BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 353-367

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__353_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

VASSAL (le major Vladimir), ex-ingénieur. — NOUVELLES TABLES DONNANT AVEC CINQ DÉCIMALES LES LOGARITHMES VULGAIRES ET NATURELS DES NOMBRES DE 1 A 10800, ET DES FONCTIONS CIRCULAIRES ET HYPERBOLIQUES POUR TOUS LES DEGRÉS DU QUART DE CERCLE DE MINUTE EN MINUTE. — Paris, Gauthier-Villars, 1872. 1 vol. in-4°, LVI-196 p. Prix : 12 fr.

Le volume que nous avons sous les yeux est le résultat d'un long et consciencieux travail, pour lequel l'auteur n'a reculé devant aucun sacrifice, celui même de sa vue. M. Vassal s'est proposé, dit-il dans sa Préface, de combler les lacunes que présentent, suivant lui, les Tables publiées en France jusqu'à ce jour, lacunes qui consistent : 1° en ce que ces Tables n'indiquent pas les cas où le dernier chiffre d'un nombre tabulaire a dû être *forcé;* 2° en ce qu'on y accorde trop peu de place aux logarithmes naturels ou hyperboliques; 3° en ce qu'on n'a « absolument rien fait » pour faciliter et répandre l'usage des fonctions hyperboliques. Examinons ce qu'il peut y avoir de fondé dans ces trois reproches généraux.

1° Depuis la publication des Tables de Babbage (1831), on a reconnu que l'erreur nécessaire des Tables logarithmiques peut (théoriquement) être diminuée de moitié, si l'on distingue au moyen d'un signe quelconque les logarithmes dont le dernier chiffre est *forcé* [1]. Si l'on tient compte cependant du surcroît de calculs que nécessite alors l'interpolation, on voit sans peine qu'il est beaucoup plus simple et plus expéditif d'opérer à la manière ordinaire, avec des Tables donnant une décimale de plus, et que l'on obtient ainsi, en moins de temps, une approximation plus sûre. L'utilité de l'indication des chiffres forcés se réduit donc, en réalité, à ceci : que, si l'on veut prendre la moitié d'un logarithme terminé par un

---

[1] *Voir,* par exemple, l'*Introduction* des *Tables* de Schrön.

chiffre impair, on sait s'il faut ou non forcer le dernier chiffre du quotient pour obtenir le résultat à moins d'une demi-unité près; de même pour le cas où l'on doit supprimer, à la fin d'un logarithme, un ou plusieurs chiffres formant l'un des nombres 5, 50, 500,....

2° L'usage des logarithmes naturels offre un tout autre caractère que celui des logarithmes décimaux. Ceux-ci ne constituent, à proprement parler, qu'un système d'écriture spécial pour représenter les nombres, système dont l'avantage est d'abaisser d'un degré l'ordre de difficulté des opérations de l'Arithmétique; et une Table de logarithmes vulgaires n'est qu'une sorte de dictionnaire servant à passer d'un système d'écriture à l'autre. Les logarithmes naturels, au contraire, se présentent dans l'Analyse comme des fonctions jouant un rôle propre, et leur importance est de tout point analogue à celle des valeurs naturelles des fonctions exponentielles, circulaires, hyperboliques, eulériennes, etc. En un mot, les logarithmes décimaux appartiennent à l'art du calcul numérique; les logarithmes naturels, à la science analytique. Les applications de ces derniers doivent donc être beaucoup plus restreintes que celles des premiers, et il est inexact de les assimiler sous le rapport de l'usage pratique, de même qu'il est inopportun de donner aux deux Tables correspondantes la même extension. Cette assimilation est d'autant plus fâcheuse dans l'Ouvrage actuel que l'auteur s'est cru obligé, par la symétrie, de conserver les caractéristiques des logarithmes décimaux, ce qui n'est pas seulement une superfluité, mais encore une gêne et une source d'erreurs pour le calculateur. Par contre, l'auteur a omis l'utile précaution de répéter, dans chaque ensemble de deux pages en regard, les logarithmes naturels des puissances positives et négatives de 10, qui jouent, dans le calcul des logarithmes naturels, le même rôle que les caractéristiques pour les logarithmes décimaux, et qui sont indispensables pour la recherche du logarithme naturel d'un nombre pris en dehors des limites de la Table.

