BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

ED. DEWULF

Sur les transformations géométriques des figures planes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 5 (1873), p. 206-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__5__206_1>

MÉLANGES.

SUR LES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DES FIGURES PLANES;

D'après les Mémoires publiés par M. CREMONA et des Notes inédites.

1. Je considère deux plans P, P′ dont les points se correspondent d'après la loi suivante : à un point quelconque (x_1, x_2, x_3) de P correspond, en général, un seul point bien déterminé (x'_1, x'_2, x'_3) de P′, et, réciproquement, à un point quelconque x' correspond un seul point bien déterminé x. En outre, quand le point x parcourt une droite dans P, le point correspondant x' décrit toujours une courbe algébrique φ' d'ordre n dans P′.

Cette hypothèse revient à établir, entre les coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3), (x'_1, x'_2, x'_3) de deux points correspondants quelconques des deux plans, les relations

$$(1) \qquad x_1 : x_2 : x_3 = \varphi'_1 : \varphi'_2 : \varphi'_3,$$

où les φ' sont des fonctions homogènes entières des x' de degré n, et telles que des relations (1) on puisse déduire les formules inverses

$$(2) \qquad x'_1 : x'_2 : x'_3 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

où les φ sont des fonctions homogènes et entières des x.

2. Deux droites

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = 0,$$
$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0$$

du plan P ont un seul point commun; donc, parmi les points communs aux courbes

$$h_1 \varphi'_1 + h_2 \varphi'_2 + h_3 \varphi'_3 = 0,$$
$$k_1 \varphi'_1 + k_2 \varphi'_2 + k_3 \varphi'_3 = 0,$$

un seul dépendra des valeurs des h et des k; tous les autres, qui sont équivalents à $n^2 - 1$ intersections, étant indépendants des h et des k, seront communs à toutes les courbes φ'. Comme un point i-ple équivaut à i^2 intersections simples, il résulte de là que, si les courbes φ' ont α'_i points i-ples, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2 \alpha'_i = n^2 - 1. \tag{3}$$

Une droite dans le plan P est déterminée par deux points; les deux points correspondants dans P′ suffiront donc pour déterminer la courbe correspondante φ'. Donc les φ' forment un système doublement infini de courbes tel qu'une seule d'entre elles passe par deux points donnés arbitrairement; cela revient à dire que les φ' forment un réseau géométrique d'ordre n.

J'appellerai *point fondamental* i-ple (ou d'ordre i) du plan P′ tout point par lequel chacune des courbes φ' passe i fois.

3. Une courbe quelconque φ' correspond, *point par point*, à une droite; car, si le point x parcourt une droite, un point x' de φ' correspond à chacune de ses positions; et, réciproquement, à tout point x' de φ' correspond un point x de la droite. Donc φ' est une courbe *rationnelle* (*unicursale* suivant Cayley) ou bien du *genre zéro;* en d'autres termes, ses points multiples équivalent au nombre maximum $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ de points doubles que puisse avoir une courbe d'ordre n.

4. Si le point x' se meut (dans le plan P′) en décrivant une droite l', de quel ordre sera la courbe φ, lieu du point x correspondant (dans P)? Une courbe quelconque φ' renferme n positions de x'; donc la droite p, qui correspond, dans P, à la courbe φ', ren-

fermera les n positions correspondantes de x. Le lieu du point x est donc une courbe φ d'ordre n, et à une droite quelconque du plan P' correspond une courbe d'ordre n dans P. Cela revient à dire que dans les formules (2) les fonctions φ sont de degré n, comme les fonctions φ' dans les formules (1).

En répétant pour les φ ce que nous avons dit pour les φ', nous verrons que les φ sont des courbes rationnelles qui forment un réseau géométrique d'ordre n; et, si l'on désigne par α_i le nombre des points fondamentaux d'ordre i du plan P, c'est-à-dire, le nombre des points qui sont i-ples pour toutes les courbes φ, nous aurons

$$(3)' \qquad \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = n^2 - 1.$$

La correspondance que nous avons supposée entre les points des deux plans constitue une *transformation birationnelle de degré n*.

5. Soient f' un point fondamental i-ple du plan P', p une droite du plan P, et φ' la courbe correspondant à p dans P'. Si nous faisons tourner une droite l' autour de f' dans P', elle déterminera dans chacune de ses positions $n-i$ points variables de φ'; les i autres intersections sont fixes et réunies en f'. La courbe variable φ qui correspond à l' coupera donc la droite p en n points, dont $n-i$ seulement varieront avec φ. Donc ces courbes φ se composent chacune d'une courbe fixe Φ d'ordre i et d'une courbe variable K d'ordre $n-i$. Les points de la courbe fixe Φ correspondent tous au point fondamental f', et au faisceau de droites menées par f' correspond dans P un faisceau de courbes d'ordre $n-i$, et chacune de ces courbes prise avec la courbe Φ donne une courbe φ.

La courbe fixe Φ d'ordre i qui correspond au point fondamental f' d'ordre i est nommée *courbe fondamentale* d'ordre i du plan P.

De même, à tout point fondamental f, i-ple, du plan P correspond dans P' une courbe fondamentale Φ' d'ordre i, c'est-à-dire qu'à chacune des positions d'une droite tournant autour de f dans P correspondra dans P' une ligne composée d'une courbe variable d'ordre $n-i$ et d'une courbe fixe Φ' d'ordre i.

On obtient ainsi, dans chacun des deux plans, un système de courbes fondamentales qui correspondent aux points fondamentaux de l'autre.

Les points fondamentaux sont donc les seuls qui fassent exception à la règle générale, que, à un point quelconque de l'un des plans, correspond dans l'autre un seul point bien déterminé.

A proprement parler, les points de Φ correspondent un à un aux points de P' infiniment voisins de f'. Les i intersections de Φ avec une droite p correspondent aux i branches de la courbe φ' correspondant à p, qui passent par f'. Si la droite p tourne autour d'un point a de Φ, la tangente à l'une des branches de φ' restera fixe; c'est la tangente dont la direction est déterminée par le point a' infiniment voisin de f' et correspondant à a. De ce que les points de Φ et les directions issues de f' se correspondent un à un, il résulte que Φ est une courbe rationnelle.

La courbe K d'ordre $n-i$ est aussi rationnelle, car elle correspond, point par point, à une droite l'.

Les courbes Φ et K ont un seul point commun, en dehors des points fondamentaux, car la droite l' correspondant à K a un seul point infiniment voisin de f'.

Toutes les courbes φ du réseau P qui passent par un point a non fondamental forment un faisceau auquel correspond, dans P', un faisceau de droites passant par a', et réciproquement.

6. Soient f un point fondamental d'ordre i du plan P, Φ' la courbe fondamentale correspondante, f_1 un second point fondamental de P, Φ'_1 la courbe fondamentale correspondante. Un point quelconque de Φ' correspond à f, un point quelconque de Φ'_1 correspond à f_1; donc un point commun à Φ' et à Φ'_1 correspond en même temps à f et à f_1, ce qui ne peut avoir lieu que si ce point est un point fondamental. Donc les points d'intersection des courbes fondamentales d'un plan sont des points fondamentaux de ce plan, et réciproquement; donc les points fondamentaux d'un plan sont tous des intersections des courbes fondamentales de ce plan.

7. Si une courbe φ se décompose en deux courbes, l'une de celles-ci est nécessairement une courbe fondamentale.

En effet, imaginons que le point x' parcoure d'un mouvement continu la droite p' correspondant à φ; le mouvement du point correspondant x doit aussi être continu, et, par suite, ce point parcourra une seule des courbes partielles. L'autre courbe correspondra donc à un point singulier de p', c'est-à-dire à un point fondamental de P'. Donc, si une courbe φ se décompose en deux courbes d'ordre inférieur, la droite correspondante p' passe par un point fondamental de P′.

8. Considérons maintenant un point x' non fondamental de P′, et deux courbes φ' qui passent par ce point, l'une d'elles au moins ne se décomposant pas en courbes d'ordres inférieurs. Comme les points fondamentaux de P′ représentent n^2-1 intersections des deux courbes φ', et comme deux lignes d'ordre n, qui n'ont pas en commun une courbe partielle, ne peuvent se couper en plus de n^2 points, il s'ensuit que le point x' sera une intersection simple pour les deux courbes φ', ou bien qu'il ne peut être un point multiple ni pour l'une ni pour l'autre de ces courbes.

