Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 36-59

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__36_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MÉMOIRES PUBLIÉS PAR M. TCHEBYCHEF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.

I.

Объ интерполированіи. — *Sur l'interpolation.* (Supplément au T. IV des *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg;* 1864. — 23 p. gr. in-8°.)

Dans un travail inséré au T. III des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, et intitulé : О непрерывныхъ дробяхъ (*Sur les fractions continues*), l'auteur a établi une formule d'interpolation par la méthode des *moindres carrés,* pour des valeurs données quelconques de la fonction à interpoler.

Étant données les valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de la fonction u, correspondantes à $x = 0, 1, \ldots, n-1$, si l'on désigne par

$$\psi_0(x),\quad \psi_1(x),\quad \psi_2(x),\ldots$$

les dénominateurs des réduites successives de la fraction continue à numérateurs constants qui représente le développement de la somme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n+1},$$

cette formule d'interpolation est de la forme

$$u = \frac{\Sigma\psi_0(i)u_i}{\Sigma[\psi_0(i)]^2}\psi_0(x) + \frac{\Sigma\psi_1(i)u_i}{\Sigma[\psi_1(i)]^2}\psi_1(x) + \ldots,\quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

M. Tchebychef indique, dans le présent Mémoire, des simplifications de cette formule, dans le cas particulièrement remarquable où les valeurs données de la fonction correspondent à des intervalles égaux. Dans ce cas, la formule générale d'interpolation, correspondante à la formule de Lagrange, se ramène à une série correspondante à la formule d'interpolation de Newton, et renfermant comme elle dans ses termes les différences finies des valeurs données du premier, du second, du troisième,... ordre, ce qui, comme on sait, est très-avantageux dans la pratique. Cette série donne l'expression des valeurs à interpoler, sous la forme d'un polynôme d'un degré plus ou moins élevé, suivant le nombre des termes qu'il contient, et ces polynômes s'obtiennent avec les mêmes coefficients que l'on trouve, par la méthode des moindres carrés, en résolvant le système total des équations formées pour chaque hypothèse particulière concernant le degré de l'expression cherchée. On peut voir aisément la recherche de ces expressions se simplifier par l'emploi de la nouvelle série, au moyen de laquelle on les obtient directement pour tous les degrés successivement, en commençant par le degré zéro. On aperçoit, en outre, à combien de termes ou, ce qui est la même chose, à quel degré il faut se borner dans la formule d'interpolation cherchée, sans avoir, comme dans le procédé ordinaire d'interpolation par la méthode des *moindres carrés*, à calculer, avec les valeurs données, toutes les formules qui correspondent aux degrés inférieurs, jusqu'à ce qu'on soit arrivé au degré voulu. La nouvelle formule a encore cet avantage important, qu'à mesure que l'on introduit un nouveau terme dans l'expression interpolatoire cherchée, on peut, en même temps, voir directement comment décroît successivement la somme des carrés des erreurs correspondantes à chaque nombre de termes de la formule, dans la détermination, au moyen des termes existants, des grandeurs de toutes les valeurs données. On obtient ainsi la *moyenne quadratique* de ces erreurs, d'après laquelle on peut juger si le nombre de termes employé peut fournir une exactitude satisfaisante pour la valeur de la fonction.

II.

О разложеніи функцій въ ряды при помощи непрерывныхъ дробей. — *Sur le développement des fonctions en séries à l'aide des fractions continues.* (Supplément au T. IX des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg;* 1866. — 26 p. gr. in-8°.)

Ce Mémoire contient une nouvelle application des fractions continues à l'Analyse.

Soit u une fonction de x, et $\frac{P_n}{Q_n}$ une réduite quelconque de la fraction continue

$$u = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}},$$

$q_0, q_1, \ldots$ étant des fonctions entières de x; on sait que l'on a

$$uQ_n - P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n+1} + \varepsilon_n Q_n} = R_n,$$

ε_n étant la valeur de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{1}{q_{n+2} + \ldots}}$$

Les degrés des fonctions R_n ainsi obtenues sont négatifs et algébriquement décroissants.

Si une fonction v de x est susceptible d'un développement suivant les puissances de x, on pourra obtenir ce développement sous la forme d'une série dont les termes seront des fonctions entières de x, multipliées respectivement par les quantités $R_1, R_2, R_3, \ldots$. Soit, en effet, Ev la partie entière de v; $v - Ev$ sera une fonction de degré négatif. Calculons successivement les fonctions entières ω_1, $\omega_2, \ldots$ par les équations

$$v - Ev = \omega_1 R_1 + r_1, \quad r_1 = \omega_2 R_2 + r_2, \quad r_2 = \omega_3 R_3 + r_3, \ldots.$$

On en conclura pour v un développement de la forme

$$v = Ev + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \ldots + \omega_n R_n + r_n.$$

Cette méthode de développement permet de résoudre avec une remarquable facilité le problème suivant :

Trouver les valeurs des polynômes X, Y, *tels que la différence* $uX - Y$ *exprime une fonction donnée* v *avec le plus d'approximation possible, sans que le degré de* X *dépasse une limite donnée.*

Dans le cas où $uX - Y$ a pour limite zéro, ces polynômes X et Y s'obtiennent par le développement immédiat de u en fraction continue. Lorsque cette différence a pour limite une fonction quelconque v, ces polynômes peuvent être déterminés à l'aide des séries dont on trouve les termes en développant u en fraction continue.

III.

Объ одномъ ариѳметическомъ вопросѣ.— *Sur une question d'Arithmétique.* (Supplément au T. X des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg;* 1866. — 54 p. gr. in-8°.)