3° M. Vassal avait cru d'abord pouvoir affirmer qu'avant 1872 la France ne possédait aucun Recueil de Tables de fonctions hyperboliques. Depuis l'impression de son Ouvrage, il a reconnu que son assertion était trop absolue, et il a signalé à ses lecteurs, dans une Note rectificative, placée à la fin du volume, l'existence de Tables du même genre, à *quatre* décimales seulement, publiées il y a quelques années par l'auteur de cet article (¹).

Le volume commence par une *Introduction*, suivie d'un Recueil de *Formules relatives aux logarithmes et fonctions hyperboliques et circulaires, ainsi qu'à la résolution des triangles rectilignes et sphériques.*

L'Introduction se divise en sept Chapitres. L'auteur expose d'abord ses notations, dont quelques-unes ne nous ont pas semblé heureusement choisies. L'emploi des caractères *égyptiens* dans la désignation des logarithmes et des fonctions hyperboliques fatigue notablement la vue. On s'habituera difficilement à représenter par **loh** et par **Lov** les logarithmes hyperboliques et les logarithmes vulgaires, tandis que les lettres l et L seront employées (suivant la notation de Gudermann) pour représenter les fonctions, inverses l'une de l'autre,

$$\mathrm{l}\,u = v = 2\,\mathrm{arc\,tang}\,e^u - \frac{\pi}{2},\quad \mathrm{L}\,v = u = \log\mathrm{tang}\left(\frac{v}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Les Chapitres suivants traitent des précautions à prendre pour obtenir toute l'approximation que permet d'atteindre l'indication des derniers chiffres *forcés*, et de la résolution par les fonctions circulaires et hyperboliques des équations du 2ᵉ et du 3ᵉ degré.

Le Recueil de formules se divise en cinq sections, dont les titres sont : I. Notation et formules d'interpolation. II. Formules relatives aux logarithmes naturels et aux fonctions exponentielles, circulaires et hyperboliques. III. Résolution des triangles rectilignes. IV. Résolution des triangles sphériques. V. Formules diverses. L'auteur a mis en évidence, autant que cela a été possible, le parallélisme entre les formules relatives aux fonctions circulaires et aux fonctions hyperboliques.

Viennent ensuite les quatre Tables qui forment le corps de l'Ouvrage.

La Table I donne, pour les 10800 premiers nombres, les logarithmes décimaux et les logarithmes naturels. Elle est disposée à simple entrée, chaque tiers de page contenant les logarithmes de

(¹) *Recueil de formules et de Tables numériques*, par J. Hoüel. — Paris, Gauthier-Villars, 1866. Gr. in-8°, LXX-64 p.

60 nombres, avec l'évaluation en degrés et minutes de ces nombres, considérés comme représentant des secondes, et avec les différences tabulaires. L'auteur n'a point inséré les parties proportionnelles des différences, qui sont, en effet, inutiles pour quiconque sait manier une règle à calcul. Il nous semble seulement que les trois tiers de chaque page ne sont pas assez distinctement séparés, et que la clarté a été un peu sacrifiée à l'élégance typographique.

A la suite de la Table I sont deux pages de Tables auxiliaires, contenant : 1° le tableau des nombres de la forme $2^k 5^m 89^n$, jusqu'à 1000000; 2° les logarithmes vulgaires à 10 décimales des factorielles $1.2\ldots n$, $1.3\ldots(2n-1)$, et des nombres nécessaires pour les calculs d'intérêts; 3° les racines carrées et cubiques des nombres premiers jusqu'à 83; 4° les 10 premiers multiples de log. vulg. e, de e, de $\frac{1}{e}$, et les 10 premières puissances de $\frac{1}{e}$ et de 7; 5° la Table abrégée de Briggs pour le calcul des logarithmes vulgaires et naturels à 10 décimales.

