BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

L. KRONECKER

Sur la théorie algébrique des formes quadratiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4 (1873), p. 256-271

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__256_1>

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE ALGÉBRIQUE DES FORMES QUADRATIQUES;

PAR L. KRONECKER.

(Extrait des *Comptes rendus mensuels de l'Académie des Sciences de Berlin,* juin 1872.)

Le problème de déterminer une forme quadratique positive du plus grand déterminant possible, qui prenne, pour $n+1$ systèmes donnés de valeurs des n variables, certaines valeurs assignées d'avance, conduit à une méthode très-simple pour traiter le « problème de maximum » dont M. Borchardt a communiqué à notre Académie, en 1866, une solution complète, publiée dans les *Mémoires* de cette même année. Pour le cas de $n = 3$, auquel est consacrée la présente Note, on obtient ainsi, d'une part, le tétraèdre renfermant le plus grand volume parmi ceux dont les faces ont des aires données, et, d'autre part, l'ellipsoïde de volume minimum, ayant un centre donné et circonscrit à un tétraèdre donné.

§ I.

Le problème algébrique proposé peut, moyennant une transformation de variables, se réduire immédiatement au cas où les valeurs d'une forme quadratique ternaire positive $f(x_1, x_2, x_3)$, pour les quatre systèmes de valeurs

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_1 = 0, & x_1 = 0, & x_1 = 1, \\ x_2 = 0, & x_2 = 1, & x_2 = 0, & x_2 = 1, \\ x_3 = 0, & x_3 = 0, & x_3 = 1, & x_3 = 1, \end{array}$$

sont données respectivement par les quantités f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2. On peut supposer ici que la valeur f_4^2 soit plus grande que les trois autres, et, pour les valeurs des quantités f, prises positivement, on a nécessairement la condition d'inégalité

$$f_1 + f_2 + f_3 > f_4;$$

car, dans une forme positive

$$(\mathrm{f})\quad f_1^2 x_1^2 + f_2^2 x_2^2 + f_3^2 x_3^2 + 2c_{23} f_2 f_3 x_2 x_3 + 2c_{31} f_3 f_1 x_3 x_1 + 2c_{12} f_1 f_2 x_1 x_2,$$

les coefficients c sont, en valeur absolue, moindres que l'unité, et, par suite,

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2c_{23} f_2 f_3 + 2c_{31} f_3 f_1 + 2c_{12} f_1 f_2,$$

c'est-à-dire f_4^2 est moindre que le carré de $f_1 + f_2 + f_3$.

Maintenant une telle forme, c'est-à-dire, en général, toute forme ternaire positive, abstraction faite d'un facteur commun, peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{F})\quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 - (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)^2 \\ \qquad + w_1 x_2 x_3 + w_2 x_3 x_1 + w_3 x_1 x_2, \end{array} \right.$$

les coefficients v et w étant réels, et satisfaisant aux conditions

$$(\mathrm{F}^\star)\quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 - v_1^2 : v_2 - v_2^2 : v_3 - v_3^2 : v_4 - v_4^2 = f_1^2 : f_2^2 : f_3^2 : f_4^2, \\ \qquad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1, \quad w_1 + w_2 + w_3 = 0. \end{array} \right.$$

Il est aisé de voir qu'il existe effectivement des valeurs réelles de ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, vérifiant ces relations; car, si l'on pose

$$1 - 2\nu_i = \sqrt{1 + 4(\nu_4^2 - \nu_4)\frac{f_i^2}{f_4^2}}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

le radical étant pris positivement, il résulte de la sommation des trois valeurs de cette expression pour $i = 1, 2, 3$ l'équation

$$1 + 2\nu_4 = \sum_i \sqrt{1 + 4(\nu_4^2 - \nu_4)\frac{f_i^2}{f_4^2}}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

qui détermine pour ν_4 une valeur réelle. En effet, si l'on égale ν_4 à zéro ou à $+\infty$, le premier membre devient moindre que le second, tandis que, pour des valeurs de ν_4 immédiatement supérieures ou inférieures à l'unité, suivant que $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$ est plus grand ou plus petit que f_4, c'est le premier membre qui a la plus grande valeur. Comme, de plus, les deux membres restent continus dans tout l'intervalle entre $\nu_4 = 0$ et $\nu_4 = \infty$, il existe une valeur positive de ν_4, et une seule, comme on le verra par les développements ultérieurs, qui, suivant que l'un ou l'autre cas a lieu, est inférieure ou supérieure à l'unité. Ces deux cas peuvent être caractérisés respectivement par $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, ce signe étant défini par l'inégalité

$$\varepsilon(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - f_4^2) > 0.$$

La forme (F), de même que ν_1, ν_2, ν_3, est positive ou négative en même temps que ε; la somme $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3$ est toujours moindre que l'unité, puisque ν_4 est positif.