L'objet de ce Mémoire est l'application des fractions continues à la résolution d'une équation numérique

$$y - ax = b \pm \varepsilon,$$

ε étant une quantité très-petite; ou, ce qui revient au même, à la recherche de deux nombres entiers x, y, aussi petits que possible en grandeur absolue, et telle que la différence $y - ax$ approche d'une quantité donnée b d'aussi près que l'on voudra.

Les nombres cherchés x, y sont déterminés par des séries dont on obtient les termes à l'aide des réduites d'une fraction continue égale à a. Soient

$$a = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \dots},$$

et

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{0}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0}{1}, \dots, \quad \frac{P_{e+1}}{Q_{e+1}} = \frac{P_e q_e + P_{e-1}}{Q_e q_e + Q_{e-1}}.$$

Posons

$$1 = D_0, \quad a - q_0 = D_1, \dots, \quad D_{e+1} = D_{e-1} - D_e q_e.$$

On aura, Eb étant la partie entière de b,

$$b - \mathrm{E}b = \frac{1 \pm 1}{2}(D_1 + \alpha_1 D_1 + D_2) + \alpha_2 D_2 + \frac{1 \pm 1}{2}(D_3 + \alpha_3 D_3 + D_4) + \dots,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des nombres entiers et positifs, déterminés, ainsi que les signes $\pm$ dans les facteurs $\frac{1 \pm 1}{2}$, de manière qu'en arrêtant la série à un terme quelconque on obtienne une grandeur plus petite que $b - \mathrm{E}b$, mais approchant de cette valeur d'aussi près que possible.

Si l'on s'arrête maintenant à un terme de la forme $\alpha_{2\lambda} D_{2\lambda}$, tel que les termes conservés de la série donnent la valeur de $b - \mathrm{E}b$ avec une erreur moindre qu'une quantité donnée ε, et que l'on prenne le dernier coefficient $\alpha_{2\lambda}$ aussi petit que possible, sans qu'il cesse d'être entier et sans que l'erreur devienne $> \varepsilon$, on trouvera la valeur cherchée de x, en remplaçant, dans l'expression ainsi obtenue de $b - \mathrm{E}b$, les quantités $D_1, D_2, \ldots$ par $-Q_1, +Q_2, \ldots, (-1)^n Q_n, \ldots$. On aura la valeur de y en remplaçant $D_1, D_2, \ldots$ par $-P_1, +P_2, \ldots, (-1)^n P_n, \ldots$, et ajoutant au résultat le terme $\mathrm{E}b$.

On suivrait une marche analogue pour obtenir des valeurs telles que $y - ax$ différât de b *par excès*, d'une quantité $< \varepsilon$.

Lorsque a est incommensurable, on trouve une infinité de valeurs de x et de y, pour lesquelles $y - ax = b - \frac{2}{x}$, et, en considérant les valeurs de y et de x pour lesquelles $y - ax > b$, on arrive aux deux théorèmes suivants :

I. *Si a est incommensurable, on peut trouver une infinité de nombres entiers x, y, tels, que l'expression $y - ax$ diffère d'une quantité donnée quelconque b de moins de $\frac{2}{x}$. Parmi ces valeurs de x et de y, les unes donnent $y - ax > b$, les autres $y - ax < b$.*

II. *Si la différence d'une progression arithmétique est incommensurable, parmi ses termes il s'en trouvera une infinité dont la partie fractionnaire sera moindre que 2 divisé par le nombre des termes précédents.*

A la fin de son Mémoire, M. Tchebychef cherche tous les nombres entiers x, y, pour lesquels la différence

$$\mathrm{A}(lx + my + n)^2 - \mathrm{A}_1(l_1 x + m_1 y + n_1)^2$$

est comprise entre zéro et le produit $4(lm_1 - l_1 m)\sqrt{\mathrm{AA}_1}$, $lm_1 - l_1 m$ étant différent de zéro, et AA_1 n'étant pas un carré parfait. La solution de ce problème se ramène à celle du précédent.

IV.

Объ одномъ механизмѣ. — *Sur un mécanisme.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, T. XIV; 1868. — 9 p. gr. in-8°.)

L'auteur étudie un mécanisme pouvant remplacer le parallélogramme de Watt, dont il diffère en ce qu'ici les leviers se croisent. Cette étude est l'application d'un théorème démontré par l'auteur dans son Mémoire intitulé : *Sur les questions de minima qui se* *rattachent à la représentation approximative des fonctions.* (*Mémoires de l'Académie,* T. VII.)

M. Tchebychef démontre que, dans le cas où la distance CC_1 des axes de rotation des leviers égaux CA, $C_1 A_1$ est environ le tiers de la longueur totale des deux leviers et de la tige AA_1, et où AA_1 est environ le quart de CA, le milieu M de AA_1 décrit un arc qui coïncide sensiblement avec une droite sur une assez grande longueur (0,62 AC). En comparant ce mécanisme avec le parallélogramme de Watt, calculé par Prony (*Annales des Mines,* T. XII), il trouve que la flèche de l'arc décrit par M est égale à 0,00029 de la longueur du levier AC, tandis que, dans le parallélogramme de Watt, elle est 0,00079 de la même longueur.

V.

О функцiяхъ подобныхъ функцiямъ Лежандра. — *Sur des fonctions analogues aux fonctions de Legendre.* (Imprimé par ordre de l'Académie de Saint-Pétersbourg; 1869. — 10 p. gr. in-8°.)

Si l'on désigne par $X_0, X_1, X_2, \ldots$ les coefficients du développement de $(1 - 2sx + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de s, on déduit facilement, de la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1 + \sqrt{st}}{1 - \sqrt{st}},$$

la propriété connue, que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_m \, dx$$

s'annule toutes les fois que les indices n et m sont inégaux.

