BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A.-L. CAUCHY

Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 8 (1875), p. 148-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__8__148_1>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES, PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES [1];

PAR M. A.-L. CAUCHY.

(Suite et fin.)

18. Concevons qu'un liquide pesant soit renfermé dans un canal très-étroit, et que l'on prenne pour axe des x la droite horizontale qui marque dans ce canal le niveau naturel auquel le liquide s'élève. Supposons, de plus, que t désigne le temps, et qu'à l'instant où l'on compte $t=0$ on fasse naître le mouvement, en altérant le niveau, de manière que l'ordonnée verticale correspondant à l'abscisse x devienne

$$y = F(x). \tag{182}$$

On prouvera sans peine qu'au bout d'un temps quelconque t la même ordonnée sera déterminée par l'équation

$$y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\cos\left(\mu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} t\right)\cos\mu(x-\varpi)\,F(\varpi)\,d\mu\,d\varpi \tag{183}$$

(*voir* le Recueil des *Mémoires couronnés par l'Institut*, concours de 1815, p. 311). Si, dans la formule précédente, on pose

$$\mu = \frac{\alpha^2}{[(x-\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

([1]) Quelques cas particuliers de ce problème ont ete traites par M. Vachette, dans le tome I des *Nouvelles Annales*.

([2]) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 43.

et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{\frac{1}{2}gt^2}{[(x-\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{P},$$

on trouvera

$$(184)\quad y = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} \alpha \cos\left(2^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\frac{1}{2}}\alpha\right)\cos\alpha^2 \mathrm{F}(\varpi)\,\frac{d\alpha\, d\varpi}{[(x-\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour calculer cette dernière valeur de y, il faut d'abord déterminer, au moins par approximation, l'intégrale

$$(185)\qquad \int_0^{\infty} \alpha \cos\left(2^{\frac{1}{2}}\mathrm{P}^{\frac{1}{2}}\alpha\right)\cos\alpha^2 d\alpha.$$

On y parviendra facilement, si la quantité P devait toujours conserver une très-petite valeur numérique. Alors il suffirait de développer cette intégrale en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de P, et de réduire la série obtenue, savoir

$$(186)\qquad \frac{2\mathrm{P}}{2} - \frac{(2\mathrm{P})^3}{4.5.6} + \frac{(2\mathrm{P})^5}{6.7.8.9.10} - \ldots$$

(*voir* le Mémoire *Sur la Théorie des ondes*, p. 132, inséré dans le Recueil déjà cité), à un petit nombre de termes, en négligeant les autres. Mais comme, pour des valeurs croissantes de t, P croît au delà de toute limite, ainsi que les différents termes de la série, le moyen dont nous venons de parler est le plus souvent impraticable, et l'on ne peut s'en servir généralement, ni pour déterminer la valeur approchée de l'intégrale (185), ni même pour trouver des limites entre lesquelles cette intégrale demeure comprise. Heureusement l'équation (94) permet de transformer l'intégrale dont il s'agit en une autre dont le calcul ne présente pas les mêmes difficultés. En effet, si l'on pose dans cette équation

$$f(x) = x e^{x^2\sqrt{-1}} e^{ax\sqrt{-1}},$$

Δ s'évanouira; puis, en écrivant dans les deux membres la lettre α au lieu de x et de y, on trouvera

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{\alpha^2\sqrt{-1}} e^{a\alpha\sqrt{-1}}\, d\alpha = -\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2\sqrt{-1}} e^{-a\alpha}\, d\alpha$$

et, par suite,

$$(187)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2\cos a\alpha\,d\alpha\\&\quad=\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2\sin a\alpha\,d\alpha-\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2.e^{-a\alpha}\,d\alpha,\end{aligned}\right.$$

$$(188)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2\cos a\alpha\,d\alpha\\&\quad=-\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2\sin a\alpha\,d\alpha+\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2.\,e^{-a\alpha}\,d\alpha.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on tire de l'équation (161), en y posant $f(x)=e^{-x^2}$, $\theta=-\frac{\pi}{4}$,

$$\int_0^\infty e^{x^2\sqrt{-1}}\,dx=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

On aura, en conséquence,

$$(189)\qquad \int_{-\infty}^\infty e^{x^2\sqrt{-1}}\,dx=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\,\pi^{\frac{1}{2}};$$

puis, en faisant $x=\alpha+\frac{a}{2}$, on en conclura

$$(190)\quad \left\{\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty e^{(\alpha^2+a\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha&=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{a^2}{4}\sqrt{-1}}\\&=2\int_0^\infty e^{\alpha^2\sqrt{-1}}\cos a\alpha\,d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Si maintenant on différentie par rapport à la quantité a, on aura

$$(191)\qquad \int_0^\infty \alpha e^{\alpha^2\sqrt{-1}}\sin a\alpha\,d\alpha=-\frac{1-\sqrt{-1}}{4\sqrt{2}}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,a\,e^{-\frac{a^2}{4}\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(192)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2\sin a\alpha\,d\alpha=-\frac{\pi^{\frac{1}{2}}a}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a^2}{4}-\sin\frac{a^2}{4}\right)\\&\text{et}\\&\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2\sin a\alpha\,d\alpha=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}a}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a^2}{4}+\sin\frac{a^2}{4}\right).\end{aligned}\right.$$

