G. DARBOUX

Sur la première méthode donnée par Jacobi, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 249-255

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__249_1>

SUR LA PREMIÈRE MÉTHODE DONNÉE PAR JACOBI, POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. G. DARBOUX.

I.

Dans ses premiers travaux sur le théorème d'Hamilton, Jacobi a été conduit à une méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre qui s'appuie sur le théorème suivant :

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial q_n}; \; q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0,$$

remplaçons $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par p_i dans la fonction H, et intégrons le système des $2n$ équations aux dérivées ordinaires

$$(2)\qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad (i=1,2,3,\ldots,n),$$

c'est-à-dire exprimons les variables p_i, q_i en fonction de t que nous supposerons être le temps, et des valeurs initiales p_i^0, q_i^0 de p_i, q_i à l'époque $t=0$. Calculons ensuite l'intégrale

$$(3)\qquad V=\int_0^t\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}-H\right)dt.$$

Le calcul présentera V comme une fonction de t et des $2n$ constantes $p_i^0\ q_i^0$; mais des n formules qui font connaître $q_1, q_2,\ldots, q_n$ on peut tirer $p_1^0, p_2^0,\ldots, p_n^0$ en fonction de $q_1, q_2,\ldots, q_n$; $q_1^0, q_2^0,\ldots, q_n^0$, et, par suite, ramener V à ne plus contenir que les $2n+1$ variables

$$t;\quad q_1, q_2,\ldots, q_n;\quad q_1^0, q_2^0,\ldots, q_n^0.$$

La fonction V ainsi obtenue sera une intégrale, contenant évidemment n constantes arbitraires $q_1^0, q_2^0,\ldots, q_n^0$ de l'équation aux dérivées partielles proposée. De plus, les intégrales générales du système des équations (2) pourront se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0}=-p_i^0,\quad (i=1,2,3,\ldots,n).$$

Voici comment Jacobi démontre ce beau théorème. Imaginons que, dans la formule (3), on fasse varier infiniment peu les valeurs des constantes qui figurent dans les expressions de p_i et de q_i. La différentielle totale de V, considérée comme fonction de ces arbitraires, s'obtient sans difficulté, et l'on trouve.

$$(5)\qquad \begin{cases} \delta V=p_1\,\delta q_1+p_2\,\delta q_2+\ldots+p_n\,\delta q_n\\ \qquad -p_1^0\,\delta q_1^0-p_2^0\,\delta q_2^0-\ldots-p_n^0\,\delta q_n^0.\end{cases}$$

Jacobi déduit de cette équation que, si l'on exprime V en fonction de t, q_i, q_i^0, on aura

$$(6)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial V}{\partial q_i^0}=-p_i^0,$$

et cette conclusion est évidemment exacte en général; car, si l'on a la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables indépendantes, il est clair que le coefficient de l'une quelconque des différentielles des variables indépendantes est la dérivée partielle de la fonction par rapport à cette variable.

M. Mayer, dans un Mémoire inséré au tome III des *Mathematische Annalen*, a fait le premier la remarque suivante : La conclusion de Jacobi suppose essentiellement que les $2n$ variables q_i, q_i^0 soient indépendantes les unes des autres. Or cela n'a pas lieu nécessairement. Renvoyant, pour la mise en évidence de ce fait, au Mémoire de M. Mayer, je me contenterai d'en examiner les conséquences relatives à la méthode proposée par Jacobi. Il y a deux points à examiner. Peut-on toujours exprimer la fonction V au moyen des variables q_i, q_i^0? A-t-on encore le droit d'écrire les équations (6), ou peut-on remplacer ces équations par d'autres qui permettent d'atteindre le but que se proposait Jacobi? M. Mayer, sans examiner ces deux questions, abandonne la méthode de Jacobi, et, lui faisant subir une légère modification, il la remplace par une autre tout aussi simple, mais qui n'est plus sujette aux mêmes objections.