M. Tchebychef généralise cette proposition, en s'appuyant sur l'expression de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(s, x) F(t, x)}{(1 + x)^\lambda (1 - x)^\mu} dx,$$

où $F(s, x)$ désigne la fonction

$$\Gamma(s, x) = \frac{(1 + s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\lambda (1 - s + \sqrt{1 - 2sx + s^2})^\mu}{\sqrt{1 - 2sx + s^2}}.$$

Cette intégrale pouvant se ramener à la forme

$$\int_0^1 \frac{2^{\lambda+\mu+1}(1-stz)^\mu}{z^\lambda(1-z)^\mu(1-stz^2)}\,dz,$$

et étant par conséquent une fonction de st, si l'on désigne par T_0, T_1, T_2,... les coefficients du développement de $F(s, x)$ suivant les puissances de x, on en conclut que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n T_m}{(1+x)^\lambda(1-x)^\mu}\,dx$$

s'annule toutes les fois que les indices n et m sont inégaux.

VI.

О центробѣжномъ уравнителѣ. — *Sur le régulateur à force centrifuge.* (1871. — 19 p. in-8°.)

L'auteur recherche quelles doivent être la forme et les dimensions d'un régulateur à force centrifuge, pour qu'il satisfasse à la loi d'isochronisme.

En prenant une forme déterminée, celle du régulateur de Watt, il pose l'équation du mouvement, et y introduit la condition d'isochronisme. A l'aide de cette condition, il détermine les dimensions principales des boules, de la masselotte, des leviers et des tiges, en fonction de la vitesse angulaire constante ω_0.

Au lieu de tiges droites, comme dans le régulateur de Watt, il propose l'emploi de tiges composées de parties rectilignes raccordées par un arc de cercle. A. P.

NACHRICHTEN von der K. Gesellschaft der Wissenschaften, und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1870 [1].

Nöther (M.). — *Sur les surfaces qui peuvent être représentées sur le plan.* (6 p.)

Cette Note a été développée depuis par l'auteur, dans un Mémoire développé qui a paru dans les *Mathematische Annalen*,

[1] *Nouvelles de la Société royale des Sciences de Göttingue;* voir *Bulletin*, t. I, p. 238.

t. II, p. 358. M. Nöther parvient au théorème suivant, qui est d'une grande importance :

Toutes les fois qu'une surface possède une série simplement infinie de courbes rationnelles qui sont obtenues, chacune, par l'intersection de la surface et d'une surface d'un faisceau, la surface peut être représentée point par point sur le plan (c'est-à-dire de manière qu'à un point du plan corresponde un seul point de la surface, et réciproquement).

Clebsch (A.). — *Sur la représentation d'une classe de surfaces du cinquième ordre.*

C'est le Mémoire dont nous avons rendu compte, et qui a paru dans le Recueil des Mémoires de la Société de Göttingue [1].

Lie (S.). — *Sur les rapports de réciprocité du complexe de Reye* (17 p.)

Il s'agit d'un complexe très-remarquable de droites dont nous avons déjà entretenu nos lecteurs. Si l'on transforme homographiquement les normales d'une série de surfaces homofocales du second degré, on obtient un assemblage de droites tel que chaque droite coupe les 4 faces d'un tétraèdre en 4 points, dont le rapport anharmonique est constant. Celles de ces droites qui passent par un point de l'espace forment un cône qui contient les 4 sommets du tétraèdre; celles qui sont dans un plan enveloppent une courbe tangente aux 4 faces du tétraèdre. D'ailleurs, toutes les droites passant par un des sommets, ou situées dans une des faces du tétraèdre fondamental, appartiennent au complexe, c'est-à-dire font partie de l'assemblage de droites considéré.

Cela posé, il résulte de cette définition que le complexe considéré demeure invariable : 1° par toutes les transformations homographiques en nombre triplement infini (c'est-à-dire contenant trois constantes arbitraires) qui laissent invariable le tétraèdre fondamental; 2° par toutes les transformations réciproques ou corrélatives (qui transforment un point en un plan), et dans lesquelles aux 4 faces du tétraèdre on fait correspondre les 4 sommets. C'est ce que M. Lie appelle les transformations adjointes ou correspondantes au complexe.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 315.

Si, en chaque point de l'espace, on se déplace dans la direction d'une droite du complexe, le point décrivant engendrera une courbe dont toutes les tangentes seront des droites du complexe, et qu'on peut appeler une courbe complexe. Les transformations homographiques ou corrélatives qui, laissant le complexe invariable, transforment ses droites en d'autres droites appartenant au complexe, transformeront aussi les courbes complexes en d'autres courbes complexes, dépendant de trois paramètres arbitraires et constituant, dans leur ensemble, une famille de courbes complexes.

Il y a, par exemple, deux espèces de courbes complexes du troisième ordre. Ce sont : 1° des cubiques gauches passant par les 4 sommets du tétraèdre; 2° des cubiques gauches corrélatives des précédentes et ayant 4 plans osculateurs communs qui sont les 4 faces du tétraèdre.

L'auteur communique, sur les courbes complexes, plusieurs théorèmes très-intéressants, et il remarque, comme cas particulier, que les courbes *tétraédrales symétriques*, considérées par M. de la Gournerie, dans son remarquable ouvrage, appartiennent à la classe des courbes complexes. Il énonce au sujet de ces courbes les théorèmes suivants :

Si deux courbes tétraédrales symétriques, d'exposants e et e', touchent une courbe tétraédrale symétrique d'exposant ε, elles touchent aussi une courbe d'exposant ε', où

$$\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e'},$$

en supposant que les exposants soient de la forme $\frac{1}{q}$.

Les lignes asymptotiques des surfaces tétraédrales symétriques sont des lignes algébriques, tétraédrales symétriques, et ayant un exposant moitié de celui de la surface.

Ce dernier résultat a été retrouvé récemment comme conséquence d'un théorème général, et donné dans le *Bulletin* par M. Darboux (1).