Donc les courbes φ' ne peuvent avoir de points multiples en dehors des points fondamentaux de leur plan. Si l'on se rappelle que le genre d'une courbe d'ordre n douée de α'_i points i-ples est $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha'_i$, et que les courbes φ' sont des courbes rationnelles, on voit que l'on a

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha'_i=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

On a de même, pour les courbes φ du plan P,

$$(4)'\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{2}i(i-1)\alpha_i=\frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

En retranchant de l'équation (3) le double de l'équation (4), on a

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}i\alpha'_i=3(n-1),$$

et, en combinant (3)′ avec (4)′,

$$(5)'\qquad \sum_{i=1}^{i=n-1}i\alpha_i=3(n-1).$$

9. Les courbes φ' doivent donc satisfaire aux deux conditions (3) et (4), ou (3) et (5). Réciproquement, on peut démontrer que ces

conditions sont suffisantes pour déterminer une transformation birationnelle du degré n entre deux plans P et P'. En effet, supposons que l'on ait dans P' trois courbes $\varphi'_1 = 0$, $\varphi'_2 = 0$, $\varphi'_3 = 0$, d'ordre n et n'appartenant pas à un même faisceau, qui satisfassent à ces conditions. Elles déterminent un réseau dont une courbe quelconque a pour équation

$$h_1 \varphi'_1 + h_2 \varphi'_2 + h_3 \varphi'_3 = 0.$$

Faisons correspondre les courbes de ce réseau aux droites du plan P, de manière qu'à la courbe générique ci-dessus corresponde la droite

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = 0.$$

Alors, au point x, commun aux deux droites

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 + h_3 x_3 = 0, \quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0,$$

correspondra le point x', commun aux deux courbes

$$h_1 \varphi'_1 + h_2 \varphi'_2 + h_3 \varphi'_3 = 0, \quad k_1 \varphi'_1 + k_2 \varphi'_2 + k_3 \varphi'_3 = 0,$$

qui, seul, dépend des valeurs des h et des k. Ce point est unique et bien déterminé en vertu des conditions ci-dessus.

10. Un faisceau de droites du plan P', qui passent par un point quelconque donné, contient α'_i rayons dirigés vers les points fondamentaux i-ples; donc le faisceau de courbes correspondantes du réseau P contiendra α'_i courbes, dont chacune est composée d'une courbe principale Φ d'ordre i, et de la courbe k d'ordre $n-i$, qui correspond au rayon considéré (¹). Si nous voulons calculer les points doubles du faisceau, il faut observer qu'un point i-ple, commun à toutes les courbes du faisceau, compte pour $(i-1)(3i+1)$ points doubles; donc tous les points fondamentaux du plan P équi-

(¹) A une droite passant par deux points fondamentaux d'ordres i et j correspond une courbe d'ordre n, qui se décompose en une courbe fondamentale d'ordre i, une courbe fondamentale d'ordre j et une courbe d'ordre $n-i-j$. On a toujours $n \geqq i+j$. Si $n = i+j$, la droite qui joint les deux points fondamentaux est elle-même une ligne fondamentale.

En général, si la courbe d'ordre mn qui correspond à une courbe d'ordre n passe r fois par un point fondamental i-ple, elle contiendra r fois la courbe fondamentale d'ordre i qui correspond à ce point; etc.

valent ensemble à $\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i$ points doubles. A ce nombre il faut ajouter autant de points doubles qu'il y a de courbes composées (car les courbes composantes de chaque courbe composée ont un point simple commun en dehors des points fondamentaux), c'est-à-dire autant qu'il y a de points fondamentaux du plan P′ ou $\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i$. D'ailleurs, le nombre total des points doubles d'un faisceau d'ordre n est $3(n-1)^2$; nous aurons donc

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i+\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i=3(n-1)^2.$$

D'après les équations (3)′ et (5)′,

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)(3i+1)\alpha_i=3(n-1)^2-\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha_i;$$

donc

$$\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha_i=\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i, \tag{6}$$

où les deux réseaux P et P′ ont le même nombre de points fondamentaux.

11. De ce qu'une courbe du réseau P ne peut avoir un point double, en dehors des points fondamentaux, sans se décomposer en deux courbes, dont l'une est une courbe fondamentale, et de ce que, dans ce cas, le point double est l'unique point d'intersection des courbes composantes en dehors des points fondamentaux, il résulte que les courbes fondamentales du plan P forment le lieu des points doubles des courbes du réseau de ce plan, ou, en d'autres termes, qu'elles forment la *Jacobienne* du réseau P. De même, les courbes fondamentales du plan P′ forment la Jacobienne du réseau P′. On peut remarquer que les équations (5)′ et (5) expriment précisément que les sommes des ordres des courbes fondamentales des plans P et P′ sont égales à l'ordre de la Jacobienne des réseaux P et P′.

12. Soit ω le nombre de fois que la courbe fondamentale Φ d'ordre i, correspondant au point fondamental f', passe par le point fondamental f_1 d'ordre i, auquel correspond la courbe Φ'_1. Menons par f_1 une droite arbitraire l, qui coupe Φ en $i - \omega$ autres points. A la droite l correspond une courbe d'ordre n, composée de Φ'_1 et d'une autre courbe k'_{n-i_1}. La courbe Φ'_1 correspond au seul point f_1, et k'_{n-i_1} correspond aux autres points de l; mais les points de Φ correspondent au point f'; donc k'_{n-i_1} passe $i - \omega$ fois par f', et, par suite, Φ'_1 passera $i - (i - \omega)$ fois par le même point f'; en d'autres termes, Φ passe autant de fois par f_1 que Φ'_1 par f'.

13. On sait que, si un point est i-ple pour toutes les courbes d'un réseau, il est $(3i - 1)$-ple pour la Jacobienne. Par suite, le nombre total des branches des courbes fondamentales de P qui passent par un point fondamental i-ple est $3i - 1$. Donc, en vertu du théorème précédent, une courbe fondamentale d'ordre i passe $3i - 1$ fois par les points fondamentaux de son plan.

14. Une courbe quelconque φ' du réseau P' a i branches qui se croisent au point fondamental f' d'ordre i; les tangentes à ces branches sont toutes distinctes, si la droite p, qui correspond dans P à φ', rencontre en i points distincts la courbe fondamentale Φ correspondant à f'. Mais Φ a un nombre de points multiples équivalent à $\frac{(i-1)(i-2)}{2}$ points doubles; la classe de cette courbe sera donc [1], en général et au plus, $2(i-1)$ et, par suite, dans un faisceau de courbes d'un des réseaux P ou P', il y a $2(i-1)$ courbes dont deux branches ont une même tangente en un point fondamental donné de degré i.

La courbe fondamentale Φ a aussi $3(i-2)$ points d'inflexion et $2(i-2)(i-3)$ tangentes doubles; donc le réseau P a $3(i-2)$ courbes dont trois branches ont une même tangente en un point fondamental i-ple donné, et $2(i-2)(i-3)$ courbes qui ont, en ce point, deux branches tangentes à une même droite et deux autres branches tangentes à une seconde droite.

15. La classe d'une courbe principale d'ordre i étant $2(i-1)$, la classe de la Jacobienne d'un des réseaux sera $2\sum_{i=1}^{i=n-1}(i-1)\alpha_i$ ou

[1] Voir *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, 104 (f).

$6(n-1) - 2\sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha'_i$ en vertu des équations $(5)'$ et (6).

La classe de la Jacobienne peut aussi se déduire de son ordre $3(n-1)$ et du nombre de ses points multiples qui équivalent à $\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(3i-1)(3i-2)}{2}\alpha_i$ points doubles. On a ainsi

$$(3n-1)(3n-4) - \sum_{i=1}^{i=n-1}(3i-1)(3i-2)\alpha_i = 6(n-1) - 2\sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha'_i,$$

équation identique à cause de $(3)'$ et $(5)'$.

16. Nous avons vu que toutes les intersections de deux courbes fondamentales sont des points fondamentaux. Il résulte de là que, si deux courbes fondamentales données d'ordres i, i_1 passent l'une ρ fois, l'autre σ fois par un même point fondamental, la somme des produits analogues à $\rho\sigma$, étendue à tous les points fondamentaux du plan, sera égale à $i \times i_1$.

De même, une courbe fondamentale et une courbe φ (dans un même plan) ne se coupent qu'aux points fondamentaux; en effet, si une courbe φ passe par un point d'une courbe fondamentale qui ne soit pas un point fondamental, elle se décompose en deux courbes, dont l'une est la courbe fondamentale elle-même. Donc, si une courbe fondamentale d'ordre i passe ρ fois par un point fondamental d'ordre i_1, la somme des produits analogues à ρi_1, étendue à tous les points fondamentaux du plan, est égale à $i \times n$.

En vertu de la propriété déjà énoncée (12), il faut conclure de là que, si une courbe fondamentale passe respectivement ρ, σ fois par deux points fondamentaux donnés de degrés i et i_1, la somme des produits analogues à $\rho\sigma$, étendue à toutes les courbes fondamentales du plan, est égale à $i \times i_1$.