Nous allons maintenant faire voir que le déterminant d'une forme εF, les coefficients ν_1, ν_2, ν_3 restant constants, peut toujours diminuer de valeur, tant que les coefficients w_1, w_2, w_3 ne seront pas tous nuls. Pour cela, imaginons que les deux groupes, de trois termes chacun, contenus dans l'expression (F), soient transformés l'un et l'autre en une somme de carrés, et que l'on obtienne de cette manière les équations suivantes :

$$\varepsilon(\nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$
$$\varepsilon(w_1 x_2 x_3 + w_2 x_3 x_1 + w_3 x_1 x_2) = p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2,$$
$$\varepsilon(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3) = t_1 y_1 + t_2 y_2 + t_3 y_3.$$

t_1, t_2, t_3 sont ici les valeurs respectives de y_1, y_2, y_3, lorsqu'on fait $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, et entre les quantités p et t on a les relations

$$p_1 t_1^2 + p_2 t_2^2 + p_3 t_3^2 = 0, \quad p_1 + p_2 + p_3 = 0,$$
$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = \varepsilon(v_1 + v_2 + v_3),$$

de sorte qu'il existe une quantité p telle que l'on ait

$$p_1 = p(t_2^2 - t_3^2), \quad p_2 = p(t_3^2 - t_1^2), \quad p_3 = p(t_1^2 - t_2^2).$$

La forme (F), multipliée par ε, se change alors dans la suivante :

$$\text{(G)} \quad (1+p_1)y_1^2 + (1+p_2)y_2^2 + (1+p_3)y_3^2 - \varepsilon(t_1 y_1 + t_2 y_2 + t_3 y_3)^2,$$

et son déterminant

$$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)\left(1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{1+p_1} - \frac{\varepsilon t_2^2}{1+p_2} - \frac{\varepsilon t_3^2}{1+p_3}\right)$$

prend, pour $p = 0$, c'est-à-dire pour $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, comme on peut s'en assurer d'une manière tout à fait directe, sa valeur maximum

$$1 - \varepsilon(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2), \quad \text{ou} \quad v_4.$$

En effet, il est clair d'abord que le produit $(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)$ ne peut surpasser la valeur 1 ; car la somme des trois facteurs est constamment égale à 3, et deux au moins d'entre eux doivent avoir des valeurs positives, pour que la forme (G) soit positive. Si le produit devient, d'après cela, égal à $1 - q^2$, et que l'on pose

$$-t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = s_1, \quad t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 = s_2, \quad t_1^2 + t_2^2 - t_3^2 = s_3,$$

le déterminant de la forme (G) sera, pour $\varepsilon = -1$,

$$v_4 - q^2 - p^2(t_1^2 t_2^2 t_3^2 - s_1 s_2 s_3),$$

et le multiplicateur de p^2 ne devient jamais négatif, puisqu'on peut le ramener à la forme

$$\tfrac{1}{2}s_1(t_2^2 - t_3^2) + \tfrac{1}{2}s_2(t_3^2 - t_1^2) + \tfrac{1}{2}s_3(t_1^2 - t_2^2),$$

et que, des trois quantités s, une seule *au plus* est négative. Pour $\varepsilon = +1$, au contraire, le déterminant devient

$$v_4 - v_4 q^2 + (1 - v_4)(1+p_1)p_2 p_3 - t_1^2(p_1 - p_2)(p_1 - p_3),$$

et les trois termes qui suivent ν_4 sont tous négatifs, parce que $0 < \nu_4 < 1$, et qu'en outre $1 + p_1$ (de même que $1 + p_2$, $1 + p_3$) est positif, et que l'on peut supposer,

$$\text{soit} \quad p_1 \geqq p_2 \geqq 0 \geqq p_3, \qquad \text{soit} \quad p_1 \leqq p_2 \leqq 0 \leqq p_3.$$