Enfin la Note se termine par l'étude des systèmes de rayons rectilignes, ou congruences, formés avec les droites du complexe.

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 355.

Enneper (A.). — *Sur une extension de la notion de surfaces parallèles.* (12 p.)

L'auteur, dans cette Note, s'occupe d'une question qui a déjà été étudiée par différents auteurs sous le nom de représentation sphérique (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* et *Bulletin de la Société Philomathique*). On étudie les surfaces telles, qu'en faisant correspondre à un point de l'une A un point A′ de l'autre, les plans tangents aux deux surfaces soient parallèles; et, en outre, que les lignes de courbure aient la même direction sur les deux surfaces en A et A′.

Klinkerfues (W.). — *Essai sur le mouvement de la Terre et du Soleil dans l'éther.* (6 p.)

Stern (A.). — *Sur une démonstration simple de la loi de réciprocité des résidus quadratiques, et sur quelques théorèmes qui s'y rattachent.* (15 p.)

Cette démonstration, très-élémentaire, se rapproche de la troisième démonstration de Gauss.

Clebsch (A.). — *Sur quelques problèmes de la théorie des surfaces.*

Il s'agit de la représentation des surfaces sur un plan double. Le Mémoire a paru *in extenso*. (*Mathematische Annalen*, t. I, p. 253.)

Enneper (A.). — *Sur un problème de Géométrie analytique.* (14 p.)

L'auteur traite des surfaces, pour lesquelles les coordonnées orthogonales d'un point satisfont à l'équation

$$\frac{d^2x}{du^2} = \frac{d^2x}{dv^2},$$

où u et v sont les paramètres des lignes de courbure.

Christoffel (E.-B.). — *De la représentation d'une surface plane, à connexion simple, et composée d'un seul feuillet, sur la surface plane limitée par une circonférence.* (16 p.)

Schering (E.). — *La pesanteur dans l'espace, tel que le conçoit Gauss.* (11 p.)

Enneper (A.). — *Sur les surfaces hélicoïdes.* (8 p.)

Christoffel (E.-B.). — *De la représentation d'une surface à connexion simple, à n feuillets, à l'intérieur d'un cercle.* (12 p.)

Il s'agit, dans cet article, comme dans le précédent, de recherches inspirées par les travaux de Riemann, et qui n'ont aucun rapport avec la théorie des représentations rationnelles étudiées récemment.

Clebsch (A.). — *Sur la théorie des formes binaires algébriques.* (9 p.) (1).

Gordan (P.). — *Des équations différentielles auxquelles satisfait la résultante d'une forme de degré n et d'une forme de degré m.* (7 p.)

Lipschitz (R.). — *Sur la théorie de l'inversion d'un système de fonctions.* (40 p.)

Enneper (A.). — *Sur les lignes asymptotiques.* (18 p.)

Brill (A.). — *Sur deux problèmes d'élimination, relatifs à la théorie des courbes qui satisfont à des conditions données.* (16 p.)

Séance publique du 3 décembre. — *Rapport des Secrétaires.* — La Société propose pour les Sciences mathématiques le sujet de prix suivant :

Donner une théorie des nombres complexes les plus généraux, et des formes de tous les degrés résolubles en facteurs linéaires.

Les Mémoires destinés au concours doivent être envoyés francs de port avant le mois de septembre 1873, et être accompagnés d'un pli cacheté portant le nom et la demeure de l'auteur, et rappelant une devise placée au commencement du Mémoire.

Le prix est de 50 ducats.

Programme des leçons pendant le semestre d'été 1870 a l'Université de Göttingue.

Les leçons commencent au 20 avril et finissent le 20 août (2).

Stéréométrie élémentaire et analytique, trigonométrie sphérique. — Quatre cours par semaine : M. Ulrich.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 183.

(2) Nous croyons être utile à nos lecteurs en leur donnant le programme des cours consacres aux Mathématiques et à l'Astronomie.

Géométrie pratique, avec application sur le terrain. — Quatre séances de deux heures par semaine : M. Ulrich.

Géométrie analytique de l'espace. — Quatre cours par semaine : M. Clebsch.

Géométrie analytique des surfaces et des courbes à double courbure avec application aux surfaces du 2e degré. — Cinq cours par semaine : M. Enneper.

Théorie des déterminants. — Deux leçons par semaine : M. Enneper.

Calcul différentiel et intégral. — Cinq leçons par semaine : M. Stern.

Fonctions de variables complexes, intégrales définies eulériennes, série hypergéométrique de Gauss. — Quatre leçons par semaine : M. Schering.

Calcul des variations. — Trois leçons par semaine : M. Stern.

Théorie et application des fonctions elliptiques. — Quatre leçons par semaine : M. Clebsch.

Observations magnétiques. — Une séance par semaine : M. Schering.

Astronomie sphérique. — Quatre leçons par semaine : M. Klinkerfues.

En outre, au Séminaire des Sciences physiques et mathématiques, M. Stern traite de la *division du cercle* (une séance) ; M. Clebsch traite des problèmes sur la *Géométrie analytique plane;* M. Klinkerfues prépare aux *observations astronomiques ;* M. Minnigerode fait quatre cours par semaine sur la *théorie de l'attraction.*

PROGRAMME DES LEÇONS FAITES PENDANT LE SEMESTRE D'HIVER A L'UNIVERSITÉ DE GÖTTINGUE.

Les cours commencent le 15 octobre et finissent le 15 mars. (Ce semestre est le second de l'année scolaire allemande.)

Voici les cours de Mathématiques et d'Astronomie :

Analyse algébrique, introduction aux notions fondamentales de l'Arithmétique. — Cinq cours par semaine : M. Stern.

Éléments de la théorie des formes algébriques. — Quatre leçons par semaine : M. Clebsch.

Géométrie analytique, surfaces du 2e degré. — Cinq leçons : M. Ulrich.