Les Tables II, III et IV, relatives aux fonctions circulaires et hyperboliques, sont disposées suivant un plan uniforme. Elles sont à deux arguments, comme les Tables trigonométriques ordinaires. Seulement chacun des deux arguments, à gauche et à droite, est double lui-même, l'une de ses valeurs étant l'arc x auquel se rapportent les nombres tabulaires considérés comme fonctions circulaires, l'autre étant la fonction $\mathrm{L}x = \log\operatorname{tang}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ à laquelle se rapportent les mêmes nombres considérés comme fonctions hyperboliques. Les arcs sont évalués, dans les Tables II et III, en degrés et minutes; dans la Table IV, en *grades* (centièmes du quadrant) et fractions décimales du grade. Dans les trois Tables, une colonne additionnelle contient les valeurs des mêmes arcs en parties du rayon. La Table II donne les valeurs *naturelles* des fonctions circulaires et hyperboliques; les Tables III et IV donnent leurs valeurs logarithmiques.

Nous ne pouvons que féliciter l'auteur de son heureuse idée de publier, le premier, une Table trigonométrique à cinq figures, construite suivant la division décimale du quadrant. Seulement cette Table pèche par les mêmes défauts de détails que les Tables publiées précédemment dans le même système, et ces défauts en rendent l'usage aussi laborieux que celui des Tables sexagésimales, qui sont généralement mieux ordonnées. Nous regrettons d'abord que M. Vassal ait contribué à faire revivre la malheureuse dénomination de *grade*, sorte de demi-mesure, destinée, croyait-on, à faciliter le passage de l'ancienne division à la *nouvelle*, et qui précisément donne à la division décimale l'apparence d'une division *artificielle* comme l'ancienne, et la fait participer aux mêmes inconvénients. On devrait bien reconnaître une bonne fois que l'unité angulaire *naturelle* est l'angle droit, que sa division décimale n'est pas plus *nouvelle* que l'arithmétique décimale elle-même, d'après laquelle toutes les autres unités ont été divisées, et que l'exception que l'on fait à la règle générale en choisissant pour unité le *centième* du quadrant ne fait que compliquer l'écriture, en même temps qu'elle expose le calculateur à une confusion entre les *degrés modernes* et les *degrés anciens*.

Un autre inconvénient de la Table de M. Vassal, c'est d'avoir fait varier, à partir de $0^q,0700$, l'argument par des intervalles de $0^q,0002$, puis de $0^q,0005$, qui introduisent des facteurs très-incommodes pour l'interpolation, parce qu'ils obligent à faire une règle de trois complète, au lieu d'une seule opération de multiplication ou de division. Cet inconvénient devient surtout sensible lorsqu'on doit revenir de la fonction circulaire à l'arc, et il faut l'éviter avec soin dans les Tables destinées aux calculs rapides.

Aux Tables II et III sont annexés des tableaux de conversion et des tables d'interpolation pour les fonctions des petits angles.

Nous n'avons pu naturellement nous renseigner encore sur la correction typographique de ce Recueil. Dans l'examen rapide auquel nous nous sommes livré, nous avons rencontré deux fautes :

Page v, ligne 9 en remontant, *au lieu de* Brigg, *lisez* Briggs.

Page 121, log. tang. $6°45'$, *au lieu de* 1,97320, *lisez* 1,07320.

On voit, par la description que nous venons de faire de ce remarquable Ouvrage, quels nouveaux secours il offre aux calculateurs. Si nous sommes entré dans des détails critiques aussi minutieux, c'est dans l'espoir qu'en corrigeant des défauts, qu'il serait généralement aisé de faire disparaître, ce Livre, dans une nouvelle édition, pourra devenir le plus beau Recueil de Tables à cinq décimales qui ait encore paru. J. H.

FRIIS (F.-R.). — Tyge Brahe. En historisk Fremstilling efter trykte og otrykte Kilder. Med Tyge Brahes Portræt og flere Træsnit i Texten. — Kjöbenhavn. Forlagt af den Gyldendalske Boghandel, 1871 (¹).

Quoique l'on ait déjà beaucoup écrit sur la vie du grand astronome danois, bien des points de sa biographie présentaient encore des obscurités ou des lacunes. M. Friis a repris les travaux de ses prédécesseurs, relatifs à cette époque, si glorieuse pour le Danemark et si importante pour l'histoire de l'Astronomie. Il a consulté les manuscrits de Tycho que possède la ville de Copenhague, les archives publiques et tous les Recueils danois ou allemands où il est question de Tycho. De plus, une mission du gouvernement danois lui a permis de poursuivre ses recherches dans les bibliothèques de Vienne et de Prague, et de visiter les lieux où le grand observateur a passé ses dernières années.

