

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. LESPIAULT

## Question de mécanique

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 4  
(1873), p. 293-297

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1873\\_\\_4\\_293\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4_293_1)>

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## MÉLANGES.

### QUESTION DE MÉCANIQUE;

PAR M. G. LESPIAULT.

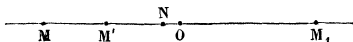
*L'attraction proportionnelle à la distance est la seule qui fasse décrire au mobile une courbe toujours fermée, dans un temps toujours le même, quelles que soient les conditions initiales.*

Je donne habituellement, dans mon Cours, une démonstration simple et élémentaire de cette proposition, qui a l'avantage de comprendre les théorèmes directs et les réciproques. Cette démonstration, qui n'a pas encore été publiée dans son ensemble, donne en même temps la solution de tous les problèmes de tautochronisme dans les mouvements curvilignes, lorsque la force motrice est fonction de l'arc à parcourir.

#### 1<sup>o</sup> MOUVEMENT RECTILIGNE.

Si le point  $M$  est attiré vers le point fixe  $O$  par une force con-

Fig. 1.



stamment proportionnelle à la distance  $MO$ , il arrivera toujours au point  $O$  dans le même temps, quel que soit son point de départ.

Supposons, en effet, deux mobiles  $M$  et  $M'$  placés tous deux, en repos, en des points différents de la droite, et sollicités par des forces respectivement proportionnelles aux distances  $MO$ ,  $M'O$ . Dans le premier instant  $dt$ , les chemins élémentaires parcourus

par  $M$  et  $M'$  sont proportionnels aux forces qui les sollicitent, et par conséquent aux chemins entiers qu'ils ont à parcourir. Au bout de ce premier instant, les forces motrices sont proportionnelles aux chemins qui restent à parcourir, et par suite aux chemins entiers. Il en est de même des vitesses acquises, et par conséquent il en sera de même aussi des longueurs parcourues pendant le second instant  $dt$ ; car ces longueurs se composent des chemins parcourus en vertu des vitesses acquises pendant le premier instant, et des chemins parcourus en vertu des accélérations acquises pendant le second instant  $dt$ .

Au bout de ce second instant, les vitesses seront donc encore proportionnelles aux chemins déjà parcourus, et par suite aux longueurs entières. Le même raisonnement s'appliquera pendant le troisième instant, pendant le quatrième, et ainsi de suite; de telle sorte que les chemins parcourus dans un temps quelconque, fini ou infiniment petit, sont constamment proportionnels aux longueurs  $OM$  et  $OM'$ . Donc, quand  $M$  aura parcouru  $OM$ ,  $M'$  aura parcouru  $OM'$ , et les deux mobiles arrivent au même instant au point  $O$ .

Ensuite chaque mobile dépasse le point  $O$ , et, dans la seconde période de son mouvement, il perd à chaque instant l'accélération qu'il a gagnée à l'instant correspondant de la première.  $M$  atteint donc la symétrique  $M_1$  de son point de départ dans le même temps qu'il a mis à arriver de  $M$  en  $O$ , et les oscillations sont isochrones pour tous les mobiles  $M$ ,  $M'$ , etc.

*Réciproque.* — Si les oscillations sont de même durée  $2\tau$  pour un mobile  $M$  sollicité par une force, fonction de sa distance au point  $O$ , quel que soit le point de départ de ce mobile, je dis que cette force est constamment proportionnelle à la distance  $MO$ .

Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que les actions de la force motrice étant symétriques de part et d'autre du point  $O$ , si les oscillations sont isochrones pour les mobiles  $M$ ,  $M'$ , etc., ces mobiles mettent tous le même temps  $\tau$  à arriver au point  $O$ , et réciproquement.