Calcul différentiel et intégral. — MM. Ulrich et Enneper : tous les jours.

Introduction à la théorie des fonctions abéliennes. — Quatre leçons : M. Clebsch.

Théorie des fonctions elliptiques. — Deux leçons : M. Enneper.

Exercices sur les applications des fonctions elliptiques. — Une leçon : M. Clebsch.

Théorie des fonctions sphériques. — Trois leçons : M. Minnigerode.

Méthode des moindres carrés. — M. Schering.

Théorie mathématique de la pesanteur, du magnétisme, de l'électricité, des courants galvaniques. — Deux leçons : M. Schering.

Mécanique analytique. — Quatre leçons : M. Stern.

Astronomie théorique, détermination des orbites. — Quatre leçons : M. Klinkerfues.

Au Séminaire des Sciences physiques et mathématiques, M. Ulrich traite de la *théorie des machines simples ;* M. Stern, les *exercices mathématiques ;* M. Schering, les *observations magnétiques ;* M. Klinkerfues, les *observations astronomiques.*

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT. — Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exacten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und höheren Bürgerschulen. (Zugleich Organ der mathematisch-naturwissenschaftlich-didactischen Sectionen der Philolog-, Naturforscher- und allgemeinen deutschen Lehrer-Versammlung.). — Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J.-C.-V. HOFFMANN, Oberlehrer am königl. Gymnasium zu Freiberg in Sachsen. — Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner. In-8 (1).

Nous n'entreprendrons pas d'analyser article par article le contenu de ce Journal, qui, comme l'indique son titre, n'est pas un pur recueil de Mémoires scientifiques, mais traite de tous les sujets relatifs à la partie scientifique de l'Enseignement secondaire, dans des articles de formes très-diverses. Nous essayerons seulement de donner une idée du but de cette publication, qui n'a pas, malheureusement, d'analogue en France, et dont nous ne saurions trop recommander la lecture aux professeurs, et surtout aux auteurs de programmes scolaires.

---

(1) *Journal pour l'enseignement des Sciences mathématiques et physiques.* Organe pour la méthodique, la valeur éducatrice et l'organisation des cours de sciences exactes dans les gymnases, les écoles pratiques, les séminaires de professeurs et les écoles municipales supérieures. (En même temps, organe des sections mathématiques, physiques et didactiques du Congrès des philologues, des naturalistes et des professeurs allemands en général.) Publié avec la collaboration de professeurs spéciaux par J.-C. HOFFMANN, professeur au Gymnase royal de Freiberg, en Saxe. Leipzig, Teubner. In-8.

Paraissant tous les mois par cahier de 5 à 6 feuilles. Prix : 3 Thlr.

Chaque livraison du journal se compose de trois parties :

1° *Mémoires.* — Articles relatifs aux éléments des sciences mathématiques, physiques et naturelles, à l'histoire scientifique, ou aux méthodes d'enseignement.

2° *Revue bibliographique.* — Analyse critique des ouvrages élémentaires publiés en Allemagne ou à l'étranger. Revue des articles bibliographiques publiés par les principaux journaux scientifiques. Liste des ouvrages nouvellement parus.

3° *Journal pédagogique.* — Comptes rendus des congrès de professeurs. Examen des programmes d'enseignement et des règlements d'instruction publique. Statistique scolaire. Table des Mémoires publiés par les Recueils périodiques les plus importants. Indication des découvertes récentes les plus remarquables. Correspondance.

Passons rapidement en revue les principaux sujets traités dans les deux premiers volumes de ce Journal.

T. I, 1870.

Le premier article est un travail du professeur Buchbinder, de Schulpforta, relatif à des propositions soumises par lui au Congrès des professeurs tenu à Kiel en septembre 1869, sur la question du développement de l'enseignement des sciences dans les gymnases. Cette question se rattache à la lutte qui existe, en Allemagne comme chez nous, entre les *humanistes* et les *réalistes,* c'est-à-dire entre ceux qui considèrent l'étude des langues anciennes comme le fondement de toute culture intellectuelle, et ceux qui veulent y faire entrer comme éléments principaux l'étude des sciences et celle des langues modernes.

Grâce au perfectionnement de leurs méthodes pédagogiques, les Allemands, tout en maintenant avec un soin jaloux le niveau de leur enseignement des lettres grecques et latines, ont trouvé moyen de faire place aux études scientifiques, qui se sont introduites dans les gymnases, depuis le commencement de ce siècle, en dépit des résistances des *philologues* exclusifs. L'enseignement des sciences commence, dès l'entrée au gymnase, par les éléments du *calcul* (que les Allemands distinguent des *Mathématiques* proprement dites), et par l'histoire naturelle. Vient ensuite l'étude des formes

(*Formenlehre*), enseignement préparatoire à celui de la Géométrie, et consistant principalement dans la pratique du dessin géométrique. Notons en passant que cet enseignement n'est pas confié à un artiste, mais à un mathématicien. On lira avec intérêt, dans le même volume, un article de M. Kiessling sur cet enseignement, qui peut devenir si fructueux quand il est bien dirigé. Pendant les six dernières années les élèves apprennent l'Arithmétique rationnelle, l'Algèbre, la Géométrie plane et solide, les éléments de Géométrie analytique, la Trigonométrie plane, la Géographie mathématique et physique, les Sciences physiques et chimiques.

On voit que ce programme d'études est assez étendu pour des jeunes gens qui ne se destinent pas à une profession scientifique. Aussi M. Buchbinder ne demande pas que l'on augmente les matières à enseigner, ni que l'on dépossède les langues anciennes de leur suprématie ; il demande seulement que l'on reconnaisse à l'enseignement des sciences le pouvoir de contribuer, aussi bien que l'enseignement littéraire, au développement intellectuel, qui doit être avant tout le but de l'éducation des gymnases. Mais, pour que l'étude des sciences soit profitable comme gymnastique de l'esprit, il faut qu'elle ne soit pas trop précipitée, et qu'on laisse aux élèves le temps de s'assimiler ce qu'on leur enseigne. On peut lire dans le même fascicule le compte rendu des débats auxquels les propositions de M. Buchbinder ont donné lieu.