Par ces expressions du déterminant, il devient évident que leur valeur maximum est ν_4, et que cette valeur s'obtient *seulement* en posant $p = 0$, c'est-à-dire $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. De là résulte d'abord que, comme nous l'avons dit plus haut, une fonction ternaire positive quelconque peut, d'une seule manière, se ramener à une forme telle que F, ou que, à chaque proportion déterminée que l'on donnera

$$f_1^2 : f_2^2 : f_3^2 : f_4^2,$$

correspond un système unique de valeurs de ν_1, ν_2, ν_3, ν_4; car, autrement, une forme de déterminant minimum pourrait aussi être représentée par deux formes F avec des coefficients ν différents, et par suite, au moins une fois de telle manière que deux des coefficients w fussent différents de zéro. Il s'ensuit alors que, parmi les diverses formes positives ternaires εF qui ne diffèrent entre elles que par les valeurs des coefficients w, celle-là a le plus grand déterminant, dans laquelle on a $w_1 = w_2 = w_3 = 0$; c'est-à-dire que la forme

$$(\Phi) \qquad \nu_1 x_1^2 + \nu_2 x_2^2 + \nu_3 x_3^2 - (\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3)^2,$$

divisée par r, est la forme cherchée de déterminant maximum, qui, pour les systèmes donnés de valeurs

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_1 = 0, & x_1 = 0, & x_1 = 1, \\ x_2 = 0, & x_2 = 1, & x_2 = 0, & x_2 = 1, \\ x_3 = 0, & x_3 = 0, & x_3 = 1, & x_3 = 1, \end{array}$$

prend respectivement les valeurs $f_1^2, f_2^2, f_3^2, f_4^2$, les quantités r, ν_1, ν_2, ν_3 étant, à l'aide d'une quantité auxiliaire ν_4, déterminées par les équations

$$\nu_g - \nu_g^2 = r f_g^2, \quad \sum_g \nu_g = 1, \quad (g = 1, 2, 3, 4),$$

et, pour le reste, de la manière exposée ci-dessus. Le déterminant de la forme Φ est

$$\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4,$$

et la forme adjointe (déjà considérée dans les recherches de Borchardt), divisée par le déterminant, est

$$(\Phi') \qquad \frac{x_1^2}{\nu_1} + \frac{x_2^2}{\nu_2} + \frac{x_3^2}{\nu_3} + \frac{1}{\nu_4}(x_1 + x_2 + x_3)^2;$$

le diviseur r est positif ou négatif en même temps que ε, et est déterminé par une équation qui, sous forme irrationnelle, peut s'écrire ainsi

$$\sum_g \sqrt{1 - 4 r f_g^2} = 2, \quad (g = 1, 2, 3, 4),$$

et qui coïncide au fond avec celle qui sert de base aux recherches de Borchardt déjà citées. Pour $\varepsilon = +1$, les quantités ν et par suite aussi Φ' sont positives, ainsi que Φ. Pour $\varepsilon = -1$, ν_1, ν_2, ν_3 sont négatifs, et par suite la forme $-\Phi$ positive.

Si l'on fait abstraction de l'indication d'une valeur de la forme pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, il résulte presque immédiatement, de la méthode développée plus haut, que la forme

$$f_1^2 x_1^2 + f_2^2 x_2^2 + f_3^2 x_3^2$$

a le déterminant maximum; car, si l'on conçoit qu'à cette forme on ajoute un groupe

$$w_1 x_2 x_3 + w_2 x_3 x_1 + w_3 x_1 x_2,$$

et qu'on transforme alors simultanément les deux formes ternaires en sommes de carrés, savoir, dans les expressions

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \quad p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_3^2$$

respectivement, où l'on a

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0, \quad 1 + p_1 > 0, \quad 1 + p_2 > 0, \quad 1 + p_3 > 0,$$

le déterminant, savoir, le produit

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3),$$

ne sera évidemment un maximum que si l'on a $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, et partant aussi $w_1 = w_2 = w_3 = 0$.

Absolument comme par l'omission d'une valeur de la forme, le problème se simplifie aussi lorsqu'on donne en plus une cinquième valeur de la forme, c'est-à-dire lorsqu'il s'agit, dans un *groupe* de formes

