Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Painvin

Sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 91-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__91_1>

MÉLANGES.

SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. PAINVIN.

1. Malgré de nombreux et importants travaux, l'étude des singularités des surfaces algébriques n'est pas encore très-avancée; nous pensons néanmoins qu'il y a quelque intérêt à rappeler et à résumer ici les premières propositions sur les singularités générales des surfaces algébriques, car ces propositions forment le début d'une théorie fort importante qui attire constamment l'attention des géomètres.

2. Les dénominations de *contact, osculation,* etc., donnent souvent lieu à des ambiguïtés, et il est bon de préciser, une fois pour toutes, le sens exact des mots que nous emploierons dans les énoncés qui suivent.

Lorsqu'un point d'une courbe (ou d'une surface) est *simple,* nous dirons qu'une droite (ou une courbe) a, en ce point, un *contact* du 1^{er}, 2^e, $3^e, \ldots, i^{\text{ème}}$ ordre avec la courbe (ou la surface) primitive, quand la droite (ou la courbe) rencontre la courbe (ou la surface) en $2, 3, 4, \ldots, (i+1)$ points coïncidant avec le point considéré.

Lorsqu'un point d'une courbe (ou d'une surface) est *multiple* *d'ordre p*, nous dirons qu'une droite (ou une courbe) a, en ce point, un *contact effectif* du 1er, 2^{e}, 3^{e},..., $i^{ème}$ ordre avec la courbe (ou la surface) primitive, quand la droite (ou la courbe) rencontre la courbe (ou la surface) en $p+1$, $p+2$, $p+3$,..., $p+i$ points coïncidant avec le point considéré.

On pourrait réserver la dénomination de *courbe osculatrice* pour la courbe d'un ordre et d'une espèce déterminés, dont *tous* les points d'intersection viennent coïncider avec le point considéré.

3. Nous désignerons par T_r une droite telle que r de ses points de rencontre avec la surface considérée viennent coïncider; c'est une droite ayant avec la surface un contact du $(r-1)^{ième}$ ordre.

Nous désignerons par $T_{r,s}$ une droite telle que r de ses points de rencontre avec la surface viennent coïncider en un même point, et que s de ses autres intersections viennent coïncider avec un autre point distinct du premier; la droite $T_{r,s}$ est une bitangente ayant un contact du $(r-1)^{ième}$ ordre en un point et un contact du $(s-1)^{ième}$ ordre en un autre point, etc.

Nous supposons, dans tout cela, que les points de contact sont des points simples pour la surface.

4. On sait qu'un plan tangent en un point d'une surface coupe la surface suivant une courbe ayant un point double au point de contact; les tangentes à la courbe en ce point sont dites *tangentes inflexionnelles :* ce sont les asymptotes de l'indicatrice. Lorsque les deux tangentes inflexionnelles viennent à se confondre, le point correspondant de la surface est dit *point parabolique ;* l'indicatrice est une parabole.

5. Cela posé, nous allons donner les énoncés des premières propositions qu'on rencontre dans l'étude des singularités générales des surfaces algébriques.

La *surface considérée* S_n est une *surface générale de l'ordre n.*

Sans nous préoccuper de l'ordre logique des propositions, nous les classerons comme il suit :

I. Droites T_2, c'est-à-dire *tangentes ayant un contact de 1er ordre en un point unique.*

1° Le cône circonscrit à la surface S_n et dont le sommet est un point quelconque P non situé sur la surface est de l'ordre $n(n-1)$ et de la classe $n(n-1)^2$; il possède $n(n-1)(n-2)$ arêtes de rebroussement, et $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ arêtes doubles.

2° La courbe de contact de ce cône est de l'ordre $n(n-1)$; elle rencontre, en outre, la surface S_n suivant une autre courbe de l'ordre $n(n-1)(n-2)$; cette deuxième courbe rencontre la première en $n(n-1)^2(n-2)$ points comprenant: les $n(n-1)(n-2)$ points où les arêtes de rebroussement rencontrent la courbe de contact, puis les $n(n-1)(n-2)(n-3)$ points où les arêtes doubles rencontrent la courbe de contact.

3° La développable formée par les plans tangents à S_n le long d'une courbe plane fixe C_n est de l'ordre $n(3n-5)$ et de la classe $n(n-1)$; l'arête de rebroussement est de l'ordre $6n(n-2)$.

4° Cette développable touche S_n suivant la courbe C_n d'ordre n, et coupe, en outre, S_n suivant une courbe de l'ordre $n(n-2)(3n+1)$. La deuxième courbe touche C_n en ses $3n(n-2)$ points d'inflexion, passe par les $4n(n-2)$ points paraboliques qui se trouvent sur C_n, et rencontre C_n en $3n(n-2)(n-3)$ autres points qui sont sur les tangentes d'inflexion de C_n.

II. Droites T_3, c'est-à-dire *tangentes ayant un contact du 2^e ordre en un seul point, ou tangentes inflexionnelles.*

5° Par un point, non situé sur la surface S_n, on peut mener, en général, $n(n-1)(n-2)$ tangentes inflexionnelles.

6° Les tangentes inflexionnelles de S_n, qui rencontrent une droite L, arbitrairement choisie, engendrent une surface de l'ordre $n(n^2-4)$. Sur cette surface, la droite L est multiple de l'ordre $n(n-1)(n-2)$. Les points de contact de ces tangentes avec S_n forment une courbe de l'ordre $n(3n-4)$. La surface engendrée a en commun avec S_n, outre sa courbe de contact, une deuxième courbe de l'ordre $n(n-1)(n-3)(n+4)$.