L'Ouvrage se divise naturellement en quatre Parties.

La première, intitulée : *La jeunesse de Tycho Brahe,* comprend la première période de sa vie jusqu'à l'époque où le roi Frédéric II le décida à se fixer en Danemark, en lui faisant don de l'île de Hveen.

La deuxième Partie, *Tycho Brahe à Hveen,* renferme l'historique de la vie et des travaux de Tycho, depuis son installation à Hveen, en 1576, jusqu'à son départ de cette île, en 1597. L'auteur y donne, d'après les Ouvrages mêmes de Tycho, la description et la carte de l'île de Hveen, telle qu'elle était au XVIᵉ siècle, les plans et les dessins du célèbre château d'Uraniborg et des autres constructions que Tycho avait fait exécuter dans son domaine.

La troisième Partie a pour titre : *Tycho Brahe dans l'exil.* Elle contient l'histoire de ses pérégrinations, depuis le jour où il dut quitter sa patrie jusqu'à celui où il se fixa à Prague, en 1599.

La quatrième Partie, *Tycho Brahe en Bohême,* commence par un tableau très-intéressant de la cour de l'empereur Rodolphe II et

(¹) Friis (F.-R.). *Tycho Brahe.* Etude historique d'après les sources imprimees et manuscrites, avec le portrait de Tycho Brahe et plusieurs gravures sur bois dans le texte. — Copenhague, librairie Gyldendal, 1871. — 1 vol. in-8°; 386 p. Pr. : 2 Rd. 48 Sk.

du caractère bizarre de ce prince. Après quelques mois de séjour à Prague, Tycho obtint de l'empereur d'habiter le château de Benatky, où il installa son observatoire. C'est là qu'il fit venir Kepler, chassé de Gratz par les persécutions religieuses. Au bout d'un an de séjour, Tycho, s'ennuyant de son isolement, retourna à Prague, où il mourut quelques mois après, le 24 octobre 1601.

Un cinquième Chapitre, intitulé : *Conclusion*, nous donne tous les renseignements qu'il a été possible de recueillir sur le sort de la famille de Tycho et sur le précieux héritage qu'il laissait en manuscrits et en instruments. Tous les instruments ont péri dans les guerres et les incendies, sans qu'il ait été permis même à Kepler de s'en servir. Heureusement il n'en a pas été de même des manuscrits, d'où Kepler a tiré ses immortelles découvertes, et qui ont été imprimés, pour la plupart, à des époques très-diverses [1].

Ce volume est terminé par un recueil de pièces justificatives, et par l'indication des sources consultées par l'auteur.

M. Friis a rectifié, dans son intéressant et savant travail, un certain nombre de détails inexacts, accrédités avant lui par les biographes de Tycho. Citons-en quelques exemples.

Le véritable prénom de l'illustre astronome est Tyge (prononcez *Tughé*); c'est ainsi qu'il signait toutes les fois qu'il écrivait dans sa langue maternelle; il signait Tycho dans ses correspondances en latin ou en allemand. A ce prénom il joignait le surnom d'Ottesen (fils d'Otto). Son nom de famille était Brahe (ou Brade, comme on l'écrivait quelquefois), et non *de* Brahé ou *von* Brahe, comme l'ont répété ses biographes, sur la foi sans doute de Philander von Weistritz (pseudonyme de Christian Gottlob Mengel), qui a fait paraître une histoire de Tycho en 1756. La distinction nobiliaire s'indiquait par l'addition au nom de famille du nom du fief patrimonial. Ainsi le nom complet de Tycho était *Tyge Brahe til Knudstrup*. Après qu'il eut vendu, en 1594, à son frère puîné Steen Brahe, sa portion de la seigneurie de Knudstrup (*Knudstrup Gaard*), il retint dans le marché le droit de conserver pour lui et ses descendants l'appellation de *til Knudstrup*.

