$\varphi' = 21^\circ 0' 36'', 0275443, \quad \varphi''' = 58^\circ 38' 10'', 3140270.$$

---

(1) Si l'on exprime ψ en secondes, on aura $F(\varkappa, \varphi) = M'\psi$, étant mis $M' = \frac{F^1(\varkappa)}{324000p}$.

Aussi la Table II du tome III me donne

$$F'(\varkappa) = 1{,}854074677301,$$

d'où résulte

$$M' = \frac{F'(\varkappa)}{5 \times 324\,000} = 0{,}00000\,114449054\,1544.$$

On aura donc à calculer l'angle ψ par la formule

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tang}\frac{90^\circ - \psi}{2}\\
&= \frac{\operatorname{tang}(10^\circ 30' 18'',01 - \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tang}(10^\circ 30' 18'',01 + \frac{1}{2}\varphi)} \, \frac{\operatorname{tang}(29^\circ 19' 5'',16 + \frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tang}(29^\circ 19' 5'',16 - \frac{1}{2}\varphi)} \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right),
\end{aligned}$$

et ensuite on trouvera

$$F(\varphi) = 0{,}00000\,1144905\,41\,\psi.$$

La correction à ajouter sera $-\,0{,}00000\,007 \sin 2\psi$.

Exemple : $\varphi = 30^\circ$.

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tang}\frac{\varphi' + \varphi}{2} &= 8{,}8954990\,n\\
\log\operatorname{tang}\frac{\varphi''' - \varphi}{2} &= 9{,}9896616\\
\log\cot\frac{\varphi' + \varphi}{2} &= 0{,}3214063\\
\log\cot\frac{\varphi''' - \varphi}{2} &= 0{,}5930627\\
\log\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi\right) &= \underline{9{,}7614394}\\
\log\operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2}\psi\right) &= 9{,}5610690\,n\\
45^\circ - \frac{1}{2}\psi &= -\,20^\circ 0' 0'',473\\
\psi &= 46800{,}95 \quad (M' = 0{,}000000\,114449\,0541)\\
M'\psi &= \;0{,}53562266\\
\text{Corr.} &= \underline{+\;0{,}00000007}\\
F &= \;0{,}53562273
\end{aligned}$$

La Table II du tome III des *Exercices* donne 0,5356227328 22.

Cette méthode me paraît fournir la manière la plus convenable de construire des Tables pour l'évaluation des fonctions elliptiques de première espèce.

Il n'y a que très-peu de temps que ces recherches ont pris naissance. Cependant elles ne sont pas les seules entreprises en Allemagne sur le même objet. M. Gauss, ayant appris de celles-ci, m'a fait dire qu'il avait développé déjà en 1808 les cas de trois, de cinq et de sept sections, et trouvé en même temps les nouvelles échelles de modules qui s'y rapportent. Cette nouvelle, à ce qui me paraît, est bien intéressante.

Depuis quelque temps, j'ai fait encore quelques recherches sur la théorie des nombres, qui m'ont conduit à des résultats assez curieux relatifs à la belle partie de cette discipline ouverte aux géomètres par votre célèbre loi de réciprocité. En effet, en partant de la nouvelle théorie de section de cercle proposée par M. Gauss dans la huitième section de ses *Disquisitiones arithmeticæ*, j'ai découvert une méthode qui me conduit aux théorèmes fondamentaux concernant la théorie des résidus cubiques, biquadratiques, et même des résidus de puissances plus élevées encore [1].

Pour en donner une idée succincte, je mets ici la démonstration du théorème fondamental relatif aux résidus quadratiques, fondée sur ces nouveaux principes.

Soit p un nombre premier impair, soit x une racine de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1}=0$, soit g une racine primitive de la congruence

$$g^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p};$$

on a

$$x - x^g + x^{g^2} + x^{g^3} + \ldots - x^{g^{p-2}} = +\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

On a de même, en général,

$$x^q - x^{qg} + x^{qg} - x^{qg^3} + \ldots - x^{qg^{p-2}}$$

[1] Je me sers ici dans ce qui suit des signes et des dénominations mis en usage par M. Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*.

