BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

E. PELLET

Note sur les podaires obliques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 278-281

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__278_1>

NOTE SUR LES PODAIRES OBLIQUES;

PAR M. E. PELLET,

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

1. Appelons *podaire oblique* d'une courbe, par rapport à un point O, le lieu des pieds, sur les tangentes à cette courbe, des droites partant du point O et faisant avec les tangentes un angle donné α, toujours dans le même sens. Pour avoir toutes les podaires, il suffit de faire varier α depuis o jusqu'à π. La podaire ordinaire correspond à $\alpha = 90°$; on peut l'appeler *podaire droite*.

Soit

$$x \cos\theta + y \sin\theta - f(\theta) = 0$$

l'équation d'une tangente à une courbe. La podaire droite aura pour équation

$$\rho = f(\omega),$$

en prenant l'axe des x pour axe polaire.

ρ_1, ω_1, coordonnées polaires d'un point de la podaire oblique correspondant à l'angle α, sont reliées aux coordonnées ρ, ω du point correspondant de la podaire droite par les relations

$$\rho_1 \sin\alpha = \rho, \quad \omega_1 = \omega + \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

par suite, l'équation de cette podaire est

$$\rho \sin\alpha = f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Par une rotation autour du point O, d'un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ on l'amènera à être homothétique à la podaire droite.

2. *L'enveloppe des podaires d'une courbe est la courbe elle-même.*

On aura cette enveloppe en éliminant α entre les deux équations

$$\rho \sin\alpha = f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad \rho \cos\alpha = f'\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$f'(\theta)$ étant la dérivée de $f(\theta)$; ou bien entre

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho^2 = f^2\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) + f'^2\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \\ &\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{f'\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{f\left(\omega - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, l'équation de la courbe en coordonnées rectangulaires s'obtiendra en éliminant θ entre les deux équations

$$x\cos\theta + y\sin\theta - f(\theta) = 0, \quad -x\sin\theta + y\cos\theta - f'(\theta) = 0,$$

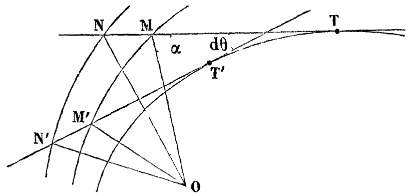
et, en coordonnées polaires, en éliminant θ entre les deux équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho^2 = f^2(\theta) + f'^2(\theta), \\ &\operatorname{tang}(\omega - \theta) = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de α entre les deux équations (1) conduit évidemment à la même relation entre ρ et ω que l'élimination de θ entre les deux équations (2).

3. Soit TM une tangente à la courbe, T étant le point de contact et M le pied de l'oblique. La tangente en M à la podaire est évidem-

ment la tangente au cercle qui passe par les trois points O, M, T.



Soit T'M' une tangente infiniment voisine, faisant avec la première un angle $d\theta$. Construisons la podaire correspondant à l'angle $\alpha + d\alpha$, et soient N, N' les points où elle coupe TM et M'T'. Proposons-nous d'évaluer l'aire du parallélogramme NMM'N'.

Elle est égale à

$$\mathrm{NM}.\mathrm{MM'} \sin \mathrm{NMM'}.$$

Or le triangle MON donne

$$\mathrm{NM} = \frac{c\,d\alpha}{\sin\alpha},$$

en posant $c = \mathrm{OM}$. Le triangle MTM' donne

$$\mathrm{MM'} = \frac{t\,d\theta}{\sin \mathrm{NMM'}},$$

en posant $t = \mathrm{TM}$.

Par suite, l'aire du parallélogramme que nous désignons par $d\sigma$ est égale à

$$d\sigma = \frac{ct}{\sin a}\,d\theta\,d\alpha. \tag{3}$$

4. Supposons que la courbe donnée soit fermée et convexe, et le point O pris dans son intérieur, θ variera de o à 2π; par chaque point du plan il passera deux podaires et l'on pourra mener deux tangentes à la courbe.

D'après la valeur précédente de $d\sigma$, on aura

$$\int \frac{d\sigma}{c}\left(\frac{\sin\alpha}{t} + \frac{\sin\alpha_1}{t_1}\right) = 2\pi^2,$$

l'intégrale s'étendant à tous les éléments des plans extérieurs à la courbe, et t, t_1 étant les longueurs des tangentes menées par un point de l'élément $d\sigma$ à la courbe, et α, α_1 les angles que les directions de ces tangentes font avec la ligne qui joint l'élément $d\sigma$ au point θ.

5. On peut déduire de l'expression (3) de $d\sigma$ une autre intégrale plus curieuse. On en tire

$$\frac{d\sigma \sin^2\alpha}{t} = c \sin\alpha \, d\alpha \, d\theta.$$

Or $c\sin\alpha$ est la distance du point O à la tangente TM, que nous avons désigné par $f(\theta)$; et l'on a par un théorème connu

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \mathrm{L},$$

L étant la longueur totale de la courbe fermée. Donc

$$\int d\alpha \left(\frac{\sin^2\alpha}{t} + \frac{\sin^2\alpha_1}{t_1} \right) = \pi \mathrm{L},$$

l'intégrale s'étendant, comme précédemment, à tous les éléments du plan extérieur de la courbe. Cette dernière est indépendante de la position du point O pris dans l'intérieur de la courbe.