Relativement aux causes de la disgrâce de Tycho, elles ne sont pas

---

(1) M. Friis a publié à Copenhague, en 1867, les observations de Tycho sur sept comètes.

aussi simples qu'on le croit généralement, et n'ont pas pour unique origine sa querelle légendaire avec Christoffer Valkendorf til Glorup, au sujet des chiens dont le roi Jacques VI avait fait présent à Tycho, lorsqu'il était venu, en 1590, visiter l'île de Hveen. Bien que Valkendorf ne fût pas en très-bons termes avec le grand astronome, il s'en faut de beaucoup cependant qu'il fût son ennemi le plus acharné, et il est loin d'avoir mérité la violente apostrophe par laquelle Lalande (¹) et après lui Laplace (²) ont voué l'infortuné *rigshovmester* de Christian IV à l'exécration de la postérité. La noblesse danoise n'avait jamais pardonné complétement à Tycho de s'être mésallié avec une roturière et de s'être adonné aux Sciences, surtout d'avoir fait imprimer ses travaux. Cependant la faveur dont le roi Frédéric II entourait son astronome (³) avait réduit ces griefs au silence, tandis que d'autre part elle devait exciter de nombreuses et sourdes jalousies, qui éclatèrent après la mort du roi (1588). Tycho, de son côté, n'était pas sans reproche. Sa dureté envers ses vassaux lui avait attiré de scandaleux procès, où la justice avait dû prononcer contre lui. Pendant la minorité du jeune roi, les amis influents qu'il avait dans le Conseil de régence ajournèrent de quelques années la catastrophe; mais le retentissement qu'eut la querelle de Tycho avec son ancien disciple Gellius Sascerides, à l'occasion de la rupture du mariage projeté entre celui-ci et Madeleine Brahe, fille aînée de Tycho, puis le long procès de Tycho avec son tenancier Rasmus Pedersen, servirent à ses ennemis d'occasion pour faire circuler sur lui toute sorte de calomnies, contre lesquelles ses anciens amis n'étaient plus là pour le défendre. A la majorité du roi, les nouveaux grands dignitaires de l'État, et particulièrement le chancelier Christian Friis til Borreby, lui firent supprimer ses pensions, lui enlevèrent successivement tous les bénéfices que lui avait accordés le feu roi, et ne manquèrent pas, naturellement, de s'en pourvoir eux-mêmes. Tycho ne pouvait plus, avec sa seule fortune personnelle, maintenir son établissement d'Uraniborg, et sa possession même du fief de l'île de Hveen était sérieusement menacée.

(¹) *Astronomie*, 2ᵉ éd., t. I, p. 196.

(²) *Exposition du système du monde*, p. 406.

(³) Ou, si l'on veut, son astrologue; car Tycho, malgré sa foi chancelante dans l'astrologie, avait dû se résoudre à faire l'horoscope de tous les jeunes princes de la famille royale.

C'est alors qu'il prit le parti d'abandonner la magnifique résidence qu'il s'était créée, et, après un court séjour à Copenhague, d'aller chercher à l'étranger une nouvelle patrie. Plusieurs années auparavant, en confiant ses pressentiments à ses amis, il ajoutait déjà ce vers significatif :

Omne solum forti patria, et cœlum undique supra est!

Il ne put cependant jamais oublier son ingrat pays, dont le souvenir attrista les derniers moments de sa vie, au milieu de la généreuse hospitalité avec laquelle Rodolphe l'avait accueilli.

Nous recommandons vivement, à tous ceux qu'intéresse l'histoire des Sciences, la lecture du volume de M. Friis, qui n'offre pas une grande difficulté aux personnes familiarisées avec la langue allemande, dont le danois est si voisin. J. H.

BAUSCHINGER (J.). — Elemente der graphischen Statik. München, 1871. — 1 vol. in-4° avec Atlas. Prix : 3 Thlr. 10 Sgr.