égal à $+\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ ou à $-\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$, selon que q est résidu quadratique ou non résidu quadratique du nombre p; mais, le nombre q étant aussi premier, on a, en négligeant les multiples de q,

$$x^q - x^{qg} + \ldots - x^{qg^{p-2}} = (x - x^q + \ldots - x^{g^{p-2}})^q$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}.$$

Donc q sera R ou N.R de p selon que $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} p^{\frac{q-1}{2}}$, divisé par q, laisse $+1$ ou -1, ce qui est précisément la loi de réciprocité ou, d'après M. Gauss, le théorème fondamental relatif aux résidus quadratiques.

J'ajoute plusieurs théorèmes relatifs aux résidus cubiques qui résultent tous d'un même théorème général. Ce sont les premiers de ce genre qui ont été proposés.

Étant donné un nombre premier p de la forme $6n+1$, un autre nombre premier quelconque sera résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des deux formes

$$L^2 + 27q^2M^2 \quad \text{ou} \quad q^2L^2 + 27M^2.$$

Cependant il faut exclure la forme seconde dans le cas de $q=2$ et $q=3$.

Aussi, q étant un nombre premier plus grand que 7, il sera résidu cubique de p toutes les fois que p est de la forme $(qz+m)^2+27M^2$, le nombre m étant donné par rapport à q au moyen de la Table suivante :

$q=$ 11	13	17	19	23	29	31	37	...
4	1	3	3	2	1	5	8	...
		9	9	8	2	7	3	...
				11	11	6	9	...
					13	11	7	...
							12	...
								...

Ainsi, par exemple, le nombre 37 est résidu cubique de p toutes les fois que $4p$ sera de l'une des sept formes

$$L^2 + 36963M^2, \quad 1369L^2 + 27M^2,$$
$$(37\varkappa + 3M)^2 + 27M^2, \quad (37\varkappa + 9M)^2 + 27M^2,$$
$$(37\varkappa + 7M)^2 + 27M^2, \quad (37\varkappa + 12M)^2 + 27M^2,$$
$$(37\varkappa + 8M)^2 + 27M^2.$$

Le nombre $4p$ n'étant pas compris sous l'une des formes établies par les théorèmes précédents, le nombre q n'en saura être résidu cubique.

M. Gauss a présenté à la Société de Göttingue, il y a environ deux ans, un premier Mémoire relatif à la théorie des résidus biquadratiques, laquelle est beaucoup plus facile que celle des résidus cubiques. Ce Mémoire n'a pas encore paru, mais il en a donné un extrait dans les *Annales de Gottingue,* année 1825, vol. I. Les théorèmes qui s'y trouvent annoncés se démontrent et pourront même être généralisés par mes méthodes avec une facilité extrême; et, à ce que je crois, ce sera de même avec tout ce qu'on pourrait établir sur les résidus des puissances. Ledit grand géomètre m'a écrit, depuis, qu'il poursuivra le même objet dans trois autres Mémoires destinés à être présentés à la Société, et il se plaint que le temps lui manque à publier ses vastes recherches sur différents objets de la plus grande importance.

Je suis avec le respect le plus profond,

Monsieur,

Votre très-humble serviteur,

Dr C.-G.-J. Jacobi,

Près l'Université de Königsberg, en Prusse.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 30 novembre 1827.

