Bulletin des sciences

mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 367-383

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__367_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

Tome 74, 1872, 3e cahier.

THOMÉ (L.-W.). — *Contributions à la théorie des équations différentielles linéaires.* (25 p.)

Les recherches de M. Fuchs (t. 66 et 68 du même Journal) sur l'équation différentielle homogène et linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y + 0,$$

dont les coefficients p sont des fonctions monogènes et monodromes de la variable complexe x dans le *voisinage* [1] de $x = a$, ont fait voir, à l'aide d'un théorème de M. Weierstrass, que l'intégrale de cette équation se compose linéairement de m expressions ayant la forme

$$\begin{aligned} c(x-a)^r \Big\{ & \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \log(x-a) \\ & + \varphi_2(x) [\log(x-a)]^2 + \ldots + \varphi_h(x) [\log(x-a)]^h \Big\}, \end{aligned}$$

c étant une des m constantes arbitraires, n un certain nombre entier positif, ou nul. Les fonctions φ sont monodromes et monogènes dans le voisinage de $x = a$; donc elles peuvent être développées suivant les puissances de $x - a$ à exposants entiers, positifs ou négatifs. Or l'équation différentielle peut être telle que *chacune* des intégrales particulières ne contienne, dans les facteurs monodromes de $(x-a)^p$ $(x-a)^q$, qu'un nombre *fini* de puissances de $x - a$ *à exposants négatifs*. Ce problème a été complétement résolu par M. Fuchs (t. 68). Dans le présent Mémoire, M. Thomé se propose la question générale de rechercher la nature des équations différentielles telles que, parmi leurs intégrales particulières, il en existe *quelques-unes* douées de la propriété que nous venons de caractériser. Voici les résultats principaux obtenus par l'auteur, à l'aide d'une nouvelle méthode dont il se sert préalablement pour vérifier les théorèmes de M. Fuchs.

Si les coefficients p contiennent eux-mêmes des puissances de $(x-a)^{-1}$ en nombre fini, il faut les mettre sous la forme $\frac{f(x)}{(x-a)^s}$. Soient π_1 le degré du dénominateur pour p_1, π_2 pour $p_2, \ldots, \pi_m$ pour p_m. A ces conditions on peut énoncer le théorème (5) :

---

(1) *In der Umgebung von $x = a$*, terme employé par M. Weierstrass pour exprimer que la variable complexe x est comprise dans un cercle décrit autour du point a comme centre, avec un rayon égal à la distance entre a et le plus prochain des points singuliers.

Soit g le plus grand de tous les nombres entiers positifs $\pi_1 + m - 1$, $\pi_2 + m - 2, \ldots, \pi_m$ g est plus grand que m; soit $\pi_h + m - h$ le premier de ces nombres égal à g; l'équation différentielle aura tout au plus $m - h$ intégrales jouissant de la propriété caractérisée, et qui soient linéairement indépendantes, c'est-à-dire telles qu'il n'existe aucune relation $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{m-h} y_{m-h} = 0$ à coefficients constants.

En général, elle en aura même autant (6); cependant il y a des exceptions (7). On trouve encore la forme des intégrales qu'elle possède, et des développements qui comprennent, étant convergents, les intégrales qui existent réellement et qui ont la propriété caractérisée.

SCHWARZ (H.-A.). — *Sur l'intégration de l'équation aux différentielles partielles* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (36 p.)