Voici, d'après l'auteur, le but de la Statique graphique :

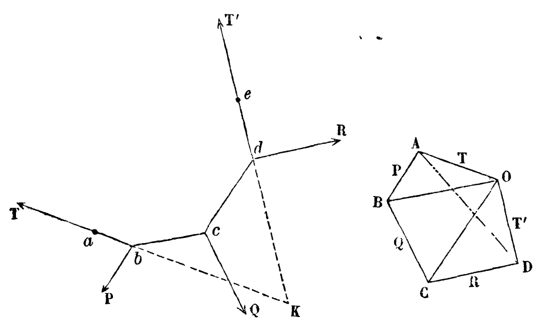
« La Statique, dit-il, enseigne la composition et la décomposition des forces qui agissent sur un corps ; de là elle déduit les conditions d'équilibre entre ces forces. La Statique graphique traite les mêmes problèmes, mais par une voie purement géométrique, au moyen de constructions qui opèrent en réalité sur le mode de représentation des forces comme sur de simples grandeurs dans l'espace. »

L'auteur considère la Statique graphique comme une science nouvelle ; il veut en faire une nouvelle méthode d'investigation ; il déclare que son but est « de coordonner la Statique graphique, d'y apporter un ordre méthodique, en dehors des applications, comme cela a été fait depuis longtemps pour la Statique en général et pour les autres branches de la Mécanique. »

L'auteur n'a donc point immédiatement en vue les applications. « Son livre, ajoute-t-il, donnera la préparation indispensable aux ingénieurs ou à tous ceux qui auront à faire des applications. »

La composition des forces est traitée à un point de vue nouveau. A la considération du polygone des forces, l'auteur joint celle d'un nouveau polygone, le polygone funiculaire : cette modification est le principal caractère de l'Ouvrage, sinon le fondement même de la Statique graphique. Le polygone funiculaire procure un moyen commode et expéditif pour construire graphiquement, en grandeur et en position, la résultante d'un nombre quelconque de forces situées dans un plan. Comme cette considération est la base de tous les procédés graphiques indiqués dans le courant de l'Ouvrage, je vais la résumer en quelques mots; elle semble avoir été déduite de la théorie du polygone funiculaire, et voici comment :

Considérons un polygone funiculaire en équilibre *abcde*; soit OABCDO le polygone des forces, et supposons les côtés du poly-



gone funiculaire parallèles aux lignes OA, OB, OC, OD. Il est clair, puisque les forces P, Q, R, T, T' se font équilibre, que la résultante des trois forces P, Q, R passe par le point de rencontre des forces T, T'.

De là résulte la construction indiquée par l'auteur :

Pour avoir la résultante d'un nombre quelconque de forces P, Q, R, situées dans un même plan, construisez le polygone des forces ABCD; la ligne AD, qui ferme le contour, est la résultante en grandeur et en direction. Prenez un point O arbitraire, mais convenablement choisi pour la commodité des constructions, et joignez OA, OB, OC, OD; puis, par un point quelconque *b* de la force P, menez *bc* parallèle à OB, jusqu'à la rencontre en *c* avec la force Q, puis *cd* parallèle à OC ; enfin, par les points extrêmes *b* et *d*, menez les lignes *ba*, *de*, parallèles à OA, OB; ces lignes se rencontrent en un point K, qui est un point de la résultante cherchée. La résultante est donc connue en grandeur et en position.

Le polygone *abcde* ainsi construit est appelé par l'auteur le polygone funiculaire relatif aux forces P, Q, R; le point O est le pôle du polygone funiculaire. Cette considération n'est pas nouvelle en Allemagne : on la trouve exposée dans la *Statique graphique* de Culmann. Comme je l'ai dit, c'est la base de toutes les constructions indiquées dans l'Ouvrage; mais cette considération semble encore avoir, au point de vue théorique, de grands avantages. Elle supprime toute distinction dans le cas des forces parallèles; ce cas rentre dans celui des forces concourantes. Elle permet d'énoncer les théorèmes relatifs à l'équilibre des forces dans un plan et ensuite dans l'espace, sans avoir recours à la considération des moments des forces. Le polygone funiculaire jouit par lui-même de propriétés intéressantes; dans certains cas, il devient courbe de pressions; c'est ainsi que l'auteur arrive à donner des propriétés importantes sur les différentes courbes de pression des voûtes provenant de différentes poussées à la clef.

Cette considération permet aussi de construire graphiquement, au moyen du polygone funiculaire, le moment résultant d'un système de forces par rapport à un point, de déterminer par des constructions graphiques le centre de gravité de certains profils, de construire l'ellipse d'inertie dans certains cas particuliers, etc.