Monsieur,

Ce n'est que depuis quelques jours que j'ai reçu des mains de M. Michael Reiss la Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire en date du 5 août dernier. Je connaissais déjà votre belle découverte dans la théorie des fonctions elliptiques par les deux Lettres que vous avez fait insérer dans le n° 123 du *Journal astronomique* de M. Schumacher. Le théorème I contenu dans ces Lettres m'était déjà connu, puisqu'il s'accorde entièrement avec la seconde échelle des modules dont j'ai développé les propriétés dans le Chap. XXXI du tome I de mon *Traité des fonctions elliptiques*, imprimé en 1825, et présenté à l'Académie dans sa séance du 12 septembre de ladite année. Le tome II n'a été imprimé qu'en 1826, et l'Ouvrage entier n'a été mis en vente chez MM. Treuttel et Wurtz qu'au mois de janvier de cette année; ainsi il n'est point douteux pour moi que vous n'ayez eu aucune connaissance de mon Ouvrage et que vos propres recherches vous aient conduit au même résultat que j'avais imprimé deux ans avant vous. Mais ce qui vous appartient incontestablement, c'est le théorème II, qui contient la découverte d'une troisième échelle de modules, celle que vous désignez à bon droit comme répondant au nombre 5. J'ai vérifié ce théorème par les méthodes qui me sont propres et je l'ai trouvé parfaitement exact. En regrettant que cette découverte m'ait échappé, je n'en ai pas moins éprouvé une joie très-vive de voir un perfectionnement si notable ajouté à la belle théorie, dont je puis me dire le créateur, et que j'ai cultivée presque seul depuis plus de quarante ans. L'invention de la seconde échelle attachée au nombre premier 3 m'avait mis à portée d'expliquer beaucoup de résultats d'analyse transcendante dont les autres formules ne pouvaient rendre compte; je le trouvais digne d'intérêt par différents résultats que son développement m'avait fait connaître dans le Chap. XXXI, et particulièrement par le moyen qu'elle fournit de réduire à deux équations du troisième degré la trisection de la fonction F, qui dépend, en général, d'une équation du neuvième degré; enfin la combinaison de deux échelles déjà connues me donnait le moyen de former l'espèce de damier analytique dont j'ai fait mention p. 326 du tome I, qui, dans ses cases multipliées à l'infini dans les deux dimensions, contient toutes les transformations d'une même fonction donnée F. Votre troisième échelle, Monsieur, vient étendre aux trois dimensions de l'espace les cubes infiniment multipliés dans tous les sens qui contiennent les transformations de la fonction F ; ils remplissent donc toute l'étendue de l'espace ; mais l'imagination, déjà frappée de cette multitude infinie de transformations dont aucune fonction analytique ne montre l'exemple, est en quelque sorte accablée quand vous affirmez qu'il y a une quatrième échelle au nombre premier 7, une cinquième au nombre premier 11, et ainsi pour tous les nombres premiers à l'infini sans aucune exception. Aucune preuve de cette assertion ne se trouvant dans le n° 123 du *Journal astronomique*, j'avoue que j'étais porté à croire que la proposition n'était pas exacte et que l'induction seule avait pu vous la suggérer. En effet, une méthode assez simple que j'avais employée pour vérifier votre théorème II présentait deux équations de plus que d'inconnues, mais ces équations se sont trouvées satisfaites. Cette même méthode, appliquée à l'échelle ultérieure pour le nombre premier 7, contiendrait trois équations de plus que d'inconnues ; j'ai commencé le calcul, mais je ne l'ai pas achevé pour m'assurer si ces trois équations n'étaient qu'une conséquence des autres. Dans les échelles ultérieures, le nombre des équations oiseuses augmenterait progressivement ; j'étais donc en doute sur la proposition considérée dans toute sa généralité. Mais, ayant reçu votre Lettre, j'y ai vu les deux formules générales sous forme trigonométrique dont toute votre théorie dépend ; je vois dès lors que ce n'est pas sur l'induction, mais bien sur une analyse profonde et rigoureuse, que vous avez établi votre proposition générale. Maintenant je ne puis que vous témoigner le désir que j'éprouve d'avoir communication de l'analyse qui vous a conduit à ces deux formules ; la grande habitude que j'ai de la matière me fera contenter d'une simple indication de la méthode ou de son principe fondamental ; je pourrais bien espérer de réussir dans cette recherche en y consacrant un certain espace de temps, mais vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, de m'épargner cette peine. Il me sera fort agréable de composer, d'après votre méthode, et avec une due mention honorable de son auteur, un supplément au tome I de mon Ouvrage, où j'exposerai votre belle découverte dans tout son jour, et qui en sera un des plus beaux ornements.