$$(1-\lambda)\varphi(x_1, x_2, x_3) + \lambda\psi(x_1, x_2, x_3),$$

de déterminer la forme positive dont le déterminant est maximum. La valeur correspondante de λ est, en effet, une des deux valeurs réelles pour lesquelles s'évanouit la dérivée du déterminant de $\varphi + \lambda(\psi - \varphi)$, prise par rapport à λ. Que toutes les conditions du problème sont ainsi remplies, c'est ce qu'on peut établir comme il suit. Imaginons que chaque forme du groupe soit représentée par une somme de trois carrés; ceux-ci ont leurs trois signes déterminés, et ainsi à chaque forme appartient une certaine *combinaison de signes*. Or la série totale des valeurs depuis $\lambda = -\infty$ jusqu'à $\lambda = +\infty$ est partagée, par les valeurs qui annulent le déterminant, en quatre intervalles, auxquels correspondent autant de *sections* du groupe. A toutes les formes d'une même section appartient une même *combinaison de signes,* tandis que d'une section à l'autre un des trois signes change. Les sections correspondant aux deux intervalles extrêmes ne contiennent que des formes *indéfinies,* puisque, par hypothèse, il y a des valeurs réelles des variables x pour lesquelles $\varphi = \psi$, et qui par suite annulent la forme $\psi - \varphi$. Les valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ doivent donc appartenir à l'un des deux intervalles moyens, puisque les formes correspondantes φ et ψ sont positives et définies, et c'est dans ce même intervalle que doit être comprise la valeur de λ correspondant à leur maximum, puisque c'est un intervalle moyen, et que le déterminant y est positif.

§ II.

Pour l'application géométrique dont il a été question ci-dessus, soient 1, 2, 3, 4 les quatre sommets, et f_1, f_2, f_3, f_4 les valeurs des aires des quatre faces opposées d'un tétraèdre. Désignons respectivement les quatre plans par I, II, III, IV, et les cosinus des angles de leurs normales par

$$c_{gh}, \quad (g, h = 1, 2, 3, 4).$$

Pour le tétraèdre maximum ayant des faces d'aires données f_1, f_2,

f_3, f_4 (ou pour un tétraèdre semblable à celui-là), les quantités c_{12}, c_{23}, c_{31} devront être déterminées de telle sorte, que la forme (f) du § Ier soit positive, que son déterminant soit un maximum, et qu'en même temps, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, elle prenne la valeur $f_1'^2$, la condition

$$(\text{A}) \qquad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + 2c_{23}f_2f_3 + 2c_{31}f_3f_1 + 2c_{12}f_1f_2 = f_4^2$$

devant être satisfaite. Les trois autres cosinus c_{14}, c_{24}, c_{34} sont ensuite déterminés par la condition

$$(\text{A}') \qquad f_1 + c_{12}f_2 + c_{13}f_3 + c_{14}f_4 = 0,$$

et par les conditions analogues.

Comme la somme des quatre quantités ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, définies ci-dessus algébriquement, est égale à l'unité, ces quantités peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'un point 5, rapportées à un tétraèdre quelconque 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire qu'il existe un point pour lequel les volumes des tétraèdres

$$(1234) : (5234) : (1534) : (1254) : (1235)$$

sont entre eux comme

$$1 : \nu_1 : \nu_2 : \nu_3 : \nu_4,$$

les volumes étant pris avec des signes convenables, de telle façon, par exemple, que (1234) et (5234) soient de même signe ou de signe contraire, suivant que les points 1 et 5 sont ou non d'un même côté du plan des points 2, 3, 4. Si l'on désigne par $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{III}}$, $\overline{\text{IV}}$ les quatre plans parallèles respectivement à I, II, III, IV, et passant par les points 1, 2, 3, 4, le point 5, d'après le § Ier (F*), a la propriété, caractéristique pour sa détermination, que

$$(\text{B}) \quad (5\text{I})(5\overline{\text{I}}) = (5\text{II})(5\overline{\text{II}}) = (5\text{III})(5\overline{\text{III}}) = (5\text{IV})(5\overline{\text{IV}}),$$

les expressions entre parenthèses désignant les distances, comme dans tout ce qui va suivre. Pour ce point 5, comme on l'a montré plus haut, les rapports

$$(1234) : (5234) : (1534) : (1254) : (1235)$$

dépendent uniquement des rapports des aires de triangles

$$(234) : (134) : (124) : (123),$$

ou

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 ;$$

ils sont donc constants pour tous les tétraèdres dans lesquels les derniers rapports ont des valeurs données. Désignons tous ces tétraèdres par [1, 2, 3, 4], et tous les tétraèdres semblables entre eux, qui (relativement à leur surface) comprennent un volume maximum, par [1^0, 2^0, 3^0, 4^0].