L'ordre habituel de l'exposition de la Statique n'est pas altéré. Le Livre dont il s'agit est remarquable, au contraire, par une très-bonne exposition et un excellent ordre méthodique.

Les Chapitres I, II, III sont consacrés aux préliminaires et à l'étude des forces qui agissent sur un même point. Le Chapitre IV étudie la composition des forces dans un même plan, avec la nouvelle notion du polygone funiculaire; une application en est faite à l'étude d'une ferme en fer.

Le Chapitre V est consacré à l'étude des moments dans le plan; des applications sont faites à la poutre reposant sur deux appuis et à la ferme en fer précédemment étudiée. Le Chapitre VI traite des forces dans l'espace; on y retrouve la considération du polygone funiculaire s'appliquant aux projections des forces de l'espace sur trois plans coordonnés.

Le Chapitre VII traite le cas des forces parallèles. Le Chapitre VIII traite des centres de gravité.

Le Chapitre IX est consacré à l'étude des forces parallèles situées dans un même plan ; puis l'auteur applique les résultats obtenus à la poutre reposant sur deux appuis, en considérant les différentes manières dont cette poutre peut être chargée. Le Chapitre se termine par l'étude de la surcharge qui est produite sur un pont par une file de locomotives.

Le Chapitre X étudie les moments d'ordre supérieur et les moments d'inertie d'un système de forces parallèles, puis la surface d'inertie et les surfaces centrales d'inertie. Il y a ici un fait intéressant à signaler : les surfaces d'inertie sont définies par leurs équations aux plans tangents. Cette méthode nous semble avoir l'avantage de mettre immédiatement en évidence le rayon de gyration, sans qu'on soit obligé de passer par plusieurs théorèmes préliminaires.

Le Chapitre XI est consacré à l'étude des systèmes de forces parallèles, dont les intensités sont proportionnelles à la distance de leur point d'application à un plan. Le Livre se termine par la théorie de l'ellipsoïde central et du noyau des corps, de l'ellipse centrale et du noyau des sections planes.

Les géomètres allemands ont accordé à cette nouvelle science une telle importance, que déjà des cours de Statique graphique ont été fondés à Munich et dans les principales écoles de l'Allemagne. Bien qu'en France on n'ait pas attribué jusqu'ici la prépondérance aux constructions graphiques, il est bon cependant de remarquer que les ingénieurs français les appliquent dans un très-grand nombre de cas, par exemple, pour vérifier la stabilité des voûtes, de murs placés dans certaines conditions, etc.

Sans vouloir juger la nouvelle méthode, ni vouloir insister sur ce point que la nouvelle science se prive volontairement d'un auxiliaire aussi puissant que l'Analyse, sans vouloir décider *à priori* dans quelle proportion les constructions graphiques pourront se substituer aux calculs, on peut cependant, au point de vue pratique, présenter les observations suivantes :

Lorsque les ingénieurs ont une construction à établir, il faut que la méthode qui leur donne les dimensions des différentes parties de la construction soit susceptible d'une grande approximation, car ils ont à satisfaire à deux conditions contradictoires, maximum de sécurité, minimum de dépenses, et l'importance de ces conditions n'échappe à personne. Or jusqu'à quel point les procédés graphiques peuvent-ils donner l'approximation nécessaire? C'est aux ingénieurs à répondre à ce sujte.

Sans doute les calculs sont plus longs et plus pénibles que les constructions; mais on conviendra que, lorsque ces calculs sont répartis entre divers employés dont les opérations se contrôlent les unes les autres, on a une garantie de précision et d'exactitude que les constructions graphiques ne sauraient donner. Ajoutons aussi que les calculs sont singulièrement facilités par les Tables.

Enfin, dans cet Ouvrage, l'auteur s'est borné à des applications très-simples; son Livre, il est vrai, porte le titre d'*Éléments;* aussi, avant de juger la méthode au point de vue pratique, il faut attendre et savoir si elle s'appliquera aux questions les plus compliquées des constructions, comme les poutres à plusieurs travées, etc. L.

PUBLICATIONS NORVÉGIENNES.

LIE (S.). — Over en Classe geometriske Transformationer. I. — Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger, 1871. (p. 67-109.)