Étant données des valeurs continues, tout le long d'un contour fermé, d'une fonction qui satisfasse à l'équation différentielle, déterminer la fonction pour l'intérieur du contour : tel est le problème traité dans la première partie du Mémoire pour le cas du cercle, d'après une méthode qui évite le principe de Dirichlet. Le mode de démonstration, connu sous le nom de principe de Dirichlet et employé par Riemann avec un si grand succès dans la théorie des fonctions, est l'objet, au point de vue de la rigueur, d'objections qui paraissent fondées, lorsqu'il s'agit de démontrer l'*existence* d'une fonction. C'est pour combler cette lacune que les géomètres allemands se sont efforcés soit de démontrer le principe, soit de le remplacer par d'autres raisonnements. L'auteur cherche à y suppléer en adoptant une méthode semblable à celle de Riemann (*Dissertation*, art. 10); et c'est par là qu'il réussit à éluder certaines difficultés, ou plutôt à éviter certaines hypothèses inadmissibles. Car, 1° si la fonction cherchée elle-même possède des valeurs continues fixées préalablement le long du contour fermé, cette seule condition n'entraîne pas *l'existence des dérivées partielles de la fonction cherchée* pour ce contour, à moins qu'on n'y ajoute d'autres conditions restrictives : cette remarque appartient à M. Weierstrass; 2° l'application des séries de Fourier n'est pas non plus exempte d'objections, puisque la possibilité de développer une fonction quelconque par ces séries n'a été démontrée qu'à certaines conditions spéciales. C'est pourquoi l'auteur fonde ses recherches sur l'intégrale définie indiquée par Poisson, et qui représente la somme de la série pour tous les points intérieurs du cercle. Mais alors il faut prouver que la fonction représentée par l'intégrale se change, d'une manière continue, dans la fonction donnée qui régit les valeurs à la circonférence. L'auteur y parvient en mettant à exécution certaines décompositions très-simples et dont l'idée principale a été aussi suggérée par Poisson. Les six premiers paragraphes du Mémoire avaient été déjà publiés à Zurich ; aujourd'hui l'auteur y a ajouté des Notes historiques et critiques. De plus, il a étendu ses recherches, dans les §§ 7-12, à l'hypothèse qui admet, dans quelques points du contour, des discontinuités ; il suppose seulement que la fonction cherchée reste toujours finie en s'approchant de ces points, et parvient à en déduire l'analogie de la fonction inconnue avec arc tang $\frac{y}{x}$ dans le voisinage du point $x = 0$, $y = 0$. Enfin l'auteur discute la même équation différentielle pour l'aire comprise entre les circonférences de deux cercles concentriques. Signalons encore un autre Mémoire du même auteur dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, octobre 1870, qui trace la voie pour des recherches ultérieures, et indiquons finalement le progrès qu'a fait la question à l'aide de ce Mémoire. L'auteur renonce à certaines hypothèses, considérées jusque-là comme indispensables pour la démonstration ; et néanmoins il n'emploie que des considérations très-élémentaires.

Frobenius (G.). — *Sur la résolution algébrique des équations dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une variable.* (19 p.)

Les recherches de Galois sur la possibilité de résoudre les équations algébriques à l'aide de radicaux se fondent sur les propriétés des systèmes de substitutions conjuguées. Si les coefficients de l'équation sont des fonctions rationnelles d'une variable, les racines subiront une certaine substitution, lorsque la variable indépendante, partant d'un point quelconque, décrit un contour fermé aboutissant au point de départ. Voilà pourquoi on peut, dans ce cas particulier, développer la théorie de Galois sans l'usage des substitutions ; de plus, il est aisé de voir qu'en évitant les systèmes conjugués on parvient à rendre la théorie plus simple et plus intelligible, par la représentation géométrique de la variable complexe. Se plaçant à ce point de vue, l'auteur définit le « groupe d'une équation » (suivant Galois) comme la totalité des permutations qui proviennent d'une permutation choisie au hasard, lorsque la variable indépendante, partant d'un point fixé, mais non singulier, parcourt tous les contours fermés possibles. D'après cela, les théorèmes de Galois et quelques développements de ces théorèmes s'ensuivent avec une remarquable facilité. Il va sans dire que tous les résultats de Galois, obtenus à l'aide de la résolvante de Lagrange, ne peuvent pas être reproduits par cette méthode.

Weyrauch (J.-J.). — *Problème de la théorie des déterminants.* (4 p.)

Détermination du nombre des termes qui contiennent m éléments transversaux.

Weyr (Em.). — *Sur les normales des courbes gauches rationnelles.* (2 p.). — *Sur le nombre des normales doubles d'une courbe gauche rationnelle.* (2 p.)