Il y a deux ans, M. Bertrand, dans son Cours au Collége de France, a pris pour texte la *Mécanique analytique* de Jacobi. Dans ses leçons, auxquelles j'assistais, il a été conduit à examiner l'objection de M. Mayer, et il a fait observer que, bien que la remarque de ce savant géomètre soit très-fondée, elle ne met pas nécessairement en défaut la méthode de Jacobi. Se bornant au cas où il y a une seule relation entre les variables q_i, q_i^0, il a invité ses auditeurs à essayer l'examen de l'hypothèse la plus générale. Je présentai alors à M. Bertrand le résultat des recherches que j'avais faites d'après ses indications, et c'est ce petit travail, tout à fait oublié par moi, que M. Bertrand veut bien se rappeler et qu'il croit digne d'être soumis à l'Académie.

II.

Dans une Communication du 21 décembre 1874, j'ai indiqué quelle était la nature des remarques faites sur cette première méthode par M. Mayer, et comment j'avais été conduit à examiner ses objections par les remarques que M. Bertrand a présentées à ce sujet dans son Cours de 1872 au Collége de France. Je me propose d'examiner, dans cette Note, quelles sont les modifications que doit subir la méthode de Jacobi si l'on veut la rendre applicable dans tous les cas.

Soient les équations

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\tag{1}$$

où H désigne une fonction quelconque de $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, et t. Nous désignerons par p_i^0, q_i^0 les valeurs des variables p_i, q_i pour $t=0$.

Supposons qu'on ait intégré le système des équations (1), c'est-à-dire qu'on ait trouvé $2n$ relations entre les variables t, p_i, q_i, p_i^0, q_i^0. Jacobi admet implicitement qu'on ne peut éliminer toutes les variables p_i, p_i^0 d'aucune de ces relations. Nous supposerons, au contraire, que k de ces relations puissent s'exprimer indépendamment des quantités p_i, p_i^0. Soient

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, t)=0,\\ F_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, t)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, t)=0 \end{array}\right.\tag{2}$$

ces équations. On peut en tirer k des quantités q_i^0, par exemple $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0$, et les mettre sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} F_1=f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0, t)-q_1^0=0,\\ F_2=f_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0, t)-q_2^0=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F_k=f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0, t)-q_k^0=0. \end{array}\right.\tag{3}$$

Alors les $2n$ quantités q_i, q_i^0 ne pourront plus être considérées comme indépendantes. Mais il y a une première remarque à faire : c'est que, même dans ce cas, V *peut s'exprimer en fonction des variables* q_i, q_i^0. Cela résulte, comme l'a fait remarquer M. Bertrand, de l'expression même de la différentielle totale de cette fonction.

Admettons qu'on ait calculé V et qu'on l'ait exprimé d'une manière quelconque en fonction des variables q_i, q_i^0 (cela pourra se faire, en général, d'une infinité de manières, puisqu'il y a k relations entre les q_i, q_i^0). Remplaçant δV par son expression au moyen des dérivées partielles de V, on déduit de la formule (5) de ma première Communication la suivante :

$$(4)\qquad \sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}-p_i\right)\delta q_i-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial q_i^0}+p_i^0\right)\delta q_i^0=0.$$

On n'a plus le droit seulement d'égaler à zéro le coefficient de chaque différentielle, puisque les variables q_i, q_i^0 ne sont plus indépendantes. On a entre les différentielles de ces variables les k relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial F_1}{\partial q_1^0}\delta q_1^0+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial q_n^0}\delta q_n^0=0,\\
&\frac{\partial F_2}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial F_2}{\partial q_1^0}\delta q_1^0+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial q_n^0}\delta q_n^0=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial F_k}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial F_k}{\partial q_1^0}\delta q_1^0+\ldots+\frac{\partial F_k}{\partial q_n^0}\delta q_n^0=0.
\end{aligned}$$

Il suit de là que, en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ des multiplicateurs convenablement choisis, on pourra toujours poser

$$(5)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i}-p_i=-\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial q_i}-\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial q_i}-\ldots-\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial q_i},$$

$$(6)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_i^0}+p_i^0=\lambda_1\frac{\partial F_i}{\partial q_i^0}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial q_i^0}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial q_i^0}.$$

Telles sont les formules qu'il faut substituer aux équations de Jacobi.