La détermination du point 5, pour un quelconque des tétraèdres [1, 2, 3, 4], doit être considérée comme l'interprétation géométrique de la résolution de l'équation, établie au § I^er^, qui détermine v_1, v_2, v_3, v_4, au moyen des valeurs des rapports

$$f_1^2 : f_2^2 : f_3^2 : f_4^2 .$$

Le point 5 étant trouvé pour un tétraèdre quelconque [1, 2, 3, 4], on en déduit d'une manière très-simple les différents éléments de la détermination du tétraèdre particulier [1^0, 2^0, 3^0, 4^0]. De la forme quadratique Φ du § Ier résultent, en effet, immédiatement les valeurs de c_{12}, c_{23}, c_{31}; puis, de l'équation de projection (A'), les trois autres cosinus c_{14}, c_{24}, c_{34}. De plus, de la forme adjointe Φ' du § Ier, on tire les valeurs des arêtes et des cosinus des angles qu'elles font entre elles, en remarquant simplement que

$$\frac{1}{r}\Phi \quad \text{est la forme adjointe de} \quad \frac{1}{s}\Phi',$$

s étant pris avec le même signe que r, et défini par l'équation

$$r = s^2 v_1 v_2 v_3 v_4 .$$

En introduisant encore, au lieu des quantités v, leurs valeurs réciproques v', on obtient, de la manière indiquée, les déterminations suivantes pour un tétraèdre [1^0, 2^0, 3^0, 4^0] :

$$c_{ik}^2 = \frac{v_i}{1 - v_i}\,\frac{v_k}{1 - v_k} = \frac{1}{v'_i - 1}\,\frac{1}{v'_k - 1},$$

$$\cos^2[(hi), (hk)] = \frac{v_i}{v_h + v_i}\,\frac{v_k}{v_h + v_k} = \frac{v'_h}{v'_h + v'_i}\,\frac{v'_h}{v'_h + v'_k},$$

$$4s.(5^0 k)^2 = v'_k - 1, \quad s.(ik)^2 = v'_i + v'_k,$$

$$s^2 f_k^2 = v'_g v'_h + v'_h v'_i + v'_i v'_g,$$

$$36 s^2 (1^0 2^0 3^0 4^0)^2 = v'_1 v'_2 v'_3 v'_4 .$$

Les indices g, h, i, k correspondent ici aux sommets 1°, 2°, 3°, 4°, et c_{ik} doit être pris avec le signe de $-\varepsilon\nu_i\nu_k$, puisque l'on a

$$rf_if_kc_{ik} = -\nu_i\nu_k;$$

enfin (ik),... représentent les distances des points entre parenthèses. La valeur de s distingue seule les uns des autres les tétraèdres semblables, et, multipliée par 4, elle est la valeur réciproque du produit $(5\mathrm{I})(5\bar{\mathrm{I}})$, constant pour les quatre faces des tétraèdres. Les déterminations ci-dessus font voir que les arêtes opposées sont perpendiculaires deux à deux, et que, par conséquent, les quatre hauteurs du tétraèdre se coupent en un même point, *lequel est le point* 5°, puisque celui-ci satisfait à la condition (B), et partant à la suivante :

$$(\mathrm{B}^0)\ (1^0 5^0)(\mathrm{I}^0 5^0) = (2^0 5^0)(\mathrm{II}^0 5^0) = (3^0 5^0)(\mathrm{III}^0 5^0) = (4^0 5^0)(\mathrm{IV}^0 5^0).$$

Les valeurs absolues de c_{ik} sont, d'après cela, les cosinus des angles que font entre elles les lignes $(5^0 i)$ et $(5^0 k)$, ces angles étant comptés de telle manière que les lignes allant de 5° à i et à k fassent entre elles un angle obtus ou aigu, suivant que l'on aura

$$\varepsilon = +1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon = -1.$$

Donc, dans le tétraèdre [1° 2° 3° 4°], les produits deux à deux des trois arêtes qui partent d'un même sommet, multipliés par le cosinus de l'angle que ces arêtes font entre elles, sont constants, aussi bien que les six produits deux à deux des lignes menées du point 5° aux sommets, multipliés par le cosinus de l'angle qu'elles comprennent. Cette dernière propriété, c'est-à-dire l'existence d'un tel point 5°, suffit déjà, étant données les aires des faces, pour déterminer complétement soit le tétraèdre de volume maximum, soit celui dont les hauteurs concourent en un même point, et cela de telle manière qu'il en ressort l'identité de ces deux tétraèdres; car, si l'on prend le point 5° pour origine d'un système de coordonnées orthogonales, il faut, par supposition, que la relation