Une courbe gauche d'ordre n donne lieu à $3n - 2$ normales passant par un point quelconque ; elle possède $\frac{1}{2}(n-1)(9n-12)$ normales doubles.

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur la résolution des équations et la sommation des séries par des intégrales définies.* (13 p.)

La théorie des intégrales complexes fournit certaines intégrales dont l'auteur se sert pour exprimer, par leur moyen, les racines d'équations quelconques et les sommes de la plupart des séries ; mais, en réalité, on ne peut guère en faire usage à cause de leur complication excessive. D'ailleurs l'auteur montre que ces mêmes intégrales sont la source commune d'où découlent la série de Lagrange, y compris les conditions de limites, et les intégrales qu'ont découvertes Parseval, Jacobi et Cauchy pour représenter les racines d'une équation donnée.

Du Bois-Reymond (P.). — *Théorème général concernant la grandeur des infinis des fonctions et de leurs dérivées.* (11 p. ; fr.)

Suite d'un Mémoire du même auteur publié au mois d'octobre 1871 dans les *Annali di Matematica*. Il en généralise les résultats et conduit à des théorèmes généraux sur le rapport qui existe entre les infinis des fonctions et ceux de leurs dérivées. Une certaine fonction caractéristique, « type infinitaire », régit les infinis de toutes les dérivées de la fonction donnée. L'analyse qui conduit à ces théorèmes se simplifie à l'aide de quelques notations nouvelles que l'auteur a introduites dans les deux Mémoires cités.

Kiepert (L.). — *Sur une application géométrique de la multiplication des fonctions elliptiques.* (10 p.)

Si les coordonnées d'une courbe peuvent être représentées par des fonctions elliptiques de l'arc de cette courbe, la division de l'arc en n parties égales se réduit à la solution d'équations algébriques, dont le degré s'abaisse considérablement lorsqu'on peut employer la multiplication complexe. A l'exemple connu de la lemniscate, l'auteur joint la courbe $r^3 = \cos 3\varphi$, pour laquelle la division de l'arc en $n = 6g + 1$ parties égales (n étant premier) peut s'effectuer par la résolution d'une équation du degré g.

Pochhammer (L.). — *Sur le développement des fonctions suivant les intégrales d'une classe d'équations différentielles linéaires de deuxième ordre.* (47 p.)

Soient

$$g(x) = bx + b_1x^2 + b_2x^3 + \ldots, \qquad h(x) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$$

deux séries convergentes dans le voisinage de $x = 0$; soit $b > 0$, et soit m un nombre entier positif; alors l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + g(x)\frac{dy}{dx} + h(x)y = m(m + b - 1)y$$

possédera en général deux intégrales particulières qui pourront être développées suivant les puissances croissantes de x. L'une des deux intégrales, qui ne présente que des puissances à exposants entiers et positifs, étant désignée par P_m, on aura

$$P_m = x^m(1 + k_1x + k_2x^2 + \ldots).$$

Une fonction quelconque $\varphi(x)$, monogène et monodrome dans le voisinage de $x = 0$, peut alors être mise sous la forme

$$\varphi(x) + \beta_0P_0(x) + \beta_1P_1(x) + \beta_2P_2(x) + \ldots,$$

où β_0, β_1,... sont des constantes à déterminer. La série est convergente pour l'aire d'un cercle de centre $x = 0$. On voit que ce Mémoire généralise les résultats connus pour les fonctions sphériques et les fonctions de Fourier-Bessel. Citons les Mémoires dont l'auteur s'est rapproché pour la méthode de la recherche :

HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Berlin, 1861.
NEUMANN, *Theorie der Besselschen Functionen*, Leipzig, 1867.
THOMAE, deux Mémoires, *Journal de Borchardt*, t. 66.

MERTENS. — *Remarques sur les sections planes des surfaces du second ordre.* (3 p.)

Détermination de la direction des axes d'une conique, intersection d'une surface du second ordre, donnée par son équation générale, et d'un plan donné.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK. Herausgegeben von J.-A. GRUNERT.