Si une courbe fondamentale d'ordre i_1 passe ρ fois par un point fondamental donné de degré i, la somme des produits analogues à ρi_1, étendue à toutes les courbes fondamentales du plan, est égale à $i \times n$.

17. Les équations (3), (5), $(3)'$, $(5)'$ prouvent que les propriétés des deux plans P, P′ sont parfaitement réciproques, ou bien que

les solutions des équations (3), (5) sont conjuguées deux à deux de la manière suivante :

Si les courbes d'ordre n d'un réseau ont en commun α_1 points simples, α_2 points doubles, ..., α_i points i-ples, ..., α_{n-1} points $(n-1)$-ples, où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$ est une solution des équations (3), (5), la Jacobienne du réseau est composée de α'_1 droites, α'_2 coniques, ..., α'_i courbes d'ordre i, ... et α'_{n-1} courbes d'ordre $n-1$, où $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_{n-1})$ est une autre solution des équations (3) et (5). En outre, cette seconde solution est telle que, si l'on considère un réseau de courbes d'ordre n ayant en commun α'_1 points simples, α'_2 points doubles, ..., α'_i points i-ples, ..., α'_{n-1} points $(n-1)$-ples, la Jacobienne de ce second réseau sera composée de α_1 droites, α_2 coniques, ..., α_i courbes d'ordre i, ..., α_{n-1} courbes d'ordre $n-1$.

Les deux solutions $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1})$, $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_i, \ldots, \alpha'_{n-1})$, définies dans l'énoncé précédent, seront dites *solutions conjuguées*. Elles satisfont aux relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i\alpha'_i = 3(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} i^2\alpha'_i = n^2-1,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha'_i;$$

mais elles seront mieux caractérisées par une autre propriété qui sera démontrée dans la suite.

18. Examinons maintenant quelques cas particuliers. Soit $n=2$; le réseau sera formé de coniques passant par trois points o_1, o_2, o_3. La Jacobienne est formée par les trois droites o_2o_3, o_3o_1, o_1o_2; en effet, un point quelconque m de la droite o_2o_3 est double pour une conique du réseau : c'est celle qui est composée des deux droites o_2o_3, o_1m, etc.

A $\alpha_1 = 3$ correspond donc $\alpha'_1 = 3$, ou bien les équations (3), (5) admettent, dans ce cas, un seul couple de solutions conjuguées, et ces deux solutions se confondent en une seule

$$n = 2.$$

$$\boxed{\alpha_1 = 3}$$

19. Soit $n = 3$; (3) et (5) donnent $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$, c'est-à-dire que le réseau sera formé de cubiques ayant en commun un point double d et quatre points ordinaires o_1, o_2, o_3, o_4. La Jacobienne se compose de la conique $do_1o_2o_3o_4$ et des quatre droites $d(o_1, o_2, o_3, o_4)$. En effet, un point quelconque m de la conique ci-dessus est double pour une cubique du réseau, celle qui est composée de la conique elle-même et de la droite md, et un point quelconque m de la droite do_1 est double pour la cubique du réseau composée de la droite elle-même et de la conique $dmo_2o_3o_4$.

A $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$ correspond ainsi $\alpha'_1 = 4$, $\alpha'_2 = 1$; les deux solutions conjuguées se confondent :

$$n = 3.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha_1 = 4 \\ \alpha_2 = 1\end{array}}$$

20. Soit $n = 4$; (3) et (5) admettent les deux solutions non conjuguées

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 0,$$

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1.$$

Dans le premier cas, le réseau est formé par des courbes du quatrième ordre ayant en commun trois points doubles d_1, d_2, d_3 et trois points simples o_1, o_2, o_3; et la Jacobienne est composée des trois coniques $d_1d_2d_3(o_2o_3, o_3o_1, o_1o_2)$ et des trois droites d_2d_3, d_3d_1, d_1d_2. En effet, un point quelconque m de la conique $d_1d_2d_3o_2o_3$ est double pour une courbe du réseau composée de cette conique et de l'autre conique $d_1d_2d_3o_1m$; et un point quelconque m de la droite $d_2 d_3$ est double pour une courbe du réseau composée de la droite elle-même et de la cubique $d_1^2 d_2 d_3 o_1 o_2 o_3 m$ [1].

De même, dans le second cas, quand les courbes du réseau ont en commun un point triple t et six points simples $o_1, o_2, \ldots, o_6$, on démontre que la Jacobienne est formée par la cubique $t^2 o_1 o_2 \ldots o_6$, et les six droites $t(o_1, o_2, o_3, \ldots, o_6)$.

De cette manière, à

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 0$$

correspond

$$\alpha'_1 = 3, \quad \alpha'_2 = 3, \quad \alpha'_3 = 0,$$

et à

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$$

correspond

$$\alpha'_1 = 6, \quad \alpha'_2 = 0, \quad \alpha'_3 = 1;$$

c'est-à-dire, les équations (3), (5) admettent deux solutions distinctes, dont chacune coïncide avec sa propre conjuguée.

$$n = 4.$$

$\alpha_1 =$	6,	3
$\alpha_2 =$	0,	3
$\alpha_3 =$	1,	0

21. Si $n = 5$, (3) et (5) admettent les trois solutions suivantes :

$$\alpha_1 = 8, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 1,$$
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0,$$
$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0,$$

dont chacune se confond avec sa conjuguée.

Dans le premier cas, les courbes (du cinquième ordre) du réseau ont en commun un point quadruple q et huit points simples $o_1, o_2, \ldots, o_8$; et la Jacobienne est formée par la courbe du quatrième ordre $q^3 o_1 o_2 \ldots o_8$ et par les huit droites $q(o_1, o_2, \ldots, o_8)$.

Dans le second cas, les courbes du réseau ont en commun un point

[1] Ce symbole indique que la cubique a un point double en d_1 et passe, en outre, par les points $d_2, d_3, o_1, o_2, o_3, m$.

triple t, trois points doubles d_1, d_2, d_3 et trois points simples o_1, o_2, o_3. La Jacobienne se compose de la cubique $t_2 d_1 d_2 d_3 o_1 o_2 o_3$, des trois coniques $t d_1 d_2 d_3 (o_1, o_2, o_3)$, et des trois droites $t(d_1, d_2, d_3)$.

Dans le troisième cas, les courbes du réseau ont en commun six points doubles $d_1, d_2, \ldots, d_6$, et la Jacobienne est le système des six coniques qui passent par ces points pris cinq à cinq.

$n = 5$.

$\alpha_1 = 8,$	$3,$	0
$\alpha_2 = 0,$	$3,$	6
$\alpha_3 = 0,$	$1,$	0
$\alpha_4 = 1,$	$0,$	0

22. Pour $n = 6$, nous avons les quatre solutions suivantes :

$$\alpha_1 = 10,\quad \alpha_2 = 0,\quad \alpha_3 = 0,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 1;$$
$$\alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = 4,\quad \alpha_3 = 2,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0;$$
$$\alpha_1 = 3,\quad \alpha_2 = 4,\quad \alpha_3 = 0,\quad \alpha_4 = 1,\quad \alpha_5 = 0;$$
$$\alpha_1 = 4,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 3,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0.$$

Les deux premières se confondent avec leurs conjuguées respectives, les deux dernières sont conjuguées entre elles.

Laissons de côté les deux premiers cas; observons seulement que, dans le troisième, le réseau est formé de courbes du sixième ordre ayant en commun un point quadruple q, quatre points doubles d_1, d_2, d_3, d_4, et trois points simples o_1, o_2, o_3 (¹); et la Jacobienne se compose des trois cubiques $q^2 d_1 d_2 d_3 d_4 (o_2 o_3, o_3 o_1, o_1 o_2)$, de la conique $q d_1 d_2 d_3 d_4$, et des quatre droites $q(d_1, d_2, d_3, d_4)$: donc à

$$\alpha_1 = 3,\quad \alpha_2 = 4,\quad \alpha_3 = 0,\quad \alpha_4 = 1,\quad \alpha_5 = 0$$

correspond

$$\alpha'_1 = 4,\quad \alpha'_2 = 1,\quad \alpha'_3 = 3,\quad \alpha'_4 = 0,\quad \alpha'_5 = 0,$$

(¹) *Voir* MAGNUS, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie*, Band I, S. VII; Berlin, 1833.

et à

$$\alpha_1 = 4,\quad \alpha_2 = 1,\quad \alpha_3 = 3,\quad \alpha_4 = 0,\quad \alpha_5 = 0$$

correspond

$$\alpha'_1 = 3,\quad \alpha'_2 = 4,\quad \alpha'_3 = 0,\quad \alpha'_4 = 1,\quad \alpha'_5 = 0.$$

En effet, dans le quatrième cas, les courbes du réseau ont en commun trois points triples t_1, t_2, t_3, un point double d et quatre points simples o_1, o_2, o_3, o_4; et la Jacobienne est composée de la courbe du quatrième ordre $t_1^2 t_2^2 t_3^2 d o_1 o_2 o_3 o_4$, des quatre coniques $t_1 t_2 t_3 d(o_1, o_2, o_3, o_4)$, et des trois droites $t_2 t_3$, $t_3 t_1$, $t_1 t_2$.