$$x_hx_i + y_hy_i + z_hz_i = x_hx_k + y_hy_k + z_hz_k$$

ait lieu pour les trois indices h, i, $k = 1, 2, 3, 4$, c'est-à-dire pour les sommets du tétraèdre pris trois à trois. Or cette relation prouve aussi que la ligne $(5^0 h)$ est dirigée perpendiculairement à l'arête (ik), et le point 5^0 doit, en conséquence, se trouver sur chacune des quatre hauteurs. Les équations (B^0) ayant lieu pour un point 5^0 de concours des hauteurs, on en conclut, pour les coordonnées homogènes v_1, v_2, v_3, v_4 de ce point, les déterminations

$$v_1 - v_1^2 : v_2 - v_2^2 : v_3 - v_3^2 : v_4 - v_4^2 = f_1^2 : f_2^2 : f_3^2 : f_4^2,$$

qui justifient l'exactitude de notre assertion. Un tétraèdre dont les hauteurs concourent en un même point comprend donc un volume plus grand que tout autre, dont les faces ont les mêmes aires; et, réciproquement, le tétraèdre maximum est complétement défini par l'existence d'un point de concours des hauteurs 5^0. Enfin, de la propriété caractéristique d'un point de concours des hauteurs 5^0, établie ci-dessus, résulte une construction simple et intuitive du tétraèdre maximum. Puisqu'on a, en effet,

$$(5\overline{\mathrm{I}}) = (5\mathrm{I})(v'_1 - 1), \quad (5\overline{\mathrm{II}}) = (5\mathrm{II})(v'_2 - 1), \ldots,$$
$$4s(5^0 1^0)^2 = v'_1 - 1), \quad 4s(5^0 2^0)^2 = v'_2 - 1, \ldots,$$

on n'a qu'à déterminer le point 5 dans un tétraèdre quelconque, dont les aires des faces sont données, puis à prendre, à partir d'un point quelconque 5^0, dans quatre directions différentes, quatre longueurs

$$(5^0 1^0), \quad (5^0 2^0), \quad (5^0 3^0), \quad (5^0 4^0),$$

dont les carrés soient proportionnels aux quotients

$$\frac{(5\overline{\mathrm{I}})}{(5\mathrm{I})}, \quad \frac{(5\overline{\mathrm{II}})}{(5\mathrm{II})}, \quad \frac{(5\overline{\mathrm{III}})}{(5\mathrm{III})}, \quad \frac{(5\overline{\mathrm{IV}})}{(5\mathrm{IV})},$$

de telle manière que les produits de ces longueurs deux à deux, multipliés par le cosinus de l'angle qu'elles font entre elles, aient tous la même valeur. On obtient ainsi les quatre sommets 1^0, 2^0, 3^0, 4^0 d'un tétraèdre dont les aires des faces sont proportionnelles à celles des faces du tétraèdre [1234], et qui, relativement à sa surface, renferme un volume maximum [1].

---

[1] Pour comparer nos notations à celles de Borchardt, et, en particulier, avec celles que ce geomètre a employees dans son exposition inseree dans le *Traité des Déterminants* de Baltzer (3e edition, p. 233 et suiv.), je remarque que les quantites v'

Si l'on cherche une interprétation géométrique analogue des deux autres résultats algébriques, concernant les formes de déterminant maximum pour lesquelles on donne trois ou bien cinq valeurs de la forme, on voit que l'on n'obtient, dans le premier cas, que l'angle trièdre trirectangle, comme celui dont le sinus a une valeur maximum. Dans le second cas, au contraire, on obtient la détermination des cosinus c_{12}, c_{23}, c_{31} des trois angles que font deux à deux des directions pour lesquelles on a

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2+2c_{12}f_1f_2+2c_{23}f_2f_3+2c_{31}f_3f_1=f_4^2,$$
$$\mathcal{F}_1^2+\mathcal{F}_2^2+\mathcal{F}_3^2+2c_{12}\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2+2c_{23}\mathcal{F}_2\mathcal{F}_3+2c_{31}\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_4^2,$$

en même temps que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & 1 & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

est un maximum. On obtient par là deux tétraèdres, [1, 2, 3, 4] et [1′, 2′, 3′, 4′], dont les sommets 4 et 4′ coïncident ensemble, et dont les aires des faces sont respectivement f_1, f_2, f_3, f_4, et $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$. Si l'on juxtapose les deux tétraèdres de sommets 4 et 4′, de manière que l'arête (14) se prolonge en marchant dans la même direction suivant l'arête (41′), etc., il en résulte un polyèdre limité par 5 plans, 9 droites et 7 sommets, dont la surface sera formée par 8 triangles ayant pour aires $f_1, f_2, f_3, f_4, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$, et qui, ces aires étant supposées données, aura un volume maximum. La détermination d'un tel polyèdre s'effectue, comme il a été établi, au moyen d'une équation quadratique; il est donc géométriquement constructible, dans le sens restreint du mot.