7° Les tangentes inflexionnelles, issues des points d'une section plane C_n de la surface S_n et dont le contact du 2e ordre a lieu en dehors de C_n, engendrent une surface de l'ordre $n(n-1)(n-3)(n+4)$. Sur cette surface la courbe C_n est multiple de l'ordre $(n-3)(n^2+2)$. Les points de contact de ces tangentes forment sur S_n une courbe de l'ordre $n(3n^2-4n-6)$. Les points d'intersection restant de ces tangentes avec S_n forment une 2^e courbe de l'ordre

$$n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3).$$

III. Droites $T_{2,2}$, c'est-à-dire *tangentes ayant en deux points distincts un contact du 1^{er} ordre avec la surface* S_n.

8° Par un point, situé sur la surface S_n, on peut mener $(n-3)(n+2)$ tangentes touchant en ce point et en un autre point.

9° Par un point, non situé sur la surface S_n, on peut, en général, mener $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ droites $T_{2,2}$.

10° Dans chaque plan, arbitrairement choisi, il y a

$$\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3) \text{ droites } T_{2,2}.$$

11° Les droites $T_{2,2}$, qui rencontrent une droite fixe L arbitrairement choisie, engendrent une surface de l'ordre $(n+1)n(n-2)(n-3)$; la droite L est sur cette surface une ligne multiple de l'ordre $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$. La courbe de contact des droites $T_{2,2}$ est de l'ordre $n(n-3)(n^2+2n-4)$. La surface engendrée rencontre encore la surface S_n suivant une autre courbe de l'ordre $n(n-1)(n-3)(n-4)(n+2)$.

12° Les droites $T_{2,2}$, dont un des points de contact est sur une section fixe C_n, engendrent une surface de l'ordre $n(n-3)(n^2+2n-4)$; la courbe C_n est sur cette surface une courbe multiple de l'ordre $(n-3)(n+2)$; toutes les nappes de cette surface qui passent par C_n touchent la surface S_n suivant cette courbe. Les deuxièmes points de contact des droites $T_{2,2}$ forment une courbe de l'ordre $n(n^3-2n^2+2n-6)$. Les points d'intersection des droites $T_{2,2}$ avec S_n forment une courbe de l'ordre $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$.

13° Les droites $T_{2,2}$, issues des points d'une section plane C_n et touchant en deux points distincts non situés sur C_n, engendrent une surface de l'ordre $n(n-3)(n-4)(n^2+n-2)$; la courbe C_n est pour cette surface une ligne multiple de l'ordre

$$\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2).$$

Les points de contact des droites $T_{2,2}$ forment une courbe de l'ordre $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$. Les points d'intersection des droites $T_{2,2}$ avec S_n forment une deuxième courbe de l'ordre $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3)$.

IV. Droites T_4, c'est-à-dire *tangentes ayant avec la surface* S_n, *en un seul point, un contact du* 3^e *ordre.*

14° La surface formée par les droites T_4 est de l'ordre

$$2n(n-3)(3n-2).$$

La courbe formée par les points de contact des tangentes T_4 est de l'ordre $n(11n-24)$. La surface engendrée a, en outre, en commun avec S_n, une courbe de l'ordre $2n(n-4)(3n^2+n-12)$.

V. Droites $T_{3,2}$, c'est-à-dire *droites tangentes en deux points distincts pour lesquels un des contacts est du* 2^e *ordre et l'autre du* 1er *ordre.*

15° Les droites $T_{3,2}$ engendrent une surface de l'ordre

$$n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

Les points de contact τ_3 forment une courbe de l'ordre

$$n(n-4)(3n^2+5n-24).$$

Les points de contact τ_2 forment une courbe de l'ordre

$$n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12).$$

Les tangentes $T_{3,2}$ rencontrent, en outre, la surface S_n en des points formant une courbe de l'ordre $n(n-4)(n-5)(n^3+6n^2-n-24)$.

VI. Droites $T_{2,2,2}$, c'est-à-dire *droites touchant en trois points distincts avec un contact du* 1er *ordre. Points paraboliques, etc.*

16° Les droites $T_{2,2,2}$ engendrent une surface de l'ordre

$$n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2+3n-2).$$

17° Les points de contact des tangentes $T_{2,2,2}$ forment une courbe de l'ordre $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)$.

18° La courbe, au lieu des points paraboliques, est de l'ordre $4n(n-2)$. La développable circonscrite suivant la courbe parabolique est de la classe $4n(n-1)(n-2)$.

19° Les plans bitangents forment une développable de la classe $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)$; la courbe de contact est de l'ordre $n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$.

Etc.

6. Nous joindrons à cela une indication très-sommaire des principaux Mémoires qui se rapportent à cette partie de la théorie des surfaces algébriques.

SALMON (G.). — Cambridge and Dublin Math. Journal, vol. IV, p. 260, 1849.
Quarterly Journal, vol. I, p. 336.
Philosophical Transactions, p. 229, 1860.
Transactions of the Royal Irish Academy, t. XXIII, 1856-1859.
Analytic Geometry of three Dimensions, 1862.

CAYLEY. — Philosophical Transactions, 1869.
Journal de Liouville, t. X, etc.

CREMONA. — Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, 1866.
Mémoire de Géométrie pure (Journal de Borchardt), t. 68, 1867.

CLEBSCH. — Journal de Borchardt, 1860-1861, etc.

ZEUTHEN. — Annali di Matematica, t. III, 1869.
Mathematische Annalen, 1871.

STURM (R.). — Journal de Borchardt, t. 72, 1870.

Etc.