$n = 6.$

$\alpha_1 =$	10,	1	4,	3
$\alpha_2 =$	0,	4	1,	4
$\alpha_3 =$	0,	2	3,	0
$\alpha_4 =$	0,	0	0,	1
$\alpha_5 =$	1,	0	0,	0

23. D'une manière semblable, nous trouvons cinq solutions pour $n = 7$; deux d'entre elles sont conjuguées entre elles. Pour $n = 8$, il y a deux couples de solutions conjuguées et cinq autres solutions respectivement conjuguées à elles-mêmes ([1]).

$n = 7.$

$\alpha_1 =$	12,	2,	0	5,	3
$\alpha_2 =$	0,	3,	3	0,	5
$\alpha_3 =$	0,	2,	4	3,	0
$\alpha_4 =$	0,	1,	0	1,	0
$\alpha_5 =$	0,	0,	0	0,	1
$\alpha_6 =$	1,	0,	0	0,	0

$n = 8.$

$\alpha_1 =$	14,	3,	1,	0,	3	3,6	0,2
$\alpha_2 =$	0,	2,	3,	0,	3	6,0	5,0
$\alpha_3 =$	0,	3,	2,	7,	0	0,1	2,5
$\alpha_4 =$	0,	0,	2,	0,	3	0,3	0,1
$\alpha_5 =$	0,	1,	0,	0,	0	0,0	1,0
$\alpha_6 =$	0,	0,	0,	0,	0	1,0	0,0
$\alpha_7 =$	1,	0,	0,	0,	0	0,0	0,0

([1]) $n = 8$. La solution 3, 3, 0, 3, 0, 0, 0 a été indiquée par M. Cayley (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. III, p. 143; 1870).

$n = 9.$

$\alpha_1 = 16,$	4,	2,	0	3,7	1,3	0,1
$\alpha_2 = 0,$	1,	3,	4	7,0	4,0	3,1
$\alpha_3 = 0,$	4,	1,	0	0,0	3,4	3,3
$\alpha_4 = 0,$	0,	2,	4	0,3	0,1	1,3
$\alpha_5 = 0,$	0,	1,	0	0,1	0,1	1,0
$\alpha_6 = 0,$	1,	0,	0	0,0	1,0	0,0
$\alpha_7 = 0,$	0,	0,	0	1,0	0,0	0,0
$\alpha_8 = 1,$	0,	0,	0	0,0	0,0	0,0

$n = 10.$

$\alpha_1 = 18,$	5,	1,	0,	0	3,8	2,4	1,2	3,3	3,0	0,1
$\alpha_2 = 0,$	0,	4,	2,	0	8,0	3,0	3,1	3,3	0,6	1,0
$\alpha_3 = 0,$	5,	0,	2,	7	0,0	4,3	2,3	0,1	0,0	5,2
$\alpha_4 = 0,$	0,	2,	3,	0	0,1	0,2	2,1	3,0	6,0	0,5
$\alpha_5 = 0,$	0,	2,	1,	0	0,3	0,0	0,2	0,3	0,3	2,0
$\alpha_6 = 0,$	0,	0,	0,	1	0,0	0,1	1,0	1,0	0,0	0,0
$\alpha_7 = 0,$	1,	0,	0,	0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\alpha_8 = 0,$	0,	0,	0,	0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\alpha_9 = 1,$	0,	0,	0,	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

24. Il est bien entendu que nous avons laissé de côté les systèmes des valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ qui ne satisfont pas au problème géométrique, quoiqu'ils résolvent arithmétiquement les équations (3) et (5). Le problème géométrique exige, en effet, qu'une courbe d'ordre n puisse avoir α_2 points doubles, α_3 points triples, ..., sans se décomposer en courbes d'ordres inférieurs. Par exemple, comme une courbe du cinquième ordre ne peut avoir deux points triples, il faudra, pour $n = 5$, exclure la solution

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 0.$$

Une courbe du septième ordre ne peut avoir cinq points triples, parce que la conique passant par ces points couperait la courbe en quinze points, et l'on sait que deux courbes (non composées) ne peuvent avoir en commun un nombre de points supérieur au produit de leurs ordres; donc, dans le cas de $n = 7$, il faudra exclure la solution

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 5, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0.$$

Pour la même raison, une courbe du dixième ordre ne peut avoir en même temps un point quintuple et quatre points quadruples, ni deux points quintuples, deux points quadruples et un point triple, ni trois points quintuples et deux points triples. Donc, dans le cas de $n = 10$, il faudra exclure les solutions

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 4, \quad \alpha_5 = 1, \quad \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 0, \quad \alpha_8 = 0,$$
$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 2, \quad \alpha_5 = 2, \quad \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 0, \quad \alpha_8 = 0,$$
$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 3, \quad \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 0, \quad \alpha_8 = 0,$$
....

25. Cherchons maintenant à déterminer quelques solutions des équations (3) et (5), quand n est quelconque. Avant tout, observons que, comme une droite ne peut rencontrer une courbe d'ordre n en plus de n points, le nombre α_i, si nous supposons $2i > n$, ne peut avoir qu'une de ces deux valeurs 0 ou 1; et, si nous supposons $i + j > n$, si $\alpha_i = 1$, on aura $\alpha_j = 0$.

26. Pour $n > 2$, la valeur maximum de α_{n-1} est donc l'*unité*, et, si $\alpha_{n-1} = 1$, tous les autres α sont égaux à *zéro*, à l'exception de α_1. Dans cette hypothèse, une quelconque des équations (1) ou (2) donne

$$\alpha_1 = 2(n-1).$$

Cette valeur est aussi le maximum de α_1 dans tous les cas, ainsi que le montre l'équation

$$\sum i(n-i-1)(\alpha_i + \alpha_{n-i-1}) = 2(n-1)(n-2),$$

qu'on obtient en éliminant α_{n-1} entre (1) et (2).

Le réseau du plan P est donc composé de courbes d'ordre n ayant en commun un point p $(n-1)$-ple, et $2(n-1)$ points simples $o_1, o_2, o_3, \ldots, o_{2(n-1)}$ (1). La Jacobienne est formée par les $2(n-1)$ droites $p(o_1, o_2, \ldots, o_{2(n-1)})$ et par la courbe d'ordre $n-1$, qui a en p un point $(n-2)$-ple et passe par tous les autres points donnés. En effet, si m est un point de la droite po_1 et que l'on combine celle-ci avec la courbe $p^{n-2} m o_2 o_3 \ldots o_{2(n-1)}$ d'ordre $n-1$, ou bien si m est un point d'ordre $n-1$ de la courbe $p^{n-2} o_1 o_2 o_3 \ldots o_{2(n-1)}$, et que l'on combine celle-ci avec la droite pm, on obtient dans les deux cas une courbe (composée) du réseau.

Nous avons donc

$$\alpha'_1 = 2(n-1), \quad \alpha'_2 = 0, \quad \alpha'_3 = 0, \ldots, \quad \alpha'_{n-2} = 0, \quad \alpha'_{n-1} = 1;$$

ou bien la solution en question est conjuguée à elle-même (2).

n quelconque.

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= 2(n-1) \\ \alpha_{n-1} &= 1 \end{aligned}}$$

27. Supposons maintenant $\alpha_{n-1} = 0$, et, si $n > 4$, donnons à α_{n-2} sa valeur maximum

$$\alpha_{n-2} = 1.$$

Les autres α seront nuls, à l'exception de α_1, α_2, pour lesquels les équations (1) et (2) donnent

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = n-2.$$

Les courbes du réseau ont en commun trois points simples o_1, o_2, o_3, $n-2$ points doubles $d_1, d_2, \ldots, d_{n-2}$ et un point $(n-2)$-ple p. La Jacobienne aura donc trois points doubles en o_1, o_2, o_3; $n-2$ points quintuples en $d_1, d_2, \ldots, d_{n-2}$, et un point $(3n-7)$-ple en p. Les lignes suivantes font partie de la Jacobienne, quand n est pair :

1° Les $n-2$ droites $p(d_1, d_2, \ldots, d_{n-2})$; en effet, un point quel-

(1) C'est le cas étudié par de Jonquières.