Cela posé, désignons par  $\varphi(x)$  la force motrice du point  $M$ . Je dis que  $\varphi(x)$  est proportionnelle à  $x$ . En effet, on pourra toujours déterminer la constante  $k$  de telle manière que, sous l'action d'une force égale à  $kx$ , le mobile parcourt  $MO$  dans le temps  $\tau$ . Dès lors, si  $\varphi(x)$  n'est pas identique à  $kx$ , elle est nécessairement alterna-

tivement plus grande et plus petite, et, en outre, ces alternatives se succèdent à intervalles finis; car on ne peut concevoir deux forces différentes, dont l'une serait alternativement plus grande et plus petite que l'autre, par intervalles infiniment petits : cette idée n'aurait aucun sens. On pourra donc toujours trouver sur MO un point N assez voisin du point O, bien qu'à une distance finie de ce point, pour que, entre N et O, la force  $\varphi(x)$  soit constamment plus grande ou constamment plus petite que  $kx$ . Supposons-la constamment plus grande, pour fixer les idées, ou tout au moins supposons que, entre N et O,  $\varphi(x)$  ne devienne jamais plus petite que  $kx$ ; car elle pourrait lui devenir égale pendant un intervalle de temps quelconque, sans que le raisonnement cessât d'être rigoureux. Cela posé, plaçons un mobile sans vitesse au point N. Sous l'action de la force  $\varphi(x)$ , il arrivera au point O en moins de temps que sous l'action de la force  $kx$ , qui est constamment moindre ou tout au plus égale, c'est-à-dire en un temps moindre que  $\tau$ ; car, en vertu de notre proposition directe,  $\tau$  représente le temps que le mobile mettrait à parcourir NO sous l'action de la force  $kx$ . MO et NO ne seront donc pas parcourus, dans le même temps, sous l'action de la force  $\varphi(x)$ , si cette force diffère de  $kx$ .

*Remarque.* — Cette démonstration s'applique mot pour mot à la proposition suivante :

Pour qu'une courbe soit tautochrone par rapport à l'un de ses points, sous l'action d'une force tangentielle, fonction de l'arc à parcourir, il faut et il suffit que cette force soit constamment proportionnelle à l'arc <sup>(1)</sup>.

## 2° MOUVEMENT DANS LE PLAN.

Soit un plan M, lancé du point A suivant AT, et sollicité vers le point O par une force proportionnelle à la distance. Je dis que ce point décrira une courbe fermée, dans un temps indépendant des circonstances initiales.

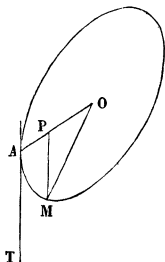
Pour le démontrer, projetons sur la droite OA le mouvement du point M, *parallèlement* à la vitesse initiale AT. Le point P se mouvra comme un point libre parti du point A sans vitesse, en

---

(1) Voir *Théorie géométrique des Tautochrones*, par M. G. Lespiault. Paris, Gauthier-Villars; 1869. Prix : 60 c.

même temps que M, et assujéti à parcourir la droite AO sous l'action d'une force constamment proportionnelle à PO. Donc, en

Fig. 2.

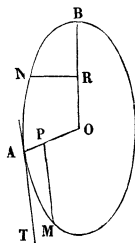


vertu du théorème précédent, ce point reviendra en A au bout d'un temps constant  $4\tau$ , quelles que soient les circonstances initiales. Il est clair que le point M accomplit sa révolution dans le même temps.

*Réciproque.* — Si un mobile parcourt une courbe fermée dans un temps constant  $4\tau$ , quelles que soient les conditions initiales, sous l'action d'une force dirigée vers le point fixe O, cette force est proportionnelle à la distance.

Soit, en effet, OB un rayon maximum ou minimum. La courbe est évidemment symétrique par rapport à OB; car la marche du mobile sera la même, qu'il parte du point B vers la droite ou vers

Fig. 3.



la gauche. En outre, la trajectoire sera partout concave vers le point O. Cela posé, projetons *orthogonalement* le mobile N en R, sur OB. Le point R se mouvra comme un point libre sollicité par la projection de la force motrice du point N. Or il est évident que la distance NO détermine la longueur OR, et réciproquement; d'où

Il résulte que la force projetée est une fonction de  $OR$ . D'ailleurs, le mobile  $R$  revient en  $B$  en même temps que  $N$ , c'est-à-dire dans le temps  $4\tau$ , quelle que soit la valeur initiale de  $OB$ . Donc, d'après le théorème précédent, la force qui le sollicite est proportionnelle à  $OR$ . Par suite, la force motrice du point  $N$  est proportionnelle à  $ON$ . (c. q. f. d.)