Ce volume contient encore sur l'enseignement scientifique en général quelques autres articles, dont nous indiquerons seulement les titres :

Fresenius : Plan d'un enseignement préparatoire des sciences physiques. — *Bolze :* Sur l'enseignement de la Géographie et de l'Histoire naturelle dans les écoles secondaires. — *Oppel :* De l'influence de l'enseignement mathématique sur le perfectionnement du style. — *Hoffmann :* Sur les devoirs écrits des élèves de Mathématiques et de Sciences naturelles. — *Sturm :* Sur quelques incorrections qui se sont glissées dans le langage mathématique, et surtout dans la partie élémentaire.

Sur l'enseignement de l'Arithmétique, nous remarquons les articles suivants :

Oppel : Sur l'exposition scientifique du calcul des fractions et de la division dans les gymnases et autres écoles secondaires. —

Fahle : L'enseignement du calcul dans les gymnases. — *Kober :* Deux chapitres du calcul des fractions.

A l'enseignement de l'Algèbre se rapporte un article étendu du Dr *Schwarz,* intitulé : « Études critiques sur la théorie des nombres algébriques, » et traitant de la théorie des quantités négatives, et une Note de M. *Ziegler* sur la construction des équations du second degré.

Parmi les articles consacrés à la Géométrie élémentaire, citons les suivants :

Kober : Sur les définitions des conceptions fondamentales de la Géométrie. (Critique très-juste des définitions en usage dans la plupart des Traités, et en particulier de la définition de la ligne droite comme ligne de longueur minimum. C'est, dit l'auteur, comme si l'on définissait un parallélogramme par la propriété de ses diagonales de se couper en leur milieu, ou un triangle comme un polygone dont le supplément d'un angle est égal à la somme de tous les autres angles.) — *Kober :* La théorie du parallélogramme. — *Sturm :* La nouvelle Géométrie dans l'école. (L'auteur voudrait que l'on accoutumât de bonne heure les élèves aux locutions de la nouvelle Géométrie, y compris l'idée des figures situées à l'infini.)

On trouve encore dans ce volume divers articles sur l'enseignement de la Cosmographie et de la Géographie mathématique, sur le dessin des cartes à main levée, etc.

Parmi les auteurs des livres passés en revue dans la partie bibliographique, nous citerons, par ordre de matières, les noms suivants :

Arithmétique : Mauritius, Schwarz, Trappe.

Algèbre : Henrich, Koppe.

Géométrie : J. Müller, Ziegler, Ed. Müller, Lieber et von Lühmann.

Trigonométrie : Brockmann, Roese, Jochens, Henrich, Wiegand, Reinicke.

Géographie mathématique : A. Hoffmann.

Physique : Reis, Krumme, Spiller, Emsmann.

Mélanges : Thurot (*Recherches historiques sur le principe d'Archimède*). — Wiegand (*Autobiographie*, brochure très-curieuse par les renseignements qu'elle donne sur la position des fonctionnaires de l'enseignement en Allemagne dans la première moitié de ce siècle). — Wohlwill (*Le procès de Galilée devant l'Inquisition*).

La partie pédagogique contient, outre le compte rendu du Congrès de Kiel, dont il a déjà été question, les comptes rendus des réunions tenues à Innsbruck, à Berlin, à Vienne; des considérations sur l'enseignement scientifique, d'après le nouveau plan d'études des gymnases du grand-duché de Bade; les avis des Facultés prussiennes relativement aux études des gymnases et à l'introduction des élèves des *Realschulen* dans les Universités; des tableaux statistiques du personnel des gymnases et des *Realschulen* de Prusse.

T. II, 1871.

Arithmétique et Algèbre. — *Schwarz :* Théorie de la division. — *Hoffmann :* Sur le signe de division. Les auteurs français, avec raison, ne font entre les notations $a : b$ et $\frac{a}{b}$ aucune distinction, et considèrent la différence de ces deux signes comme une simple question d'écriture. En Allemagne, certains auteurs établissent entre ces deux symboles une différence correspondante au double point de vue sous lequel le quotient peut être envisagé, suivant que le dividende est supposé homogène au diviseur ou au quotient. En outre, la notation $a : b$ n'a pas pour tous la même signification. Pour les uns elle veut dire *a divisé par b*; pour les autres, surtout dans l'enseignement primaire, elle indique *combien de fois a est contenu dans b*, c'est-à-dire qu'elle équivaut à $\frac{b}{a}$. (Nous mentionnons ces variations de notations, simplement pour avertir ceux de nos lecteurs qui voudront prendre connaissance d'un Traité *élémentaire* d'Arithmétique rédigé en Allemagne. Quant aux auteurs de travaux de haute science, leur notation est la même dans tous les pays.)

Schwarz : Sur la position du multiplicateur. (Il s'agit de savoir si le multiplicateur doit être placé à droite ou à gauche du multiplicande.)

Kober : Sur les Traités de calcul.

Kuckuck : Remarques sur l'enseignement de la division et de la multiplication. (L'auteur recommande avec raison l'usage de commencer la multiplication par la *gauche du multiplicateur*.)

Kober : La méthode la plus courte pour la division ordinaire.

— Sur la lecture des grands nombres. (Il nous semble que le seul moyen pratique est d'épeler simplement les nombres chiffre par chiffre.)