(2) Dorénavant nous n'écrirons plus les valeurs nulles de α.

conque m de la droite pd_1 est double pour la courbe du réseau composée de la droite elle-même et de la courbe

$$p^{n-3}d_2^2 d_3^2 \ldots d_{n-2}^2 d_1 m o_1 o_2 o_3$$

d'ordre $n-1$;

2° La courbe $p^{\frac{n}{2}-2} d_1 d_2 \ldots d_{n-2}$ d'ordre $\frac{n}{2}-1$; en effet, un point quelconque m de cette courbe est double pour une courbe du réseau composée de la courbe elle-même d'ordre $\frac{n}{2}-1$, et de la courbe $p^{\frac{n}{2}} d_1 d_2 d_3 \ldots d_{n-2} o_1 o_2 o_3 m$ d'ordre $\frac{n}{2}+1$;

3° Les trois courbes $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2}(o_2 o_3,\ o_3 o_1,\ o_1 o_2)$ d'ordre $\frac{n}{2}$; en effet, si m est un point quelconque de la courbe

$$p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} o_2 o_3,$$

celle-ci, prise avec la courbe $p^{\frac{n}{2}-1} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} m o_1$ du même ordre $\frac{n}{2}$, forme une courbe du réseau ayant un point double en m.

A

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = n-2, \quad \alpha_{n-2} = 1$$

correspond donc, pour n pair,

$$\alpha'_1 = n-2, \quad \alpha'_{\frac{n}{2}-1} = 1, \quad \alpha'_{\frac{n}{2}} = 3.$$

n pair.

α_1	$= 3,$	$n-2$
α_2	$= n-2,$	0
$\alpha_{\frac{n}{2}-1}$	$= 0,$	1
$\alpha_{\frac{n}{2}}$	$= 0,$	3
α_{n-2}	$= 1,$	0

Dans le cas de n impair, on démontre de la même manière que la Jacobienne du réseau (du plan P) se compose :

1° Des $n-2$ droites $p(d_1, d_2, \ldots, d_{n-2})$;

2° Des trois courbes $p^{\frac{n-3}{2}} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} (o_1, o_2, o_3)$ d'ordre $\frac{n-1}{2}$;

3° De la courbe $p^{\frac{n-1}{2}} d_1 d_2 \ldots d_{n-2} o_1 o_2 o_3$ d'ordre $\frac{n+1}{2}$; et à

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = n-2, \quad \alpha_{n-2} = 1$$

correspond, pour n impair,

$$\alpha'_1 = n-2, \quad \alpha'_{\frac{n-1}{2}} = 3, \quad \alpha'_{\frac{n+1}{2}} = 1.$$

n impair.

$\alpha_1 =$	$3,$	$n-2$
$\alpha_2 =$	$n-2,$	0
$\alpha_{\frac{n-1}{2}} =$	$0,$	3
$\alpha_{\frac{n+1}{2}} =$	$0,$	1
$\alpha_{n-2} =$	$1,$	0

Il est facile de se convaincre que, dans le cas de

$$\alpha_1 = n-2, \quad \alpha_{\frac{n}{2}-1} = 1, \quad \alpha_{\frac{n}{2}} = 3,$$

c'est-à-dire, quand les courbes du réseau, d'ordre n pair, ont en commun $n-2$ points simples $o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}$, un point $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-ple a et trois points $\left(\frac{n}{2}\right)$-ples b_1, b_2, b_3, la Jacobienne est composée :

1° Des trois droites $b_2 b_3$, $b_3 b_1$, $b_1 b_2$;

2° Des $n-2$ coniques $b_1 b_2 b_3 a(o_1, o_2, \ldots, o_{n-2})$;

3° De la courbe $b_1^{\frac{n}{2}-1} b_2^{\frac{n}{2}-1} b_3^{\frac{n}{2}-1} a^{\frac{n}{2}-2} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ d'ordre $n-2$;

et que, dans le cas de

$$\alpha_1 = n-2, \quad \alpha_{\frac{n-1}{2}} = 3, \quad \alpha_{\frac{n+1}{2}} = 1,$$

c'est-à-dire, quand les courbes du réseau, d'ordre n impair, ont en commun $n-2$ points simples $o_1, o_2, \ldots, o_{n-2}$, trois points $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-ples a_1, a_2, a_3, et un point $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ple b, les lignes suivantes font partie de la Jacobienne :

1° Les trois droites $b(a_1, a_2, a_3)$;

2° Les $n-2$ coniques $ba_1a_2a_3(o_1, o_2, \ldots, o_{n-2})$;

3° La courbe $b^{\frac{n-1}{2}} a_1^{\frac{n-3}{3}} a_2^{\frac{n-3}{2}} a_3^{\frac{n-3}{2}} o_1 o_2 \ldots o_{n-2}$ d'ordre $n-2$.

28. Supposons maintenant $\alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_{n-2} = 0$; si $n > 6$, la valeur maximum de α_{n-3} est l'*unité*. Ayant $\alpha_{n-3} = 1$, les autres α seront nuls, à l'exception de α_1, α_2, α_3, pour lesquels les équations (3), (5) donnent

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 = 4n - 5,$$
$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 = 6n - 10,$$

ou bien

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 5, \quad \alpha_2 + 3\alpha_3 = 2n - 5;$$

d'où l'on tire les systèmes suivants :

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 4, \quad \alpha_3 = \frac{2n-9}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1,$$

$$\alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \frac{2n-6}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1,$$

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3, \quad \alpha_3 = \frac{2n-8}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1,$$

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{2n-5}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = \frac{2n-10}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1,$$

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = \frac{2n-7}{3}, \quad \alpha_{n-3} = 1.$$

Les deux premiers résolvent les équations (3) et (5), dans le cas où n est divisible par 3; le troisième et le quatrième quand n est de la forme $3\mu + 1$, et les deux derniers quand n est de la forme $3\mu + 2$.

Dans le premier système, les courbes du réseau ont en commun un point simple o, quatre points doubles d_1, d_2, d_3, d_4 ; $\frac{2n}{3} - 3$ points triples $t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-3}$, et un point $(n-3)$-ple a ; et la Jacobienne se compose

1° Des $\frac{2n}{3} - 3$ droites $a\left(t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-3}\right)$;

2° Des quatre courbes $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{2}-3} (d_2 d_3 d_4, d_1 d_3 d_4, d_1 d_2 d_4, d_1 d_2 d_3)$ d'ordre $\frac{n}{3}$;

3° De la courbe $a^{\frac{n}{3}} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3} d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordre $\frac{n}{3} + 1$;

4° De la courbe $a^{\frac{2n}{3}-3} t_1^2 t_2^2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-3}^2 d_1 d_2 d_3 d_4 o$ d'ordre $\frac{2n}{3} - 1$.

Dans le second système, les courbes du réseau ont en commun quatre points simples o_1, o_2, o_3, o_4 ; un point double d ; $\frac{2n}{3} - 2$ points triples $t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-2}$, et un point $(n-3)$-ple a. Les courbes suivantes font partie de la Jacobienne :

1° Les $\frac{2n}{3} - 2$ droites $a\left(t_1, t_2, \ldots, t_{\frac{2n}{3}-2}\right)$;

2° La courbe $a^{\frac{n}{3}-2} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}$ d'ordre $\frac{n}{3} - 1$;

3° Les quatre courbes $a^{\frac{n}{3}-1} t_1 t_2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2} d (o_1, o_2, o_3, o_4)$ d'ordre $\frac{n}{3}$;

4° La courbe $a^{\frac{2n}{3}-2} t_1^2 t_2^2 \ldots t_{\frac{2n}{3}-2}^2 d (o_1 o_2 o_3 o_4)$ d'ordre $\frac{2n}{3}$.

Nous obtenons ainsi, dans le cas où n est un multiple de 3, les deux couples suivants de solutions conjuguées des équations (3) et (5) :

n multiple de 3.

α_1	$= 1,$	$\frac{2n}{3} - 3$	α_1	$= 4,$	$\frac{2n}{3} - 2$
α_2	$= 4,$	0	α_2	$= 1,$	0
α_3	$= \frac{2n}{3} - 3,$	0	α_3	$= \frac{2n}{3} - 2,$	0
$\alpha_{\frac{n}{3}}$	$= 0,$	4	$\alpha_{\frac{n}{3}-1}$	$= 0,$	1
$\alpha_{\frac{n}{3}+1}$	$= 0,$	1	$\alpha_{\frac{n}{3}}$	$= 0,$	4
$\alpha_{\frac{2n}{3}-1}$	$= 0,$	1	$\alpha_{\frac{2n}{3}}$	$= 0,$	1
α_{n-3}	$= 1,$	0	α_{n-3}	$= 1,$	0

De la même manière, en considérant les cas où le nombre n est de la forme $3\mu + 1$, ou de la forme $3\mu + 2$, on trouve les couples de solutions conjuguées qui suivent :

$n \equiv 1$ (*mod.* 3).