Cela posé, les formules (187) et (188) deviendront

$$(193)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2\cos a\alpha\,d\alpha\\ &\quad=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}a}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a^2}{4}+\sin\frac{a^2}{4}\right)-\int_0^\infty \alpha\cos\alpha^2.e^{-a\alpha}\,d\alpha,\end{aligned}\right.$$

$$(194)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2\cos a\alpha\,d\alpha\\ &\quad=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}a}{4\sqrt{2}}\left(\cos\frac{a^2}{4}-\sin\frac{a^2}{4}\right)+\int_0^\infty \alpha\sin\alpha^2.e^{-a\alpha}\,d\alpha,\end{aligned}\right.$$

et la première donnera

$$(195)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \alpha\cos\left(2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}\alpha\right)\cos\alpha^2\,d\alpha\\ &\quad=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}}{4}\left(\cos\frac{P}{2}+\sin\frac{P}{2}\right)-\int_0^\infty \alpha e^{-2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}\alpha}\cos\alpha^2\,d\alpha.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de s'assurer que l'intégrale comprise dans le second membre de l'équation précédente est sensiblement nulle, pour de grandes valeurs de P, et que, dans tous les cas, sa valeur numérique est inférieure à celle de l'intégrale

$$(196)\qquad \int_0^\infty \alpha e^{-2^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{2}}\alpha}\,d\alpha=\frac{1}{2P}.$$

Ajoutons qu'il suffit de remplacer α par $\mu^{\frac{1}{2}}$ pour faire coïncider la formule (195) avec l'équation (7) de la page 180 du Mémoire *Sur la Théorie des ondes*.

ADDITION.

Nous avons remarqué, page 298 [1], que les formules (103), (104) fournissent les valeurs de presque toutes les intégrales définies connues, et d'un grand nombre d'autres. Nous allons indiquer ici quelques applications de ces mêmes formules.

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VII

Si l'on désigne par a et r des quantités positives, par m un nombre entier, et par $\mathrm{f}(x)$ une fonction telle que l'expression $\mathrm{f}(x+y\sqrt{-1})$ ne devienne point infinie pour des valeurs positives de y, on tirera de la formule (103)

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)\,dx}{r-x\sqrt{-1}}=0,$$

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)\,dx}{r+x\sqrt{-1}}=2\pi\,\mathrm{f}(r\sqrt{-1}),$$

$$(3)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)\,dx}{(r-x\sqrt{-1})^a}=0,$$

$$(4)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)\,dx}{(r+x\sqrt{-1})^m}=(-1)^{m-1}\frac{2\pi}{\Gamma(m)}\,\mathrm{f}^{(m-1)}(r\sqrt{-1}),$$

$$(5)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{l(r-x\sqrt{-1})}\,dx=-2\pi\,\mathrm{f}[(1-r)\sqrt{-1}], & \text{pour } r<1,\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{l(1-x\sqrt{-1})}\,dx=-\pi\,\mathrm{f}(0), & \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)}{l(r-x\sqrt{-1})}\,dx=0, & \text{pour } r>1,\end{cases}$$

et de la formule (104),

$$(6)\quad \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{f}(0),$$

$$(7)\quad \int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{f}(x)}{r+x}+\frac{\mathrm{f}(-x)}{r-x}\right]dx=\pi\,\mathrm{f}(-r)\sqrt{-1},$$

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2}\\[2ex] \displaystyle\quad=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{f}(r\sqrt{-1}),\end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(-r)]\sqrt{-1},\\[2ex] \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{x\,dx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{4}[\mathrm{f}(r)+\mathrm{f}(-r)],\end{cases}$$

$$(10)\qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{r^2\,dx}{x(x^2+r^2)}=\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{f}(0)-\mathrm{f}(r\sqrt{-1})\right],$$

$$(11)\qquad \int_0^\infty \left[\frac{\mathrm{f}(x)}{l(x)-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}+\frac{\mathrm{f}(-x)}{l(x)+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}\right]dx=-2\pi\,\mathrm{f}(\sqrt{-1}),$$

etc.