T. LIII, 1871.

SPITZER (S.). — *Note sur l'intégration des équations différentielles.* (9 p.)

HOZA (F.). — *Détermination graphique approchée de la longueur du jour et de la nuit pour un point donné de la Terre à une époque donnée.* (5 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur la théorie du maximum et du minimum.* (12 p.)

On sait que, pour qu'une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y,... puisse présenter un maximum ou un minimum pour un système de valeurs de ces variables annulant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction, il faut et il suffit que, pour ces valeurs, un certain polynôme homogène, généralement du second degré, ne puisse changer de signe, quelques valeurs que l'on donne aux rapports des variables qui y entrent, et qui sont les accroissements infiniment petits dx, dy,..., indépendants entre eux. L'auteur indique, pour vérifier ce caractère, une méthode élégante, exposée, il y a plus de vingt ans, par le professeur Petzval, à l'Université de Vienne. La question se ramène à la discussion d'une équation du 3e degré, qui détermine les axes principaux des surfaces du second ordre, et à laquelle il suffit d'appliquer la règle des signes de Descartes.

Unferdinger (Fr.). — *Sur une transformation de l'intégrale définie* $\int_0^a \log \frac{a + b\cos x}{a - b\cos x}\, dx$. (3 p.)

Grunert (J.-A.). — *Sur l'équilibre entre trois forces.* (12 p.)

Grunert (J.-A.) — *Sur l'équilibre entre quatre forces agissant dans un même plan.* (18 p.)

Kudelka (J.). — *Introduction de la Trigonométrie sphérique dans l'Optique.* (5 p.)

Külp. — *Études expérimentales de magnétisme* (2e Partie). (24 p.)

Dostor (G.). — *Propriétés des coniques relatives aux tangentes issues d'un même point. — Surface du quadrilatère compris entre deux tangentes menées du point* (x, y) *à une conique à centre, et les deux droites qui joignent le centre aux points de contact. — Propriété particulière de la parabole, relativement aux tangentes issues d'un même point. — Surface du triangle compris entre les deux droites qui joignent un point quelconque du plan à deux points arbitraires de la parabole.* (13 p.; fr.)

Ligowski. — *Sur la réduction des distances lunaires. — Détermination de la distance au moyen de la tangente de la demi-distance. — Remarques diverses sur la réduction des distances lunaires.* (2 art.; 13 p.)

Ces articles se rapportent, comme un précédent travail de l'auteur [1], au calcul pratique des distances lunaires au moyen des petites Tables de logarithmes, dont l'usage est à la fois plus sûr et plus expéditif que celui des grandes Tables, indiqué par la plupart de nos Traités de navigation.

Ligowski. — *Solution approximative de ce problème : Au*

[1] Voir *Bulletin*, t. I, p. 280.

moyen de deux hauteurs d'une étoile et du temps écoulé entre les deux observations, déterminer la latitude et le temps (Problème de Douwes). (3 p.)

LIGOWSKI. — *Calcul des distances en mer.* (2 p.)

LINDMAN (Chr.-Fr.). — *Quelques formules goniométriques.* (5 p.; lat.)

SPITZER (S.). — *Intégration de l'équation $y'' = x(xy' - ny)$, dans le cas où n est un nombre entier et positif.* (6 p.)

L'auteur indique diverses méthodes, suivant que le nombre n est de la forme $3k$, $3k+1$, ou $3k+2$.

BERMANN. — *Démonstration de deux théorèmes de Steiner.* (8 p.)

Voici les énoncés de ces théorèmes :

1° Si une surface du second degré coupe les trois axes rectangulaires des coordonnées en des points ayant pour coordonnées x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2, on a, lorsque les axes se transportent parallèlement à eux-mêmes,

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2}\right)^2 + \left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}\right)^2 = \text{const.}$$

2° Si les trois diagonales d'un octaèdre se coupent à angles droits en un même point, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les huit faces seront sur une même sphère.

HOCHHEIM (A.). — *Sur la surface gauche $z = \dfrac{Ay^2}{x^2}$.* (14 p.)

