BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

L. PAINVIN

# Courbure d'une courbe plane donnée par son équation tangentielle

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 3 (1872), p. 174-190

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__174_0>

## MÉLANGES.

### COURBURE D'UNE COURBE PLANE DONNÉE PAR SON ÉQUATION TANGENTIELLE;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Nous supposerons les axes des coordonnées rectangulaires; $u$ et $v$ étant les coordonnées d'une tangente quelconque à la courbe

$$(1) \qquad f(u, v) = 0,$$

l'équation de son point de contact sera

$$(2) \qquad (U - u)dv - (V - v)du = 0,$$

U et V étant les coordonnées variables; l'équation (2) est, en effet, vérifiée par les coordonnées de deux tangentes infiniment voisines $(u, v)$ et $(u + du, v + dv)$.

D'après l'équation (2), les coordonnées $x, y$ du point de contact de la tangente seront

$$(3) \qquad x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = \frac{-du}{u\,dv - v\,du};$$

de là, on déduit

$$dx = \frac{v(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2}, \quad dy = \frac{-u(dv\,d^2u - du\,d^2v)}{(u\,dv - v\,du)^2},$$

et, par suite,

$$(4) \qquad ds = \sqrt{u^2 + v^2}\,\frac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

L'équation ponctuelle de la tangente $(u, v)$ est

$$uX + vY - 1 = 0;$$

si $\alpha$ est l'angle avec $Ox$ de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la tangente et que $p$ soit la distance de O à cette tangente, on a

$$(5) \qquad \frac{\cos\alpha}{u} = \frac{\sin\alpha}{v} = p, \quad \text{d'où} \quad \tang\alpha = \frac{v}{u}.$$

On conclut de là

$$(6)\qquad d\alpha = \frac{u\,dv - v\,du}{u^2 + v^2},$$

et, par suite,

$$(7)\qquad \mathrm{R} = \frac{ds}{d\alpha} = (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^3}.$$

2. Soient maintenant $u_1$, $v_1$ les coordonnées de la normale correspondant à la tangente $(u, v)$; la normale doit passer par le point (2) et être perpendiculaire à la tangente $(u, v)$; on a donc

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_1\,dv - v_1\,du = u\,dv - v\,du,\\ &u_1 u + v_1 v = 0,\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$(9)\qquad u_1 = \frac{v(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv},\quad v_1 = \frac{-u(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv}.$$

Le centre de courbure $(x_1, y_1)$ est le point de contact de la droite $(u_1, v_1)$ avec la courbe qu'elle enveloppe; on a donc, d'après les formules (3),

$$(10)\qquad x_1 = \frac{dv_1}{u_1\,dv_1 - v_1\,du_1},\quad y_1 = \frac{-du_1}{u_1\,dv_1 - v_1\,du_1}.$$

Les équations (8) nous donnent, en différentiant et en ayant égard aux valeurs (9),

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &du_1\,dv - dv_1\,du = \frac{u^2 + v^2}{u\,du + v\,dv}(du\,d^2v - dv\,d^2u),\\ &u\,du_1 + v\,dv_1 = \frac{(u\,dv - v\,du)^2}{u\,du + v\,dv};\end{aligned}\right.$$

tirant de là $du_1$, $dv_1$, et substituant dans les équations (10), on trouve

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_1 = \frac{-u(u^2 + v^2)}{(u\,dv - v\,du)^3}(du\,d^2v - dv\,d^2u) + \frac{dv}{u\,dv - v\,du},\\ &y_1 = -\frac{v(u^2 + v^2)}{(u\,dv - v\,du)^3}(du\,d^2v - dv\,d^2u) - \frac{du}{u\,dv - v\,du};\end{aligned}\right.$$

et l'équation du centre de courbure sera

$$(13)\qquad \mathrm{U}x_1 + \mathrm{V}y_1 - 1 = 0.$$

3. En résumé, nous avons ce *premier groupe* de formules

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{array}{ll}
(1^\circ) & x = \dfrac{dv}{u\,dv - v\,du}, \quad y = \dfrac{-du}{u\,dv - v\,du};\\[2ex]
(2^\circ) & ds = \sqrt{u^2+v^2}\,\dfrac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^2};\\[2ex]
(3^\circ) & \mathrm{R} = (u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\,\dfrac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^3};\\[2ex]
(4^\circ) & u_1 = \dfrac{v(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv}, \quad v_1 = \dfrac{-u(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv};\\[2ex]
(5^\circ) & \left\{
\begin{array}{l}
x_1 = -\dfrac{u(u^2+v^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u)}{(u\,dv - v\,du)^3} + \dfrac{dv}{u\,dv - v\,du},\\[2ex]
y_1 = -\dfrac{v(u^2+v^2)(du\,d^2v - dv\,d^2u)}{(u\,dv - v\,du)^3} - \dfrac{du}{u\,dv - v\,du};
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$u$, $v$ sont les coordonnées d'une tangente quelconque à la courbe considérée; $x, y$ sont les coordonnées du point de contact de cette tangente, elles sont données par les formules (1°); la formule (2°) donne l'élément $ds$ de l'arc de courbe en $(x, y)$, et la formule (3°) donne le rayon de courbure R correspondant au point $(x, y)$; $u_1$, $v_1$ sont les coordonnées de la normale en $(x, y)$, leurs valeurs sont fournies par les formules (4°); les formules (5°) donnent les coordonnées $x_1, y_1$ du centre de courbure correspondant.