Si, dans l'équation (7), on pose $r=1$, $\mathrm{f}(x)=(-x\sqrt{-1})^{a-1}$, on trouvera

$$(-\sqrt{-1})^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x}+(\sqrt{-1})^{a-1}\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x}=\pi(\sqrt{-1})^a,$$

puis, en multipliant les deux membres par $(-\sqrt{-1})^a$, et ayant égard à l'équation

$$(-\sqrt{-1})^{2a-1}=\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2a-1}=\sin a\pi+\sqrt{-1}\cos a\pi,$$

on aura

$$(\sin a\pi+\sqrt{-1}\cos a\pi)\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x}-\sqrt{-1}\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x}=\pi$$

et, par suite,

$$(12)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$(13)\qquad \int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1-x}=\cos a\pi\int_0^\infty x^{a-1}\,\frac{dx}{1+x}=\frac{\pi}{\operatorname{tang} a\pi}.$$

La formule (12) a été donnée par Euler. La formule (13) a pour premier membre une intégrale définie dont la valeur générale est indéterminée; mais, dans le cas présent, cette intégrale doit être réduite à sa valeur principale, que l'on peut transformer de manière à faire coïncider l'équation (13) avec une autre équation établie par l'illustre géomètre qu'on vient de citer. Si, dans les formules (8) et (9), on pose $\mathrm{f}(x)=e^{ax\sqrt{-1}}$, on obtiendra les suivantes :

$$(14)\qquad \int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2+r^2}\,dx=\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+r^2}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ar},$$

$$(15)\qquad \int_0^\infty \frac{r\cos ax}{x^2-r^2}\,dx=-\frac{\pi}{2}\sin ar,\qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2-r^2}\,dx=\frac{\pi}{2}\cos ar.$$

La formule (14) a été donnée par M. Laplace. On en tire, en réduisant r à zéro, l'équation

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

qui est elle-même un cas particulier de la formule (6). Les formules (15), données pour la première fois par M. Bidone, géomètre italien, sont de la même nature que la formule (13) et fournissent les valeurs principales des intégrales qu'elles renferment. Mais il est facile de transformer ces valeurs principales en intégrales définies, dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ cesse de devenir infiniment grande pour des valeurs particulières de la variable. Ainsi, par exemple, en posant $r=1$, on tire de la première des équations (15)

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1-x^2}\,dx \\ &= 2\int_0^1 \sin\frac{a}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\sin\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}\sin a. \end{aligned}\right.$$

Si dans les formules (5) et (11) on pose $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 - e^{ax\sqrt{-1}}\right)$, a désignant toujours une constante positive, on trouvera

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{ax\sqrt{-1}}}{l(r-x\sqrt{-1})}\frac{dx}{x} = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1-r}\left[1-e^{-a(1-r)}\right], \quad \text{pour } r<1, \\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1-x\sqrt{-1})}\frac{dx}{x} = \pi a\sqrt{-1}, \\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{ax\sqrt{-1}}}{l(r-x\sqrt{-1})}\frac{dx}{x} = 0, \qquad \text{pour } r>1, \end{aligned}\right.$$

et

$$(19)\quad \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}(1-\cos ax) - \sin ax \,.\, l(x)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + [l(x)]^2}\frac{dx}{x} = \pi(1-e^{-a}).$$

On tirera encore des formules (1), (2), (6), (8) et (9), en désignant par a, b, r, s des quantités positives,

$$(20)\quad \int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} e^{bx\sqrt{-1}}\, l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{r-x\sqrt{-1}}=0,$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} e^{bx\sqrt{-1}}\, l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{r+x\sqrt{-1}}\\ &\qquad = 2\pi r^{a-1} e^{-br}\, l\left(1+\frac{s}{r}\right),\end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{r^2+x^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-1}e^{-br},$$

$$(23)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{r\,dx}{r^2-x^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-1}\cos\left(\frac{a\pi}{2}-br\right),$$

$$(24)\quad \int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}(e^a-1),$$

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{ae^{-br}},\\ &\int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\left(e^{ae^{-br}}-1\right),\end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{\cos bx}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-\sin bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-1}e^{e^{-br}}.$$

Si, dans les formules (20) et (21), on pose $a=1$, $b=0$, on en conclura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{r-x\sqrt{-1}}=0,\\ &\int_{-\infty}^{\infty} l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\frac{dx}{r+x\sqrt{-1}}=2\pi\, l\left(1+\frac{s}{r}\right)\end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{\infty} l\left(1+\frac{s^2}{x^2}\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\pi\, l\left(1+\frac{s}{r}\right),\\ &\int_0^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{s}{x}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}\, l\left(1+\frac{s}{r}\right),\end{aligned}\right.$$

puis, en différentiant $n - 1$ fois par rapport à r,

$$(29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-n} + (r + x\sqrt{-1})^{-n}}{2}\, l\left(1 + \frac{s^2}{x^2}\right) dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{\pi}{n-1}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - \left(\frac{1}{r+s}\right)^n\right], \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(r - x\sqrt{-1})^{-n} - (r + x\sqrt{-1})^{-n}}{2\sqrt{-1}} \operatorname{arc\,tang}\frac{s}{x}\, dx \\ \displaystyle\qquad = \frac{\pi}{2(n-1)}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - \left(\frac{1}{r+s}\right)^n\right]. \end{cases}$$