ANDRES. — *Calcul des coordonnées géodésiques et de la position géographique des sommets des triangles, fondé sur les formules sphéroïdiques de transformation de Bessel.* (14 p.)

Au lieu de se servir, comme on le fait habituellement, des formules approximatives données par Oriani en 1807, l'auteur emploie les formules rigoureuses de transformation de Bessel, ce qui simplifie considérablement l'exposition de la théorie, en donnant des résultats plus exacts. L'exposition de la formule est suivie d'applications numériques.

Spitzer (S). — *Intégration de l'équation différentielle linéaire*

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$$

n étant un nombre entier et positif, plus grand que 2, *et* A, B, C *des nombres constants.* (5 p.)

Grunert (J.-A.). — *Expression de l'aire de l'ellipse au moyen des coefficients de son équation générale en coordonnées, soit cartésiennes, soit trilinéaires.* (5 p.)

Grunert (J.-A.). — *Les théorèmes généraux de Pascal, de Desargues, de Pappus, de Carnot et de Chasles, développés en se fondant sur le système des coordonnées trimétriques ou trilinéaires.* (48 p.)

Grunert (J.-A.). — *Théorie générale des tangentes, des normales et du cercle de courbure des courbes, fondée sur le système des coordonnées trimétriques ou trilinéaires. Les théorèmes de Brianchon et de Chasles sur les tangentes aux coniques établis au moyen du même système de coordonnées.* (39 p.)

Grunert (J.-A.). — *Sur une expression de la surface d'un polyèdre d'un nombre quelconque de faces.* (6 p.)

Démonstration élémentaire d'une formule établie d'une autre manière par M. Lindelöf, dans le *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg* [1].

Hoza (F.). — *Représentation graphique de l'orbite apparente du Soleil dans le ciel.* (6 p.)

Versluys (J.). — *Application de déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie analytique.* (50 p.; fr.)

1° Résultante d'un système de $n-1$ équations du premier degré et de 1 équation du second degré. — 2° Équations en coordonnées ordinaires, trilinéaires et tangentielles d'une conique, dans tous les cas où la courbe est déterminée *uniformément.* — 3° Condition pour que 6 éléments simples appartiennent à une même conique, dans tous les cas où 5 de ces éléments déterminent uniformément la courbe. — 4° Équations en coordonnées ordinaires, quadripla-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 242.

naires et planaires d'une surface de second degré, dans tous les cas où elle est uniformément déterminée. — 5° Condition pour que 10 éléments simples appartiennent à une même surface du second degré, dans tous les cas où 9 de ces éléments déterminent uniformément la surface.

HOZA (F.). — *Description d'un appareil pour rendre sensible aux yeux l'enseignement de la Géométrie descriptive.* (3 p.)

ALBRICH (C.). — *Relations harmoniques dans la réflexion et la réfraction de la lumière.* (2 p.)

GRUNERT (J.-A.). — *Le système des coordonnées tétraédriques ou quadriplanaires développé analytiquement d'une manière générale.* (124 p.)

GRUNERT (J.-A.). — *Expression de l'aire d'un triangle plan quelconque dans l'espace et du volume d'un tétraèdre quelconque dans l'espace, au moyen des coordonnées cartésiennes et des coordonnées tétraédriques ou quadriplanaires des sommets.* (27 p.)

Dans ce Mémoire, comme dans le précédent, l'auteur a évité, à dessein, l'emploi de la notation des déterminants, convaincu que les calculs développés tout au long sont d'une plus grande clarté, même dans les cas compliqués.

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur le triangle sphérique dans lequel un angle est égal à la somme des deux autres.* (6 p.)

Ce triangle présente des propriétés analogues à celles du triangle rectangle plan, qui en est le cas-limite. On a, par exemple, entre les trois côtés, la relation

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}b = \sin^2 \tfrac{1}{2}c.$$

ANNALI DELLE UNIVERSITÀ TOSCANE [1].

T. XI, 1869.

DINI (U.). — *Sur les surfaces qui ont un système de lignes de courbures planes.* (39 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 21.