α_1	$= 2,$	$\frac{2n-8}{3}$	α_1	$= 5,$	$\frac{2n-5}{3}$
α_2	$= 3,$	0			
α_3	$= \frac{2n-8}{3},$	0	α_3	$= \frac{2n-5}{3},$	0
$\alpha_{\frac{n-1}{3}}$	$= 0,$	3			
$\alpha_{\frac{n+2}{3}}$	$= 0,$	2	$\alpha_{\frac{n-1}{3}}$	$= 0,$	5
$\alpha_{\frac{2(n-1)}{3}}$	$= 0,$	1	$\alpha_{\frac{2n+1}{3}}$	$= 0,$	1
α_{n-3}	$= 1,$	0	α_{n-3}	$= 1,$	0

$n \equiv 2$ (*mod.* 3).

α_1	$=3,$	$\frac{2n-7}{3}$	α_1	$=0,$	$\frac{2n-10}{3}$
α_2	$=2,$	0	α_2	$=5,$	0
α_3	$=\frac{2n-7}{3},$	0	α_3	$=\frac{2n-10}{3},$	0
$\alpha_{\frac{n-2}{3}}$	$=0,$	2			
$\alpha_{\frac{n+1}{3}}$	$=0,$	3	$\alpha_{\frac{n+1}{3}}$	$=0,$	5
$\alpha_{\frac{2n-1}{3}}$	$=0,$	1	$\alpha_{\frac{2(n-2)}{3}}$	$=0,$	1
α_{n-3}	$=1,$	0	α_{n-3}	$=1,$	0

29. Faisons $\alpha_{n-1}=0$, $\alpha_{n-2}=0$, $\alpha_{n-3}=0$, et, en outre, $\alpha_{n-4}=1$, ce qui est la plus grande valeur de α_{n-4} pour $n>8$. Les autres α seront nuls, à l'exception de α_1, α_2, α_3, α_4; nous tirons, par suite, des équations (3) et (5)

$$\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3+10\alpha_4=5n-8,$$

$$\alpha_1+4\alpha_2+9\alpha_3+16\alpha_4=8n-17,$$

ou bien

$$3\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=21,$$

$$2\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+n-10.$$

En cherchant à satisfaire à ces équations de toutes les manières possibles, et en déterminant pour chaque cas la Jacobienne du réseau, nous obtenons les couples suivants de solutions conjuguées des équations (3) et (5), qui sont différentes suivant les conditions de divisibilité de n par 4 :

$n \equiv 0 \ (mod.\ 4)$.

$\alpha_1 = 1,\ \frac{n}{2}-3$	$\alpha_1 = 2,\ \frac{n}{2}-4$	$\alpha_1 = 3,\ \frac{n}{2}-2$	$\alpha_1 = 6,\ \frac{n}{2}-2,$
$\alpha_2 = 3,\ 0$	$\alpha_3 = 5,\ 0$	$\alpha_3 = 3,\ 0$	
$\alpha_3 = 2,\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-4,\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-2,\ 0$	$\alpha_3 = 1,\ 0$
$\alpha_4 = \frac{n}{2}-3,\ 0$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 5$		$\alpha_4 = \frac{n}{2}-2,\ 0$
$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 3$		$\alpha_{\frac{n}{4}-1} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n}{4}-1} = 0,\ 1$
$\alpha_{\frac{n}{4}+1} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n}{4}+1} = 0,\ 2$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n}{4}} = 0,\ 6$
$\alpha_{\frac{n}{2}-1} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{3n}{4}-1} = 0,\ 1$		
$\alpha_{\frac{n}{2}} = 0,\ 2$		$\alpha_{\frac{n}{2}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{3n}{4}} = 0,\ 1$
$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$

$n \equiv 1 \ (mod.\ 4)$.

$\alpha_1 = 0,\ \frac{n-7}{2}$	$\alpha_1 = 2,\ \frac{n-5}{2}$	$\alpha_1 = 3,\ \frac{n-7}{2}$	$\alpha_1 = 7,\ \frac{n-3}{2}$
$\alpha_2 = 3,\ 0$	$\alpha_2 = 3,\ 0$	$\alpha_3 = 4,\ 0$	
$\alpha_3 = 3,\ 0$	$\alpha_3 = 1,\ 0$		
$\alpha_4 = \frac{n-7}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-5}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-7}{2},\ 0$	$\alpha_4 = \frac{n-3}{2},\ 0$
$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 4$	$\alpha_{\frac{n-1}{4}} = 0,\ 7$
$\alpha_{\frac{n+3}{4}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n+3}{4}} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{n+3}{4}} = 0,\ 3$	
$\alpha_{\frac{n-1}{2}} = 0,\ 3$	$\alpha_{\frac{n-1}{2}} = 0,\ 2$	$\alpha_{\frac{3(n-1)}{4}} = 0,\ 1$	$\alpha_{\frac{3n+1}{4}} = 0,\ 1$
	$\alpha_{\frac{n+1}{2}} = 0,\ 1$		
$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\ 0$

$n \equiv 2 \ (mod. \ 4).$

$\alpha_1 = 0,\quad \frac{n}{2}-5$	$\alpha_1 = 1,\quad \frac{n}{2}-3$	$\alpha_1 = 3,\quad \frac{n}{2}-2$	$\alpha_1 = 4,\quad \frac{n}{2}-3$
	$\alpha_2 = 3,\quad 0$	$\alpha_2 = 3,\quad 0$	
$\alpha_3 = 7,\quad 0$	$\alpha_3 = 2,\quad 0$		$\alpha_3 = 3,\quad 0$
$\alpha_4 = \frac{n}{2}-5,\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-3,\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-2,\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n}{2}-3,\quad 0$
	$\alpha_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 3$	$\alpha_{\frac{n-2}{4}} = 0,\quad 3$
$\alpha_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 7$	$\alpha_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 3$	$\alpha_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n+2}{4}} = 0,\quad 4$
$\alpha_{\frac{3(n-2)}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n-2}{2}} = 0,\quad 1$		$\alpha_{\frac{3n-2}{4}} = 0,\quad 1$
	$\alpha_{\frac{n}{2}} = 0,\quad 2$	$\alpha_{\frac{n}{2}} = 0,\quad 3$	
$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$

$n \equiv 3 \ (mod. \ 4).$

$\alpha_1 = 0,\quad \frac{n-7}{2}$	$\alpha_1 = 1,\quad \frac{n-9}{2}$	$\alpha_1 = 2,\quad \frac{n-5}{2}$	$\alpha_1 = 5,\quad \frac{n-5}{2}$
$\alpha_2 = 3,\quad 0$		$\alpha_2 = 3,\quad 0$	
$\alpha_3 = 3,\quad 0$	$\alpha_3 = 6,\quad 0$	$\alpha_3 = 1,\quad 0$	$\alpha_3 = 2,\quad 0$
$\alpha_4 = \frac{n-7}{2},\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n-9}{2},\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n-5}{2},\quad 0$	$\alpha_4 = \frac{n-5}{2},\quad 0$
$\alpha_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 3$	$\alpha_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 6$	$\alpha_{\frac{n-3}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n-3}{4}} = 0,\quad 2$
		$\alpha_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 3$	$\alpha_{\frac{n+1}{4}} = 0,\quad 5$
$\alpha_{\frac{n+5}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n+5}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n-1}{2}} = 0,\quad 2$	
$\alpha_{\frac{n-1}{2}} = 0,\quad 3$	$\alpha_{\frac{3n-5}{4}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{n+1}{2}} = 0,\quad 1$	$\alpha_{\frac{3n-1}{4}} = 0,\quad 1$
$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$	$\alpha_{n-4} = 1,\quad 0$

Nous ne pousserons pas plus loin, pour le moment, la recherche des solutions des équations (3) et (5); nous passerons à la démonstration de nouvelles propriétés générales des réseaux qui satisfont à ces équations.

30. Parmi toutes les courbes fondamentales d'un des deux plans, je considère toutes celles d'un même ordre i, et, parmi ses points fondamentaux, je considère aussi ceux d'un même ordre j; en d'autres termes, je considère le *groupe* des courbes Φ (ou Φ') d'ordre i, et le groupe des points f (ou f') d'ordre j du plan P (ou P'), auxquels correspondent, dans l'autre plan, le groupe des points f' (ou f) d'ordre i et le groupe des courbes Φ' (ou Φ) d'ordre j.