§ III.

Passons à la seconde application géométrique indiquée dans l'Introduction. Soient 1, 2, 3, 4 les sommets du tétraèdre donné, et soit

---

ci-dessus sont proportionnelles à celles que M. Borchardt désigne par v. Ces dernières acquièrent ainsi une signification geometrique très-simple; chacune d'elles, en effet, devient egale à huit fois la hauteur de l'un des tétraèdres, multipliee par la partie comprise entre le sommet et le point de concours des hauteurs, c'est-à-dire que, par exemple, la quantite v_1 de Borchardt devient égale à 8 (1I)(15), la quantité v_2 à 8 (2II)(25), etc.

le point o le centre de l'ellipsoïde qu'il s'agit d'inscrire au tétraèdre. Désignons toujours par I, II, III, IV les plans des faces du tétraèdre, et par $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{II}}$, $\overline{\mathrm{III}}$, $\overline{\mathrm{IV}}$ les plans menés parallèlement à ces faces par les sommets opposés. Supposons que l'on ait choisi le point 4 de telle sorte que la valeur absolue du volume du tétraèdre (o123) ne soit inférieure en grandeur à aucune des trois autres (o234), (o134), (o124). Si l'on prend maintenant le point o pour origine des coordonnées, les axes étant dirigés suivant les lignes (o1), (o2), (o3), et les longueurs de ces lignes elles-mêmes étant prises pour unités, les trois coordonnées d'un point variable quelconque p seront

$$z_1 = \frac{(\mathrm{o}p23)}{(\mathrm{o}123)}, \quad z_2 = \frac{(\mathrm{o}1p3)}{(\mathrm{o}123)}, \quad z_3 = \frac{(\mathrm{o}12p)}{(\mathrm{o}123)},$$

les volumes des tétraèdres étant pris avec les signes convenables. Les coordonnées du point 4, d'après le choix que l'on a fait tout à l'heure, sont donc toutes inférieures ou égales, en valeur absolue, à l'unité. L'équation d'un ellipsoïde de centre o, passant par les points 1, 2, 3, sera

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2c_{12} z_1 z_2 + 2c_{23} z_2 z_3 + 2c_{31} z_3 z_1 = 1,$$

et l'ellipsoïde, d'après les développements algébriques qui précèdent (*voy.* p. 261), a un volume minimum, lorsque les trois coefficients c sont nuls, c'est-à-dire lorsque les points 1, 2, 3 sont situés sur un système de diamètres conjugués. Pour que la surface de l'ellipsoïde contienne encore le point 4, il faut, en outre, que l'équation

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + 2c_{12}\zeta_1\zeta_2 + 2c_{23}\zeta_2\zeta_3 + 2c_{31}\zeta_3\zeta_1 = 1$$

soit vérifiée lorsque ζ_1, ζ_2, ζ_3 représentent les coordonnées du point 4.

Si l'on pose

$$z_k = f_k x_k, \quad \zeta_k f_4 = f_k, \quad (k = 1, 2, 3),$$

on a, d'après les considérations algébriques précédentes,

$$\text{(E)} \qquad v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + v_3 x_3^2 - (v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)^2 = r,$$

pour l'équation de l'ellipsoïde de volume minimum, ayant un centre donné et passant par quatre points donnés. On obtient de même l'ellipsoïde minimum passant par *cinq* points donnés, et cela de telle manière que l'on peut encore construire un sixième point quelconque géométriquement (dans le sens restreint du mot). La position du point o doit toujours être telle que la somme des valeurs absolues des trois coordonnées ζ soit moindre que l'unité; s'il en était autrement, on ne pourrait circonscrire aucun ellipsoïde au tétraèdre donné.

Étudions encore de plus près le cas où l'on donne quatre points de la surface. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les coordonnées homogènes d'un point variable p, le tétraèdre [1, 2, 3, 4] étant pris pour tétraèdre fondamental; les rapports

$$1 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4$$

doivent être égaux aux rapports

$$(1234) : (p234) : (1p34) : (12p4) : (123p).$$

Supposons que les quatre quantités v_1, v_2, v_3, v_4 soient les coordonnées d'un point 5, déterminé, en vertu de la relation ($F^\star$) du § I^{er}, par les proportions

$$v_1 - v_1^2 : v_2 - v_2^2 : v_3 - v_3^2 : v_4 - v_4^2 = u_{10}^2 : u_{20}^2 : u_{30}^2 : u_{40}^2,$$

les grandeurs désignées en cet endroit par f_1, f_2, f_3, f_4 étant supposées proportionnelles aux coordonnées u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_{40} du point o.