Vous recevrez par la voie de M. l'ambassadeur de Prusse, qui a bien voulu accueillir ma demande, un exemplaire de mon *Traité des fonctions elliptiques,* dont je vous prie d'agréer l'hommage. J'ai profité de la même occasion pour faire passer à M. Alexandre de Humboldt, à Berlin, une Lettre où je lui fais part de mon opinion sur votre belle découverte, dont j'ai aussi entretenu l'Académie des Sciences de Paris dans sa séance du 26 novembre dernier ([1]).

Je ne vous dirai rien dans ce moment sur l'article de votre Lettre qui concerne vos découvertes dans la théorie des nombres. J'espère revenir sur cet article dans une autre occasion, pour peu que vous vouliez la faire naître; car devant faire imprimer l'année prochaine une troisième édition de ma *Théorie des nombres,* dans laquelle il y aura plusieurs additions importantes, surtout dans la partie qui concerne les équations à deux termes, je serais fort aise d'y pouvoir insérer quelques-uns de vos nouveaux résultats, avec mention honorable de son auteur.

Comment se fait-il que M. Gauss ait osé vous faire dire que la plupart de vos théorèmes lui étaient connus et qu'il en avait fait la découverte dès 1808 ([2]). Cet excès d'impudence n'est pas croyable de la part d'un homme qui a assez de mérite personnel pour n'avoir pas besoin de s'approprier les découvertss des autres. Mais c'est le même homme qui, en 1801, voulut s'attribuer la découverte de la loi de la réciprocité, publiée en 1785 ([3]), et qui voulut s'emparer,

([1]) *Voir,* pour la Communication à l'Académie des Sciences, à la suite de cette Lettre. B.

([2]) L'exactitude de cette assertion est prouvée par l'edition des *Œuvres complètes* de Gauss, vol. 3, p. 492-496, où M. Schering donne les dates précises des travaux de Gauss relatifs à la théorie des fonctions elliptiques et publiés après sa mort. B.

([3]) Quant à la loi de réciprocite des résidus quadratiques, il faut distinguer la découverte par observation et la démonstration de la loi. La première demonstration a été donnée, comme l'on sait, par Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticæ,* tandis que la démonstration essayée par Legendre reposait sur des hypothèses non moins difficiles à démontrer que la loi même. Dans l'article 151 des *Disquisitiones,* Gauss parle d'Euler et de Legendre comme de ceux qui, avant lui, sont parvenus par obser vation à cette loi. Dans un autre endroit (*Theorematis arithmetici demonstratio nova,* art. 2, Comm. Götting, vol. XVI, 1808), Gauss dit : *Pro* primo *hujus elegantissimi theorematis inventore ill. Legendre absque dubio habendus est, postquam longe antea* en 1809, de la méthode des moindres carrés, publiée en 1805 [1]. D'autres exemples se trouveraient en d'autres lieux, mais un homme d'honneur doit se garder de les imiter.

J'ai l'honneur d'être,

Monsieur,

Votre dévoué serviteur,

LEGENDRE.

Paris, quai Voltaire, n° 9.

Extrait du GLOBE (numéro du jeudi 29 novembre 1827).