Comme les points d'un même groupe entrent *symétriquement* dans les conditions qui déterminent les courbes φ (ou φ') du réseau, et comme les courbes fondamentales d'un même groupe entrent symétriquement dans la Jacobienne du réseau, il s'ensuit que les relations qui existent entre les points et les courbes des deux groupes considérés doivent être parfaitement symétriques, soit par rapport aux points fondamentaux, soit par rapport aux courbes fondamentales. Donc on pourra déduire des nombres ω des branches d'une courbe du premier groupe, qui passent par les divers points du second, les nombres ω relatifs à toute autre courbe du même groupe, par les permutations des points du second groupe. Par suite, les courbes du premier groupe correspondront aux permutations, répétées un même nombre de fois, des points du second groupe. Mais, en appliquant le même raisonnement à l'autre plan, les points remplacent les courbes, et réciproquement; donc aussi les points du second groupe correspondront aux permutations, répétées un même nombre de fois, des courbes du premier groupe.

Deux cas peuvent se présenter :

a) Les nombres ω (relatifs aux deux groupes considérés) sont tous égaux, c'est-à-dire que toutes les courbes du premier groupe passent un même nombre ω de fois par tout point du second groupe.

b) Un des nombres ω est différent des autres qui sont tous égaux entre eux; c'est-à-dire que toute courbe du premier groupe passe un même nombre de fois par tous les points, moins un, du second groupe.

Le nombre des permutations des points est alors égal à celui des points, et, par suite, le nombre des courbes (du premier groupe) et le nombre α_i des points du second seront égaux.

Il ne peut se présenter d'autres cas. Si, parmi les nombres ω relatifs à une courbe (du premier groupe) et aux points (du second groupe), il y en avait deux ou plusieurs différents des autres, le nombre des permutations serait plus grand que le nombre des points et, par suite, le nombre des courbes plus grand que celui des points, et, en même temps, pour la même raison, le nombre des points plus grand que le nombre des courbes : ce qui est absurde.

Quand le groupe des courbes et le groupe de points se trouvent dans le cas b), nous dirons que les deux groupes sont *coordonnés* entre eux. Un même groupe de points ne peut être coordonné avec deux groupes distincts de courbes; car il s'ensuivrait une certaine corrélation entre les courbes de l'un et de l'autre de ces groupes, ce qui est incompatible avec la symétrie complète qui existe dans chaque groupe de courbes.

D'un autre côté, un groupe de points est nécessairement coordonné à un groupe de plusieurs courbes; car, s'il n'en était pas ainsi, le groupe donné de courbes et un groupe quelconque de points se trouveraient dans le cas a), ou bien toute courbe du groupe donné passerait le même nombre de fois par tous les points fondamentaux du groupe quelconque. Mais cela est absurde, parce que, de même que les points fondamentaux déterminent les courbes fondamentales, de même aussi un système donné de nombres ω, relatifs à tous les points fondamentaux (les ω étant égaux pour les points d'un même groupe), ne peut déterminer qu'une courbe.

Donc tout groupe de *plusieurs* courbes est coordonné à un, et à un seul groupe, contenant un égal nombre de points. Si maintenant nous mettons de côté tous ces groupes de plusieurs courbes, il ne restera que les courbes et les points uniques dans leurs ordres respectifs; mais le nombre total des courbes fondamentales est égal, dans chaque plan, au nombre total des points fondamentaux, et le nombre des courbes d'un groupe est égal au nombre des points du groupe coordonné; donc aussi le nombre des courbes fondamentales uniques, dans leurs ordres respectifs, est égal au nombre des points uniques aussi dans leurs ordres respectifs. De tout cela résulte le théorème suivant :

Les α qui constituent une solution quelconque des équations (3) et (5) sont égaux aux α de la solution conjuguée, pris, en général, dans un ordre différent (¹).

31. Les nombres ω jouissent d'une propriété intéressante, découverte par Clebsch (²), qui consiste en ce que leur déterminant est égal à n en valeur absolue.

Pour démontrer ce théorème, nous abandonnerons les notations dont nous nous sommes servi jusqu'ici, pour employer celles de l'illustre géomètre allemand. Les ordres du 1^er, du 2^e, du 3^e,..., du $i^{\text{ème}}$ point fondamental du plan P seront désignés par r_1, r_2, $r_3, \ldots, r_i$; les équations (3) et (5) prendront donc la forme

$$\text{(III)} \qquad \sum_i r_i^2 = n^2 - 1,$$

$$\text{(V)} \qquad \sum_i r_i = 3(n-1);$$

de même, $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_i$ désigneront les ordres des points fondamentaux de P′, c'est-à-dire les ordres des courbes fondamentales de P, et les équations (3)′ et (5)′ deviendront

$$\text{(III)}' \qquad \sum_j s_j^2 = n^2 - 1,$$

$$\text{(V)}' \qquad \sum_j s_j = 3(n-1).$$

Soit $\omega_{i,j}$ le nombre des branches de la $i^{\text{ième}}$ courbe fondamentale qui passait par le $j^{\text{ième}}$ point fondamental; en vertu du théorème nº 12, nous aurons

$$\omega_{i,j} = \omega_{j,i};$$

comme aucun des nombres r_i, s_j n'est plus grand que $n-1$, aucun des nombres ω ne pourra être supérieur à $n-2$.

Les deux théorèmes du nº 16, dont l'un regarde l'intersection de deux courbes fondamentales Φ_i et Φ_{i_1} par exemple, et l'autre l'inter-

---

(¹) Pour la démonstration de ce théorème, *voir* CLEBSCH, *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen* (*Mathem. Ann.*, t. IV, p. 490).

(²) *Ibidem.*

section d'une courbe fondamentale Φ_i avec une courbe φ du réseau P, peuvent s'exprimer par les formules

(VI) $$\sum_j \omega_{i,j}\omega_{i_1,j} = r_i r_{i_1},$$

(VII) $$\sum_j s_j \omega_{i,j} = n r_i,$$

et les formules analogues pour le plan P′ sont

(VI)′ $$\sum_i \omega_{i,j}\omega_{i,j_1} = s_j s_{j_1},$$

(VII)′ $$\sum_i r_i \omega_{i,j} = n s_j.$$

Les courbes fondamentales sont du genre zéro dans l'un et l'autre plan; donc

(VIII) $$\sum_j \frac{\omega_{i,j}(\omega_{i,j}-1)}{2} = \frac{(r_i-1)(r_i-2)}{2},$$

(VIII)′ $$\sum_i \frac{\omega_{i,j}(\omega_{i,j}-1)}{2} = \frac{(s_j-1)(s_j-2)}{2}.$$

Le théorème du n° 13, qui se rapporte au nombre des branches des courbes fondamentales qui passent par un point fondamental, s'exprime par les formules

(IX) $$\sum_j \omega_{i,j} = 3r_i - 1,$$

(IX)′ $$\sum_i \omega_{i,j} = 3s_j - 1.$$

En faisant la somme du double de (8) et de (9), on a

(X) $$r_i^2 + 1 = \sum_j \omega_{i,j}^2;$$

de même,

(X)′ $$s_j^2 + 1 = \sum_i \omega_{i,j}^2.$$

Maintenant posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} & \ldots \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} & \ldots \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

et faisons le carré de ce déterminant; en ayant égard aux équations (VI) et (X), ou aux équations (VI)′ et (X)′, nous aurons

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} r_1^2+1 & r_1 r_2 & r_1 r_3 & \ldots \\ r_2 r_1 & r_2^2+1 & r_2 r_3 & \ldots \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2+1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 1 + \sum_i r_i^2,$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} s_1^2+1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 & \ldots \\ s_2 s_1 & s_2^2+1 & s_2 s_3 & \ldots \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3^2+1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 1 + \sum_j s_j^2,$$

d'où, d'après (III) et (III)′,

$$\Delta^2 = n^2,$$

ou

$$\Delta = \pm n, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce qui a été démontré au n° 30 revient à dire que, si l'on divise le déterminant Δ au moyen de lignes horizontales et de lignes verticales, de manière que chacun des rectangles ainsi tracés ne renferme que des lignes relatives à des r tous égaux entre eux et des colonnes relatives à des s égaux entre eux, un quelconque de ces rectangles aura tous ses éléments égaux (cas a), ou sera un carré réductible à la forme

$$\begin{vmatrix} \omega' & \omega & \omega & \ldots & \omega \\ \omega & \omega' & \omega & \ldots & \omega \\ \omega & \omega & \omega' & \ldots & \omega \\ . & . & . & \ldots & . \\ \omega & \omega & \omega & \ldots & \omega' \end{vmatrix}.$$

A tout groupe de r ou de s égaux correspond un seul de ces carrés. La valeur du carré supposé est $(\omega' - \omega)^{m-1}$, où m est le nombre de ses colonnes; par suite, le déterminant Δ est divisible par $(\omega' - \omega)^{m-1}$, ce qui revient à dire que $(\omega' - \omega)^{m-1}$ est un facteur de n (¹).