Le point 5 est, d'après cela, caractérisé par les conditions

$$\frac{(5\mathrm{I})(5\overline{\mathrm{I}})}{(o\mathrm{I})^2} = \frac{(5\mathrm{II})(5\overline{\mathrm{II}})}{(o\mathrm{II})^2} = \frac{(5\mathrm{III})(5\overline{\mathrm{III}})}{(o\mathrm{III})^2} = \frac{(\mathrm{IV})(5\overline{\mathrm{IV}})}{(o\mathrm{IV})^2}.$$

Cela posé, si l'on prend

$$x_i u_{i0} = u_4 u_{i0} - u_i u_{40}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

l'équation précédente (E) de l'ellipsoïde pourra s'exprimer simplement, au moyen des coordonnées homogènes u. En effet, une équation quelconque

$$\sum_i \sum_k a_{ik} x_i x_k = 1, \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

si l'on détermine les quantités $u_{\iota 0}$ d'après les conditions

$$a_{ii}\, u_{40}^2 = u_{i0}^2, \quad (i = 1, 2, 3),$$

se change dans la suivante,

$$(\mathrm{E}') \quad u_{40}^2 \sum_g \sum_h a_{gh} \frac{u_g\, u_h}{u_{g0}\, u_{h0}} = \sum_g \sum_h u_g\, u_h, \quad (g, h = 1, 2, 3, 4; \quad g \gtrless h),$$

les coefficients a d'indice 4 étant définis par les quatre équations

$$\sum_g a_{gh} = 0, \quad (g, h = 1, 2, 3, 4).$$

L'équation (E′) représente évidemment une surface du second degré, circonscrite au tétraèdre fondamental, dont le centre a pour coordonnées u_{10}, u_{20}, u_{30}, u_{40}, puisque les quatre dérivées de la différence des deux membres de l'équation (E′) prennent, pour $u_1 = u_{10}$, $u_2 = u_{20}, \ldots$, la même valeur commune ± 1. Il vient, d'après cela, pour l'ellipsoïde minimum,

$$\sum_g \sum_h v_g\, v_h \frac{u_g\, u_h}{u_{g0}\, u_{h0}} + r \sum_g \sum_h u_g\, u_h = 0, \quad (g, h = 1, 2, 3, 4; \quad g \gtrless h),$$

r désignant la valeur, constante pour les quatre indices $h = 1, 2, 3, 4$, du rapport

$$\frac{v_h - v_h^2}{u_{h0}^2} \quad \text{ou} \quad \frac{(5\mathrm{I})\,(5\bar{\mathrm{I}})}{(0\mathrm{I})^2}, \ldots,$$

en posant, de plus,

$$u_1 = \frac{(p\mathrm{I})}{(1\mathrm{I})}, \quad u_{10} = \frac{(0\mathrm{I})}{(1\mathrm{I})}, \quad v_1 = \frac{(5\mathrm{I})}{(1\mathrm{I})},$$
$$u_2 = \frac{(p\mathrm{II})}{(2\mathrm{II})}, \quad u_{20} = \frac{(0\mathrm{II})}{(2\mathrm{II})}, \quad v_2 = \frac{(5\mathrm{II})}{(2\mathrm{II})},$$
$$\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots,$$

et p étant un point de la surface de l'ellipsoïde. Si l'on fait, enfin,

$$(5\mathrm{I}) = \alpha_1^2, \quad (5\bar{\mathrm{I}}) = \beta_1^2, \ldots,$$

$$\frac{\alpha_1\, u_1}{(0\mathrm{I})} = \omega_1, \quad \text{ou} \quad \frac{(5\mathrm{I})\,(p\mathrm{I})^2}{(0\mathrm{I})^2 (1\mathrm{I})^2} = \omega_1^2, \ldots,$$

on arrive à la représentation la plus simple de l'ellipsoïde minimum en coordonnées homogènes,

$$\sum_g \sum_h (\alpha_g \alpha_h + \beta_g \beta_h) \omega_g \omega_h = 0, \quad (g, h = 1, 2, 3, 4; \quad g \gtrless h),$$

c'est-à-dire à l'équation de l'ellipsoïde de moindre volume parmi tous ceux qui ont le point o pour centre, et dont la surface contient les points 1, 2, 3, 4.