De plus, si dans les équations (9) on remplace $f(x)$ par

$$l\left(1 + \frac{s}{x}\sqrt{-1}\right),$$

on en tirera

$$(30)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} l\left(1 + \frac{s^2}{x^2}\right) \frac{r\,dx}{x^2 - r^2} = -\pi \operatorname{arc\,tang}\frac{s}{r}, \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{s}{x}\, \frac{x\,dx}{x^2 - r^2} = \frac{\pi}{4}\, l\left(1 + \frac{s^2}{r^2}\right), \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Ajoutons que, si l'on pose $r = 1$ et $s = 1$ dans la seconde des formules (29), on en déduira sans peine celles qui suivent :

$$(31)\quad \int_0^{\infty} (\operatorname{arc\,cot} x)^2 dx = 2\int_0^{\infty} \operatorname{arc\,cot} x \, \frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \pi\, l(2),$$

$$(32)\quad \int_0^1 \frac{x \operatorname{arc\,tang}\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\operatorname{arc\,tang} x}{x - \dfrac{1}{x}}\, dx = \frac{\pi}{4}\, l(2).$$

Il peut arriver, en vertu de ce qui a été dit (page 298) [1], que les formules (1), (2),... subsistent dans certains cas où la fonction $f(x + y\sqrt{-1})$ deviendrait infinie pour des valeurs positives de y. C'est ce qui aura lieu en particulier pour les formules (8) et (9),

---

[1] Voir *Bulletin*, t. VII.

si, a étant $< b$, $\mathrm{f}(x)$ se réduit au quotient de $\sin ax$ ou $\cos ax$ par $\sin bx$ ou $\cos bx$. Alors on trouvera

$$(33)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx}\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ar}+e^{-ar}}{e^{br}+e^{-br}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ar}-e^{-ar}}{e^{br}-e^{-br}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\sin bx}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ar}+e^{-ar}}{e^{br}-e^{-br}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\cos bx}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{ar}-e^{-ar}}{e^{br}+e^{-br}}. \end{cases}$$

Ces dernières formules, que j'avais données dans le Mémoire de 1814, en y remplaçant x par l'unité, ont été citées par M. Legendre dans le Rapport fait sur ce Mémoire, et dans la cinquième partie des exercices de *Calcul intégral*.

On pourrait aux exemples qui précèdent en ajouter une infinité d'autres. Je me contenterai d'en indiquer quelques-uns. Si l'on représente, comme ci-dessus, par a, b, r, s, des quantités positives; si, de plus, on désigne par θ un arc renfermé entre les limites zéro, π, et par $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de la variable x, on déduira sans peine de la formule (103) les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} l(1-rx\sqrt{-1})\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l[r\sin\theta+(r\cos\theta-x)\sqrt{-1}]\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1}\,l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}}{l(r-x\sqrt{-1})}\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{a-1}}{l(r-x\sqrt{-1})} e^{bx\sqrt{-1}}\, l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ae^{bx\sqrt{-1}}}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} e^{ae^{bx\sqrt{-1}}}\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(1+re^{bx\sqrt{-1}})\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{bx\sqrt{-1}}\, l(1+re^{bx\sqrt{-1}})\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{\sin ax}\varphi(x)\,dx,$$

etc.

et par suite les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{a-1}\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos bx\,\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin bx\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{s}{x}\,\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,cot} x\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(r^2-2rx\cos\theta+x^2)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{r\cos\theta-x}{r\sin\theta}\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{a\cos bx}\cos(a\sin bx)\varphi(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(1+2r\cos bx+r^2)\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{arc\,tang}\frac{r\sin bx}{1+r\cos bx}\,\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-bx\right)\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2}\,dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{l(x)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+[l(x)]^2}\,\frac{\varphi(x)+\varphi(-x}{2}\,dx,$$

etc.

Nous observerons, en finissant, que les constantes renfermées dans quelques-unes des intégrales ci-dessus déterminées doivent être resserrées entre des limites telles que les valeurs de ces intégrales restent finies. Ainsi, en particulier, on reconnaîtra sans peine que la constante a doit rester comprise entre les limites zéro et 1 dans les formules (12) et (13), et entre les limites zéro et 2 dans les formules (22), (23), (26). Ajoutons que, dans plusieurs formules, on pourra remplacer des constantes supposées réelles par des constantes imaginaires. Par exemple, la constante a peut devenir imaginaire dans les formules (12), (13), (23), (26). Seulement la partie réelle de a doit alors être renfermée entre les limites que nous venons d'indiquer ([1]).