32. Supposons maintenant que les deux plans P, P′ coïncident, ou bien considérons deux figures dans un même plan qui se correspondent point par point, de manière qu'aux droites d'une figure correspondent dans l'autre les courbes d'ordre n d'un réseau [assujetti aux conditions (3), (5)].

Les droites d'un faisceau dans une des figures et les courbes correspondantes de l'autre forment deux faisceaux projectifs; par suite, le lieu des intersections des lignes correspondantes sera une courbe d'ordre $n+1$, passant r fois par tout point principal de degré r de la seconde figure.

33. Quelle est l'enveloppe des droites qui joignent les points d'une droite R de la première figure aux points homologues de la seconde? La droite R est une tangente n-ple pour l'enveloppe en question, à cause des n points de R homologues de ceux où R coupe sa courbe correspondante d'ordre n. Tout autre point de R, joint à son homologue, donne une tangente de l'enveloppe; la classe de celle-ci est donc $n+1$.

34. Quel est le lieu des points de la première figure qui, joints aux points correspondants de la seconde, donnent des droites passant par un point fixe p? Le lieu passe par p, parce que la droite qui joint p au point correspondant p' passe par p. Menons ensuite par p une droite quelconque; elle coupera la courbe qui lui correspond dans la seconde figure en n points. Si l'on considère ces n points comme appartenant à la seconde figure, leurs correspondants appartiennent au lieu cherché, qui est, par conséquent, une courbe $\mathfrak{P}$ de l'ordre $n+1$.

Si o_r est un point principal de degré r de la première figure, la droite po_r contient r points de la seconde figure correspondant à o_r; donc le lieu $\mathfrak{P}$ passera r fois par o_r. Si o'_r est un point principal de la seconde figure, la droite po'_r contient r points de la pre-

(¹) Clebsch, *loc. cit.*

mière qui correspondent à o'_r; la courbe $\mathfrak{P}$ passera par ces r points, c'est-à-dire par les intersections de po'_r et de la courbe principale qui correspond à o'_r.

Les points où une droite R, considérée dans la première figure, coupe la courbe correspondante d'ordre n sont, dans la seconde figure, les homologues de ceux de la première, où R, considérée comme appartenant à la seconde, rencontre la courbe qui lui correspond dans la première. Donc la courbe $\mathfrak{P}$ est aussi le lieu des intersections des droites qui passent par p, considérées comme appartenant à la seconde figure, avec les courbes correspondantes de la première figure (32).

Les points homologues à ceux de la courbe $\mathfrak{P}$, considérée dans la première figure, sont sur une autre courbe $\mathfrak{P}'$, lieu des points de la seconde figure qui, joints aux points correspondants de la première, donnent des droites passant par p, ou encore lieu des intersections des droites qui passent par p, considérées dans la première figure avec les courbes correspondantes de la seconde.

Toute droite passant par p coupe les deux courbes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ en deux systèmes de n points correspondants.

35. Soient q un autre point quelconque du plan et $\mathfrak{Q}$ la courbe qui dépend de q comme $\mathfrak{P}$ de p. Les n points où la droite pq, considérée comme appartenant à la seconde figure, rencontre la courbe correspondante de la première appartiennent évidemment aux deux courbes $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, comme aussi aux courbes qui correspondent aux autres points de la droite pq. Les deux courbes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ se coupent, en outre, aux points fondamentaux de la première figure, ce qui donne $\sum i^2 \alpha_i = n^2 - 1$ intersections; elles auront donc $(n+1)^2 - n - (n^2 - 1) = n + 2$ autres points communs, et chacun de ces derniers points, joint au point homologue de la seconde figure, doit donner une droite passant par p aussi bien que par q. Ces $n + 2$ points coïncident nécessairement avec leurs propres correspondants, c'est-à-dire que *le système des deux figures admet $n + 2$ points doubles.*

Toutes les courbes analogues à $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ et relatives aux points du plan forment un réseau; car elles ont en commun les points fondamentaux de la première figure et les points doubles du système, ce qui équivaut à

$$\sum \frac{i(i+1)}{2}\alpha_i + n + 2 = \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 2$$

conditions communes.

36. Supposons de nouveau que les deux plans P et P′ ne coïncident pas, et soient deux points fixes π, π' dans l'espace. Joignons π à un point quelconque a du plan P, et π' au point correspondant a' du plan P′. Si le point a parcourt tout le plan P, les droites πa, $\pi' a'$ engendrent deux gerbes coniques (¹) ayant entre elles une relation telle, qu'à une droite quelconque de l'une correspond une droite déterminée (et généralement unique) de l'autre, et qu'à un plan d'une des gerbes correspond dans l'autre un cône d'ordre n : tous les cônes analogues d'une gerbe qui correspondent aux plans de l'autre ont en commun un certain nombre α_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) de génératrices i-ples, où les nombres α_i satisfont aux questions (3) et (5).

Si les deux gerbes coniques (π), (π') sont coupées par un plan transversal quelconque, nous obtiendrons dans ce plan deux figures qui se correspondront point par point, de manière qu'aux droites de l'une correspondront dans l'autre des courbes d'ordre n; et comme le système de ces deux figures admet $n+2$ points doubles, il s'ensuit que le lieu des points où se coupent les rayons homologues de deux gerbes coniques (π), (π') est une courbe gauche d'ordre $n+2$. Il est évident que cette courbe passe par les points π, π', et y est tangente aux droites qui correspondent à $\pi\pi'$ considérée comme appartenant d'abord à la gerbe (π), puis à la gerbe (π').

Si o_r est un point principal de degré r de la première figure dans P, au rayon πo_r correspondra un cône ayant pour sommet le point π' et pour base la courbe principale d'ordre r qui correspond dans P′ à o_r; les r intersections de ce cône et de la droite πo_r seront des points de la courbe gauche. Cette courbe a donc $r+1$ points sur le rayon πo_r et autant sur le rayon $\pi' o'_r$, si o'_r est un point principal de degré r de la seconde figure.

(¹) *Strahlenbündel* des Allemands (v. Staudt, *Geometrie der Lage*, p. 4; Nürnberg, 1847).

37. Nous arriverions aux mêmes résultats en posant la question comme il suit : Quel est le lieu d'un point a du plan P tel que le rayon πa rencontre son homologue $\pi' a'$? Si a'' est l'intersection du plan P avec la droite $\pi' a'$, les points a'' formeront une troisième figure ayant avec la première (formée des points a) la même correspondance que celle qui existe entre la première et la seconde (formée des points a'). D'ailleurs, si les rayons πa, $\pi' a'$ se rencontrent, les points a, a'' doivent être en ligne droite avec le point p où la droite $\pi\pi'$ rencontre le plan P; donc le lieu du point a, ou la perspective de la courbe gauche sur le plan, l'œil étant en π, est la courbe P relative au point p (34), lieu des intersections des droites qui passent par p considérées comme appartenant à la troisième figure avec les courbes correspondantes d'ordre n de la première.

Enfin, en appliquant à la courbe gauche les formules connues de Cayley [1], on trouve :

1° Qu'elle a $16(n-1)$ points d'inflexion (points ou le plan osculateur est stationnaire);

2° Que ses tangentes forment une développable de l'ordre $4n$, de la classe $3(3n-2)$, douée d'une courbe nodale de l'ordre $8n(n-1)$;

3° Que ses plans bitangents enveloppent une développable de la classe $8(n-1)^2$;

4° Que $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ cordes de la courbe passent par un point quelconque de l'espace;

5° Qu'un plan quelconque renferme $\frac{1}{2}(81n^2-169n+90)$ tangentes doubles de la développable osculatrice, etc.

Enfin la courbe gauche est du genre $n-1$.

Les transformations géométriques des figures planes ont été étudiées par plusieurs géomètres depuis les travaux de M. Cremona; il convient de citer d'une manière particulière un beau théorème, dû à M. Max Nöther, dont voici l'énoncé : « Toute transformation birationnelle d'ordre n des figures planes est décomposable en transformations du second ordre. »

---

[1] *Journal de Liouville*, t. X, p. 245.

Liste des Mémoires sur les transformations géométriques des figures planes postérieurs à ceux de M. Cremona.

CAYLEY. — A Memoir on the rational Transformation between two spaces (*Proceedings of the London Mathem. Society*, vol. III, 1870, p. 136).

NÖTHER. — Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen (*Mathem. Annalen*, t. III, 1870, p. 164).

ROSANES. — Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. 73, 1871).

CLEBSCH. — Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen (*Mathem. Annalen*, t. IV, 1871, p. 490).

NÖTHER. — Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen (*Mathem. Annalen*, t. V, 1872, p. 635).

SAMUEL ROBERTS. — On Professor Cremona's Transformation between two planes... (*Proceedings of the London Mathem. Society*, vol. IV, 121, année 1872).

28 juin 1873.

ED. DEWULF.