En dehors des transformations qui font correspondre un point à un point, il existe, comme on sait, une classe étendue de transformations géométriques qui font correspondre à des surfaces qui se touchent des surfaces ayant la même relation. Chaque transformation de ce genre, qu'on peut appeler, avec l'auteur, une transformation de contact, s'exprime par cinq équations entre x, y, z, p, q et X, Y, Z, P, Q (p, q, P, Q sont les dérivées de z, Z par rapport à x, y, X, Y respectivement). Si, entre ces cinq équations, on élimine p, q, P, Q, on obtient, suivant les cas, soit une, soit deux, soit trois équations entre les coordonnées x, y, z, X, Y, Z. Réciproquement, on sait que toute équation

$$F(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \tag{1}$$

que Plücker appelle une équation directrice, définit une transformation de contact, et l'on voit bien ici la nature de ces transformations. A chaque point (x, y, z) correspondent une infinité de points X, Y, Z, situés sur une surface représentée par l'équation (x), et quand le point (x, y, z) décrit une surface, la surface correspondante enveloppe une surface correspondant à la première.

On ne paraît pas, au contraire, avoir remarqué que deux équations

$$(2)\qquad F_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0,\quad F_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

définissent aussi une transformation de la nature des précédentes, en ce sens qu'à tous les points de l'une des figures correspondent dans l'autre des courbes en nombre triplement infini. Par suite, si un point de la première figure décrit une surface, la courbe correspondante enveloppe la surface correspondante. Et, d'après cela, on reconnaît que toute transformation de contact conduit soit à un nouveau système de coordonnées, soit à l'introduction, dans le sens de Plücker, d'une courbe nouvelle comme élément de l'espace. C'est à ce point que se rapportent quelques développements généraux sur la théorie des équations aux dérivées partielles.

Si les équations (2) sont linéaires, aussi bien par rapport à x, y, z que par rapport à X, Y, Z, alors les courbes de chaque figure qui correspondent aux points de l'autre sont les lignes droites d'un complexe.

Les formules de substitution

$$Zz = Zx - (X + iY),$$
$$(X - iY)z = Zy - Z$$

sont particulièrement importantes.

Si l'on considère les droites de l'espace (x, y, z) comme des cylindres infiniment petits, elles se transforment dans les sphères du deuxième espace, et de telle manière que deux droites qui se coupent se transforment en sphères qui se touchent. Il suit de là que les courbes asymptotiques d'une surface dans le premier espace se transforment dans les lignes de courbure de la surface correspondante du deuxième. On détermine ainsi les lignes asymptotiques de la surface de Kummer à seize points singuliers, en s'appuyant sur la détermination, faite par MM. Moutard et Darboux, des lignes de courbure des surfaces du 4[e] ordre à conique double. Si l'on soumet alors l'espace primitif (x, y, z) à une transformation homographique, la transformation correspondante du deuxième espace est la transformation de contact la plus générale, dans laquelle les lignes de courbure demeurent invariables. En s'appuyant sur ces développements, on établit un rapport fondamental entre la géométrie des lignes droites et celle des sphères, et par conséquent entre la géométrie projective et les relations métriques.

LIE (S.). — UEBER EINE CLASSE GEOMETRISCHER TRANSFORMATIONEN. II. — Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger, 1871. (p. 182-245.)

La deuxième partie du travail a pour but d'établir un lien entre les idées nouvelles introduites en Géométrie et les théories anciennes relatives aux équations aux différentielles partielles. Les équations pour lesquelles les caractéristiques sont les lignes asymptotiques ou les lignes de courbure, et une classe d'équations dont les caractéristiques sont les lignes géodésiques, sont comparées et transformées les unes dans les autres. Toutes les équations du 2^e ordre, dont les caractéristiques sont des lignes de courbure ou des lignes asymptotiques, et qui admettent des intégrales intermédiaires, sont étudiées et déterminées. L'auteur poursuit les recherches connues sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques, sur les surfaces ayant une représentation sphérique donnée, etc. Enfin le dernier Chapitre contient plusieurs propositions sur la théorie des complexes de lignes du second degré et l'étude approfondie de la relation indiquée plus haut entre deux surfaces du 4^e ordre.