A la Lettre de Legendre fut joint le numéro indiqué ci-dessus du *Globe*, dans lequel on trouve le Rapport suivant sur la Communication faite par Legendre à l'Académie des Sciences, dans sa séance du lundi 5 novembre 1827 :

« Il n'existait jusqu'ici que deux échelles de modules, l'une connue depuis longtemps, l'autre publiée tout récemment dans mon *Traité des fonctions elliptiques*, et affectée au nombre premier 3. Or la Lettre insérée par M. Jacobi dans le *Journal astronomique* d'Altona contient deux théorèmes qui donnent naissance à deux nouvelles échelles de modules affectées, savoir la première au nombre premier 3 (c'est précisément celle à laquelle j'étais arrivé moi-même; je regardais sa découverte comme l'un de mes travaux les plus importants, et cette découverte, M. Jacobi l'a faite certainement de son côté); la seconde échelle, à laquelle je n'avais pas pensé et qui appartient exclusivement à M. Jacobi, est affectée au nombre premier 5. Par cette dernière échelle, M. Jacobi a multiplié à l'infini les transformations de la fonction elliptique de première espèce, désignée par $F(c, \varphi)$. J'ai pu vérifier, mais seulement au moyen des calculs les plus élevés, que cette découverte de M. Jacobi est très-réelle. Cependant cet auteur ne s'en est pas tenu là, il a voulu aller plus loin. Il a annoncé que la même méthode qui l'avait

---

summi geometræ Euler et Lagrange plures ejus casus speciales per inductionem detexerant. B.

[1] Dans la *Theoria motus corporum cœlestium*, publiée par Gauss en 1809, on trouve (art. 186), à la suite de l'exposition de la methode des moindres carres, ce passage : *Cæterum principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. Legendre in opere* Nouvelles methodes pour la determination des orbites des comètes, Paris, 1806, *prolatum est.* B.

conduit aux résultats précédents lui donnait les moyens de former une quatrième échelle, attachée au nombre premier 7, une cinquième au nombre premier 11, et ainsi à l'infini. Ici, » dit M. Legendre, « je n'ai plus été de l'avis de M. Jacobi, et j'ai même cru pouvoir lui écrire une Lettre dans laquelle je lui indiquais ce qui, suivant moi, l'avait induit en erreur. Heureusement l'envoi de cette Lettre a été assez retardé pour que j'aie pu reconnaître que c'était moi-même qui me trompais, et que M. Jacobi sur ce point, comme sur les autres, avait complétement raison; et je l'ai reconnu avec d'autant plus de plaisir, que c'est un sujet dont je m'occupe depuis plus de quarante ans, que j'ai ainsi été surpassé par M. Jacobi, mon émule. Ce n'est pas par induction que M. Jacobi est parvenu aux résultats qu'il a publiés; c'est par une théorie profonde et infaillible, et à l'aide de deux théorèmes entièrement nouveaux, qu'il a fait cette découverte, qui agrandit considérablement la théorie des fonctions elliptiques et en fait une branche parfaite dans son genre, et qui ne peut être comparée à aucune autre.

» Une principale conséquence entre une infinité d'autres qui résultent de cette savante analyse, c'est que la trisection de la fonction F, qui dépend en général d'une équation algébrique du neuvième degré, se réduit à deux équations du troisième; que la quintisection, qui est du vingt-cinquième degré, se réduit à deux équations du cinquième; de sorte que la considération des propriétés de notre transcendante sert à résoudre des problèmes d'Analyse algébrique d'une grande difficulté et en nombre infini.

» M. Jacobi a annoncé aussi, et prouvé par des exemples, qu'il a fait des découvertes importantes dans une des parties importantes de la science des nombres, sur laquelle M. Gauss a annoncé des résultats nouveaux sans les avoir encore publiés.

» Frappé de tant de beaux travaux, j'ai voulu », dit M. Legendre, « prendre quelques renseignements sur la personne de M. Jacobi; j'ai appris que c'était un jeune homme de 25 ans [1], attaché à l'Université de Königsberg, où il n'était pas encore professeur, et où il n'occupe qu'un grade inférieur analogue à celui d'agrégé parmi nous. »

(*A suivre.*)

---

[1] Jacobi, né le 10 décembre 1804, n'avait pas même atteint l'âge de 23 ans. B.