GÉOMÉTRIE. — *Fresenius :* Théorie de l'égalité des triangles, d'après une nouvelle méthode. (Cette méthode est fondée sur la considération des figures planes symétriques par rapport à un axe.)

Becker : Sur les incorrections qui se sont glissées dans le langage mathématique. (Critique de quelques expressions employées dans la Géométrie de Baltzer.)

E. Müller : Le but, le livre et la méthode dans l'enseignement de la Géométrie. — *Hellmann :* Construction d'un triangle au moyen de ses trois médianes. — *Duda :* Théorèmes qui se rattachent à celui de Pythagore. — *Schlegel :* Exemples d'une nouvelle exposition des Mathématiques élémentaires, fondée sur la *Théorie de l'étendue,* de Grassmann. (Méthode analogue au Calcul barycentrique de Möbius et au Calcul des équipollences de Bellavitis.) — *Zerlang :* Remarques sur la terminologie mathématique. — *Zerlang :* Sur le calcul du nombre π. — *Sturm :* Sur les figures situées à l'infini. — *Kober* et *Hoffmann :* Remarques sur le Mémoire précédent. — *Brockmann :* Sur l'usage de la formule $\operatorname{tang} B = \frac{b \sin A}{c - b \cos A}$ dans la résolution d'un triangle. (Cette formule est avantageuse, lorsque les côtés b et c sont donnés par leurs logarithmes. L'auteur indique, à tort, comme moyen de simplifier le calcul, l'introduction d'un angle auxiliaire.) — *Plagge :* Construction de figures mnémoniques au moyen de la représentation d'une droite comme un cercle de rayon infiniment grand. — *Fresenius :* La nouvelle Géométrie et les figures à l'infini. — *Hellmann :* Sur un point de la théorie des sections coniques.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — *Friedlein :* Études sur le livre appelé *les Définitions de Héron.*

COSMOGRAPHIE. — *Beckmann :* Sur une inexactitude dans l'explication de la précession. — *Fahle :* Sur la sphéricité de la Terre. — *Pick :* Sur le même sujet.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE. — Parmi les ouvrages les plus importants dont il est rendu compte, nous remarquons les suivants : — *Beltrami :* Essai d'interprétation de la Géométrie non euclidienne. — *Mädler :* Discours et Mémoires sur des sujets d'Astronomie. —

Bretschneider : La Géométrie et les géomètres avant Euclide. — *Autenheimer :* Problèmes sur le travail mécanique. — *Bardey :* Recueil de problèmes de Mathématiques ; etc.

PROGRAMMES D'ÉTUDES ET PÉDAGOGIE. — L'enseignement mathématique et physique, d'après le nouveau Règlement des gymnases de Saxe. — Le nouveau plan d'études des écoles pratiques (*Realschulen*) et des gymnases d'Autriche. — Admission des élèves sortant des *Realschulen* dans les Facultés de philosophie des Universités prussiennes. — Statistique scolaire de tous les établissements d'instruction secondaire du royaume de Prusse. J. H.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (1).

T. LXXIII.

N° 17. Séance du 23 octobre 1871.

BERTRAND (J.). — *Note sur la théorie mathématique de l'électricité dynamique.*

M. Bertrand présente plusieurs observations critiques sur un Mémoire publié par M. *Helmholtz* dans le tome 72e du Journal de Crelle ; les objections de M. Bertrand portent principalement sur les définitions d'un *potentiel,* qui est le point de départ et la base de tout le Mémoire.

CHASLES. — *Sur la détermination d'une série de groupes d'un certain nombre de points sur une courbe géométrique.*

Suite d'une communication très-importante faite dans une séance précédente.

SECCHI (Le P.). — *Sur les divers aspects des protubérances et des autres parties remarquables à la surface du Soleil.* (5e lettre.)

SECCHI (Le P.). — *Note sur un nouveau moyen d'observer les éclipses et les passages de Vénus.*

---

(1) Voir *Bulletin,* t. I, p. 29.

MATHIEU (É.). — *Sur l'intégration des équations aux différences partielles de la physique mathématique.*

Pour donner une idée des divers théorèmes énoncés par M. Mathieu, nous citerons le premier :

« Toute fonction qui satisfait, à l'intérieur d'une surface σ, à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - a^2 u$$

a pour expression

$$\int \frac{\cos ar}{r} \rho\, d\sigma,$$

ρ étant une fonction arbitraire d'un point de σ. »

La fonction u et ses dérivées du premier ordre doivent varier d'une manière continue dans l'intérieur du corps terminé par la surface σ; r est la distance d'un point quelconque intérieur à σ à un point de la surface σ.

N° 18. Séance du 30 octobre 1871.

FAYE. — *Sur l'histoire et l'état présent de la théorie des comètes.*

Suite et fin de la communication faite dans la séance du 16 octobre.

LEVEAU. — *Eléments de la planète* (103) *Héra.*

N° 19. Séance du 6 novembre 1871.

PHILLIPS. — *Résumé des observations faites dans les sept dernières années à l'Observatoire de Neuchâtel, sur les chronomètres munis de spiraux à courbes finales théoriques.*

LE VERRIER. — *Observations de l'essaim d'étoiles filantes de novembre, les* 12, 13 *et* 14 *du présent mois, dans les stations de l'Association Scientifique de France.*

MANNHEIM. — *Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps, lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions.*

Cinq conditions sont nécessaires pour déterminer le déplacement d'une figure de forme invariable; lorsque la figure mobile n'est plus assujettie qu'à quatre conditions, on peut, à un instant quelconque, la déplacer d'une infinité de manières. Chacun des déplacements infiniment petits qu'on peut imprimer à la figure mobile, à partir de sa position initiale, est un déplacement hélicoïdal donnant lieu à un axe de déplacement. M. Mannheim, après avoir indiqué la situation et la construction de ces axes, termine par cette proposition générale : « *Lorsqu'une figure de forme invariable n'est assujettie qu'à quatre conditions, les axes de tous les déplacements qu'on peut lui imprimer, à partir d'une quelconque de ses positions, sont les génératrices d'un conoïde droit du troisième ordre.*

Ce conoïde a pour directrice une ellipse qui rencontre la directrice rectiligne, et dont la projection sur le plan directeur est une circonférence de cercle.