Dans un Mémoire [1], publié précédemment, l'auteur avait donné des formules relatives à la sphère et aux surfaces qui ont un système de lignes de courbures planes, et il était ainsi parvenu à trouver celles de ces surfaces qui sont de courbure constante et à traiter aussi d'autres problèmes. Dans le Mémoire actuel, il donne d'autres formules qui peuvent être considérées comme relatives tant à la sphère qu'aux surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes et non géodésiques, et n'ont pas leurs plans parallèles à une droite fixe. Il montre ensuite comment, avec ces formules et celles du précédent Mémoire, on peut déterminer complétement les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes et ont leurs plans tous également inclinés sur une droite fixe; puis, en particulier, les surfaces de cette classe dans lesquelles les plans en question jouissent aussi de la propriété de couper tous la surface sous un même angle, différent de $\frac{\pi}{2}$. Il présente après cela quelques autres observations générales, qui font voir comment on peut déterminer encore toutes les surfaces où les lignes de courbure d'un système sont planes et non géodésiques, leurs plans coupant la surface sous un même angle. Enfin, en combinant les résultats de ces deux Mémoires, et appliquant un théorème de M. Weingarten, il détermine la surface dont les lignes de courbure d'un système sont planes et dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre.

Dini (U.). — *Note sur quelques formules de Trigonométrie sphéroïdique.* (13 p.)

L'objet de cette Note est d'établir d'une manière simple, en partant des équations des lignes géodésiques de l'ellipsoïde de révolution, les formules employées par Delambre et par les ingénieurs-géographes français, pour le calcul des coordonnées géographiques des sommets d'un réseau géodésique et de la longueur de l'arc de méridien compris entre les parallèles des extrémités d'un des côtés du réseau. Il démontre en même temps quelques autres formules qui, soit par les observations auxquelles elles donnent lieu, soit par la forme qu'elles présentent, peuvent être utiles dans les calculs en question.

---

(1) *Ricerche sopra la teoria delle superficie* (*Atti della Società italiana delle Scienze*, Ser. III, t. II, p. 1).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publié par J. LIOUVILLE (¹).

Tome XVII, 2ᵉ série; 1872.

LAGUERRE. — *Mémoire de Géométrie analytique.* (54 p.)

Le titre du Mémoire n'est pas très-explicatif; mais il est facile d'indiquer le point de départ et le principe de démonstration adoptés par l'auteur.

Dans la première Section, M. Laguerre définit ce qu'il entend par *équation mixte* d'une courbe. Soient x, y les coordonnées d'un point quelconque du plan, k une arbitraire; l'équation

$$f(y-kx)=0, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$A_0(y-kx)^m + A_1(y-kx)^{m-1} + \ldots + A_{m-1}(y-kx) + A_m = 0,$$

où A_0, A_1, $A_2, \ldots$, A_m sont des fonctions du paramètre k, est, d'après M. Laguerre, l'*équation mixte* d'une courbe.

Voici comment les choses peuvent se comprendre :

Si l'on attribue à x, y des valeurs déterminées x_0, y_0, l'équation (1) fournit un certain nombre de valeurs pour k, n par exemple; si k_0 est une de ces valeurs, l'équation (1), où l'on fera $k=k_0$, sera vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de la droite $y-y_0=k_0(x-x_0)$; de sorte que l'équation (1) peut être considérée comme définissant un *système plan* de rayons. Si l'on égale à zéro le discriminant de l'équation (1), en regardant k comme l'inconnue, on obtiendra une équation telle que $\varphi(x,y)=0$, laquelle représentera le lieu des points (x,y) pour lesquels, parmi les n rayons qui en sont issus, deux coïncident; on aura ainsi une courbe qu'on pourrait appeler la *courbe focale* du système de rayons défini par l'équation (1). On peut dire aussi que l'équation (1) définit cette courbe, puisqu'elle détermine les tangentes qu'on peut lui mener d'un point quelconque du plan; c'est là le sens adopté par M. Laguerre.

(¹) Voir *Bulletin*, t. I, p. 91.