Les équations (5), (6), jointes aux formules (3), permettent d'exprimer toutes les arbitraires de la question en fonction de

$$q_1, q_2, \ldots, q_n;\quad q_{k+1}^0, \ldots, q_n^0;\quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k.$$

Elles donnent donc l'intégrale générale du système des équations (1); de plus, les $2n$ arbitraires, en fonction desquelles s'expriment toutes les variables, sont indépendantes les unes des autres, et, par suite, toute relation où elles figureront seules devra être identiquement vérifiée.

Cherchons maintenant, en suivant pas à pas la marche de Jacobi, la dérivée partielle de V par rapport à t. On a

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\ldots+\frac{\partial V}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}=p_1\frac{dq_1}{dt}+\ldots+p_n\frac{dq_n}{dt}-H,$$

et, par suite, en remplaçant $\frac{\partial V}{\partial q_i}$ par son expression tirée de la première des équations (5),

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{\alpha=k}\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}\right)+H(p_i, q_i, t)=0.$$

Le coefficient de λ_α est évidemment égal à $-\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}$. On a donc, en remplaçant p_i dans H par sa valeur tirée des formules (5),

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial t}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial t}\\&\quad+H\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial q_i}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial q_i}, q_i, t\right)=0.\end{aligned}$$

Si, comme nous pouvons le supposer maintenant, les équations (7) ont été écrites sous la forme (3); si, en outre, au moyen de ces équations (3), on a chassé de V les quantités $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$, l'équation précédente a lieu entre les $2n$ arbitraires

$$q_{k+1}, \ldots, \quad q_n^0; \quad q_1, \ldots, \quad q_n; \quad \lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \quad \lambda_k.$$

Elle est donc *identiquement* vérifiée, d'après une remarque déjà faite. Or, si l'on y considère $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ comme des constantes, et si l'on remarque que les dérivées de F_α sont les mêmes que celles de f_α, elle exprime que la fonction

$$V+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_k f_k$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles proposée. Ainsi, sans changer de méthode, on obtient encore une intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles qu'il s'agit d'intégrer.

Le résultat de cette recherche peut être résumé dans le théorème suivant :

Étant données les équations différentielles

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

supposons qu'on les ait intégrées, et que des intégrales on puisse déduire k relations distinctes, et k seulement, entre les variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et leurs valeurs initiales; on mettra ces relations sous la forme

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0) - q_1^0 = 0,\\
F_2 &= f_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0) - q_2^0 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
F_k &= f_k(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, q_{k+2}^0, \ldots, q_n^0) - q_k^0 = 0,
\end{aligned}$$

et l'on calculera l'intégrale

$$V = \int_0^t \left(p_1 \frac{dq_1}{dt} + p_2 \frac{dq_2}{dt} + \ldots + p_n \frac{dq_n}{dt} - H\right) dt.$$

Cette intégrale pourra toujours s'exprimer en fonction des variables $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}^0, \ldots, q_n^0$. Cette expression de V étant obtenue, les intégrales générales du système des équations différentielles pourront se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
p_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_i},\\
p_i^0 + \frac{\partial V}{\partial q_i^0} &= \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial q_i^0} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial q_i^0} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_i^0},
\end{aligned}$$

et en outre la fonction

$$V + a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k,$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont des constantes arbitraires, sera une intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

où l'on a remplacé, dans H, p_i par $\frac{\partial V}{\partial q_i}$.

Je n'insiste pas sur la grande simplification qu'offrira l'intégration des équations différentielles du système canonique dans le cas spécial sur lequel M. Mayer a appelé l'attention.