Levy (Maurice). — *Sur l'intégration des équations aux différences partielles, relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles, lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles.*

Les équations à intégrer sont les suivantes :

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0,$$

$$(N_2 - N_1)^2 + 4T^2 = 4K^2,$$

où N_1, N_2, T, sont trois fonctions inconnues de x et y, et K une constante. Par un choix heureux de nouvelles variables indépendantes, M. Levy arrive très-simplement à exprimer x, y, N_1, N_2, T, à l'aide des nouvelles variables; x et y sont représentées par des séries; les variables introduites sont entièrement liées à la question et ont une signification mécanique importante.

N° 20. Séance du 13 novembre 1871.

Faye. — *Sur la mesure spectroscopique de la rotation du Soleil au moyen du spectroscope à réversion du Dr Zollner.* (Suite du rapport verbal du 20 septembre 1869.)

Faye. — *Sur la loi de rotation du Soleil; réponse à une réclamation du P. Secchi, et à un mémoire du Dr Zollner.*

Phillips. — *Théorème sur le spiral réglant des chronomètres.*

M. Phillips démontre rigoureusement la proposition générale suivante : « Toutes les fois que la forme d'un spiral est telle qu'il n'existe, pendant le mouvement, aucune pression sur l'axe du balancier, il arrive que, pendant le mouvement, le centre de gravité de ce spiral est constamment sur l'axe du balancier. »

Tresca. — *Résultats des expériences de flexions faites sur des rails en fer et en acier au delà de la limite d'élasticité.*

Une des principales conclusions que M. Tresca tire de ses expériences est la suivante : « La limite d'élasticité s'éloigne, pour une même barre, à mesure qu'elle est soumise à des actions plus énergiques, et cette limite d'élasticité peut être reculée jusque dans le voisinage de la rupture, sans pour cela que le coefficient d'élasticité ait varié d'une manière très-notable. On observera néanmoins un amoindrissement successif de coefficient primitif qui peut aller jusqu'au dixième de la première valeur. »

Resal. — *Du mouvement d'un système matériel, rapporté à trois axes rectangulaires mobiles autour de leur origine.*

N° 21. Séance du 20 novembre 1871.

Saint-Venant (de). — *Sur la mécanique des corps ductiles.*

Villarceau (Yvon). — *Communication d'une lettre de M.* Gould.

Cette lettre est relative à l'établissement d'un Observatoire dans la république Argentine.

Secchi (Le P.). — *Sur les expériences du pendule qui vont être entreprises dans le tunnel des Alpes Occidentales.*

Le Verrier. — *Note sur les observations du passage de l'essaim d'étoiles filantes de novembre dans les nuits du* 12, 13 *et* 14 *de ce mois.*

Resal. — *Du mouvement d'un point soumis à l'action d'une cause périodique, et qui éprouve une résistance constante dirigée en sens inverse de la vitesse.*

M. Resal fait remarquer, à la fin de sa Note, que les résultats qu'il a énoncés sont en désaccord complet avec le principe suivant, posé *a priori* par Laplace :

« L'état d'un système de corps, dans lequel les conditions initiales du mouvement ont disparu par suite des résistances développées dans le mouvement est périodique comme les forces qui sollicitent le système. »

La périodicité, ajoute M. Resal, telle qu'elle est comprise dans cet énoncé, ne peut avoir lieu que si les résistances sont des fonctions impaires de la vitesse.

Bourget (J.). — *De la vitesse du son dans les tuyaux sonores.*

Dans une Note présentée le 8 mai, M. Bourget avait montré que la résistance de l'air expliquait complétement les perturbations qu'on observe quand on fait vibrer les membres élastiques. Il avait introduit cette résistance en modifiant l'équation différentielle du mouvement par l'addition au premier membre d'un terme proportionnel à la vitesse. Il avait également annoncé qu'une analyse semblable s'appliquait aux tuyaux sonores; c'est au développement de cette assertion qu'est consacrée la Note actuelle. Parmi les diverses propositions que M. Bourget conclut de son analyse, nous ne citerons que la première, qui est fondamentale :

« Les carrés des nombres de vibrations des divers sons possibles d'un même tuyau sont diminués d'une quantité constante par suite des diverses causes perturbatrices. »

Rozé. — *Note relative à la non-symétrie des courbes terminales du spiral des chronomètres.*

Boussinesq (J.). — *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond.*

Ce Mémoire, dit l'auteur, est consacré à déduire, des formules non linéaires et jusqu'à présent si rebelles de l'Hydrodynamique, l'explication à peu près complète des phénomènes intéressants et nombreux qui font l'objet de la deuxième Partie des *Recherches hydrauliques* de MM. Darcy et Bazin. (*Comptes rendus*, 10 août 1863.)

Lion (Moïse). — *Note sur l'histoire des observations relatives* *à l'action des conjonctions écliptiques sur les éléments du magnétisme terrestre.*

GASPARIS (DE). — *Formules pour le calcul des orbites des étoiles doubles.*

TARRY. — *Aurore boréale du 9 novembre; observations faites à Brest.*

N° 22. **Séance du 27 novembre 1871.**

CHASLES. — *Théorèmes concernant les axes harmoniques des courbes géométriques, dans lesquels on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur une courbe unicursale.*

FONVIELLE (W. DE). — *Sur des sons musicaux produits lors de l'ouverture de la soupape pendant des ascensions aérostatiques.*

L. P.