Si l'on remplace k par $\frac{\lambda}{\mu}$, on obtient une équation de la forme

$$(2) \qquad f(\lambda, \mu) = 0, \quad \text{ou} \quad F(\lambda, \mu, \lambda y - \mu x) = 0,$$

dont le premier membre est homogène en λ et μ, et homogène également par rapport aux trois quantités λ, μ $\lambda y - \mu x$; c'est l'*équation mixte* d'une courbe. C'est ce qui constitue le point de départ de l'auteur.

Quant au principe de démonstration, voici en quoi il consiste :

Les premiers membres des équations mixtes sont des formes binaires par rapport à λ et μ ; elles donnent lieu à des invariants et à des covariants ; ce sont ces formes caractéristiques que M. Laguerre utilise pour en déduire des propriétés essentielles des courbes qu'il étudie. Ce Mémoire offre donc une application de la théorie des formes invariantes à la Géométrie.

Toutes les déductions de l'auteur reposent sur la connaissance des invariants et des covariants des formes qu'il emploie, et sur l'application du théorème fondamental suivant, qu'il établit dans la première Section de son Mémoire :

Soit un nombre quelconque de courbes représentées par les équations mixtes

$$f_0(\lambda, \mu) = 0, \quad f_1(\lambda, \mu) = 0, \quad f_2(\lambda, \mu) = 0, \ldots ;$$

si l'on considère un invariant quelconque I *des formes* f_0, f_1, $f_2, \ldots$, *l'équation* $\mathrm{I} = 0$ *représente une courbe dont le degré est précisément égal au poids de l'invariant.*

On sait que, s'il s'agit d'une seule forme binaire, par exemple, si n est le degré du quantic, si θ est le degré de l'invariant ou du covariant par rapport aux coefficients du quantic, et que p soit le degré du covariant par rapport aux variables, le poids de l'invariant est $\frac{1}{2}n\theta$ et celui du covariant est $\frac{1}{2}(n\theta + p)$ (1).

Cela établi, les titres des Sections indiqueront suffisamment les questions dont l'auteur s'est occupé.

Section I. — *Équation mixte d'une courbe.*

Section II. — *Propriétés des courbes de 3e classe.*

Section III. — *Propriétés des courbes de 4e classe.*

---

(1) Salmon, *Higher Algebra*, p. 113, 116, édit. 1866.

Boussinesq (J.). — *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond.* (53 p.)

Après avoir très-nettement décrit les phénomènes observés par J. Scott Russell (observations faites en 1843 et publiées en 1845) et M. Bazin [1], M. Boussinesq les résume ainsi : les uns, dans lesquels le rapport de la hauteur des intumescences à la profondeur primitive est une petite quantité en valeur absolue, sont régis par des lois simples; les autres, dans lesquels ce rapport approche de l'unité, obéissent à des lois bien plus compliquées, encore inconnues, et ne paraissent pas même compatibles avec la parfaite continuité du fluide et surtout de ses mouvements, puisqu'il s'y produit fréquemment des mascarets.

L'auteur ajoute : « Je me propose de donner ici une théorie à peu près complète des premiers, en me bornant au cas d'un liquide en repos, cas auquel se ramène celui d'un liquide en mouvement, et en prenant pour point de départ de mon analyse le caractère qui les distingue essentiellement des autres mouvements ondulatoires des liquides : ce caractère consiste en ce que les vitesses horizontales des molécules fluides y sont sensiblement égales dans toute l'étendue d'une même section normale du canal. »

L'Introduction du Mémoire, un peu trop longue pour que nous puissions la reproduire ici, résume d'ailleurs fort complétement les résultats que M. Boussinesq a déduits de son analyse.

Le Mémoire est divisé en plusieurs Paragraphes dont voici les titres :

§ I. Équations fondamentales..

§ II. Vitesses de propagation des diverses parties d'une intumescence.

§ III. Mouvement du centre de gravité d'une onde. Quantités constantes qui caractérisent chaque intumescence.

§ IV. Onde solitaire.

§ V. Moment d'instabilité d'une intumescence quelconque. Stabilité de l'onde solitaire et cause de sa formation fréquente.

---

(1) *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 1863, p. 312.

§ VI. Examen des cas où l'intumescence n'est pas une onde solitaire.

Mannheim (A.). — *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie des surfaces.* (57 p.)

L'étude des systèmes de rayons (ou *congruences* de droites) peut être faite à deux points de vue : il y a ce qu'on pourrait appeler la *Géométrie infinitésimale* des systèmes de rayons, inaugurée surtout par Hamilton ([1]), continuée par Kummer, dans un beau Mémoire analytique ([2]). Dans cette Géométrie, on considère un des rayons du système et tous ceux qui lui sont infiniment voisins et qui forment ce qu'on appelle un *pinceau* de droites, et l'on étudie les propriétés de ces pinceaux, sans avoir égard à l'ordre et à la classe du système de rayons.

Il y a, en second lieu, la *Géométrie finie* des systèmes de rayons, où l'on considère l'ensemble de tous les rayons d'un système d'ordre et classe déterminés, et où l'on étudie les propriétés finies du système; Kummer s'est également occupé de ce genre de recherches, et, dans un Mémoire remarquable ([3]), il a fait une étude approfondie des systèmes de rayons du premier et du second ordre; plusieurs géomètres, entre autres Plücker et Möbius, ont enrichi cette partie de la Géométrie.

Dans le Mémoire actuel, M. Mannheim s'occupe de la Géométrie infinitésimale des systèmes de rayons, pour en faire la base d'une théorie géométrique de la courbure des surfaces.

Dans le premier Paragraphe, l'auteur rappelle la notion de la *droite auxiliaire,* conception qu'il avait déjà introduite en 1864 ([4]), pour l'étude des surfaces réglées; c'est là l'*instrument* de ses démonstrations.

Dans le deuxième Paragraphe, il démontre, d'une manière intuitive, les théorèmes, sur les *pinceaux des droites,* dus à Malus, Sturm, Hamilton, Kummer, et ajoute plusieurs propositions nouvelles.

([1]) *Transactions of the Royal Irish Academy*, t. XVI.

([2]) *Journal de Borchardt*, t. 57, ou *Nouvelles Annales*, années 1860, 1861, 1862, trad. par Dewulf.

([3]) Académie des Sciences de Berlin, 1866.

([4]) *Bulletin de la Société Philomathique,* séance du 2 avril.

En terminant son Mémoire sur les pinceaux de droites, Kummer s'attache, comme le fait remarquer M. Mannheim, à montrer la relation intime qui existe entre l'étude des systèmes de rayons et la théorie de la courbure des surfaces.

Cette étude est l'objet du troisième Paragraphe; l'auteur est ainsi amené, non-seulement à de nombreux résultats dus à MM. Joachimsthal, Bertrand, Bonnet, Lamarle, Catalan, etc., mais aussi à des propriétés qui n'avaient pas été signalées.

Boussinesq (J.). — *Sur les lois qui régissent, à une première approximation, les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque.* (10 p.)

Voici la partie principale des conclusions de l'auteur :

« Quand on fait abstraction des pouvoirs dispersif et rotatoire, la constitution optique d'un milieu transparent est géométriquement définie au moyen d'un ellipsoïde, dit d'*élasticité*, et d'une droite de longueur donnée, ou axe de non-symétrie, que l'on doit concevoir menée, à partir du centre de l'ellipsoïde, dans une direction donnée également. Le milieu peut propager, parallèlement à un plan diamétral quelconque de l'ellipsoïde, deux systèmes d'ondes planes à vibrations quasi transversales.... »

Painvin (L.). — *Détermination de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles.* (42 p.)

Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 juillet 1870.

Painvin (L.). — *Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle.* (30 p.)

Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 2 octobre 1871.

Les titres de ces deux Mémoires indiquent suffisamment l'objet des recherches de l'auteur; les formules qu'il a obtenues, formules qui n'avaient pas encore été données, peuvent être utiles dans un grand nombre de circonstances.