Pour plus de symétrie, nous avons considéré $u$, $v$ comme des fonctions d'un paramètre arbitraire.

4. Nous pouvons donner aux équations précédentes une forme plus simple et qui peut être fort utile, en introduisant la distance $p$ de l'origine à la tangente et l'angle $\alpha$ que fait, avec l'axe positif des $x$, la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente; les quantités $p$ et $\alpha$ pourraient être nommées les *coordonnées polaires de la tangente* $(u, v)$ ou *coordonnées polaires tangentielles*.

D'après les équations (5), on a

$$
(14) \qquad u = \frac{\cos\alpha}{p}, \quad v = \frac{\sin\alpha}{p}, \quad p^2 = \frac{1}{u^2+v^2};
$$

de là, on déduit

$$du = -\frac{\sin\alpha}{p}\,d\alpha - \frac{\cos\alpha}{p^2}\,dp,$$

$$dv = +\frac{\cos\alpha}{p}\,d\alpha - \frac{\sin\alpha}{p^2}\,dp;$$

$$u\,dv - v\,du = \frac{d\alpha}{p^2},\quad u\,du + v\,dv = -\frac{dp}{p^3};$$

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = \frac{1}{p^2}\,d\alpha^3 + \frac{d\alpha^2}{p^3}\,d\,\frac{dp}{d\alpha};$$

les équations du groupe (I) nous conduisent alors à ce *deuxième groupe* de formules

$$(\text{II})\;\begin{cases}
(1^\circ)\ \begin{cases} p^2 = \dfrac{1}{u^2+v^2}, \\ \operatorname{tang}\alpha = \dfrac{v}{u}; \end{cases} \quad \text{ou} \quad (1^\circ\ bis)\ \begin{cases} u = \dfrac{\cos\alpha}{p}, \\ v = \dfrac{\sin\alpha}{p}; \end{cases} \\[2ex]
(2^\circ)\ \begin{cases} x = p\cos\alpha - \sin\alpha\dfrac{dp}{d\alpha}, \\ y = p\sin\alpha + \cos\alpha\dfrac{dp}{d\alpha}; \end{cases} \\[2ex]
(3^\circ)\quad \pm\, ds = p\,d\alpha + d\,\dfrac{dp}{d\alpha}; \\[2ex]
(4^\circ)\quad \mathrm{R} = p + \dfrac{d\dfrac{dp}{d\alpha}}{d\alpha}; \\[2ex]
(5^\circ)\quad u_1 = \dfrac{-\sin\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}},\quad v_1 = \dfrac{\cos\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}}; \\[2ex]
(6^\circ)\ \begin{cases} x_1 = -\sin\alpha\dfrac{dp}{d\alpha} - \cos\alpha\,\dfrac{d\dfrac{dp}{d\alpha}}{d\alpha}, \\ y_1 = \cos\alpha\dfrac{dp}{d\alpha} - \sin\alpha\,\dfrac{d\dfrac{dp}{d\alpha}}{d\alpha}; \end{cases}
\end{cases}$$

Les formules ($1^\circ$) de ce groupe sont les formules de transformation pour passer des *coordonnées tangentielles rectilignes* aux *coordonnées tangentielles polaires.*

Les autres équations déterminent les éléments de la courbe définis à la fin du n° 3; $p$ peut être regardée comme une fonction de $\alpha$ définie par l'équation de la courbe; ou bien encore, $p$ et $\alpha$ peuvent être considérées comme des fonctions déterminées d'un paramètre arbitraire.

*Remarque I.* — Les quantités $p$ et $\alpha$ sont aussi, pour la *podaire* d'origine O, les coordonnées polaires du point correspondant à la tangente $(u, v)$. De là résultent des relations simples entre les éléments de la courbe et ceux de la podaire; je ne les écrirai pas, car elles doivent être connues.

*Remarque II.* — Ce second groupe de formules ne diffère pas, au fond, de celui que M. J. Serret a donné dans son *Traité de Calcul différentiel,* t. I, p. 311; mais la signification géométrique plus précise des quantités qu'il renferme en rend l'application plus simple, en ce sens qu'on peut en conclure l'équation tangentielle de la courbe. (*Voir* la *troisième application.*)

5. Enfin, comme, dans beaucoup de cas, l'équation de la courbe n'est pas résoluble, il est indispensable d'écrire les formules qui précèdent en y introduisant les dérivées partielles du premier membre de l'équation de la courbe.

Soit l'équation tangentielle de la courbe

$$f(u, v) = 0, \quad \text{ou} \quad f(u, v, w) = 0; \tag{15}$$

après l'avoir rendue homogène, posons

$$\left\{\begin{array}{lll} f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u}, & f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v}, & f_3 = \dfrac{\partial f}{\partial w}, \\ f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}, & f_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, & f_{23} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}, \\ & f_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}, & f_{23} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}, \\ & & f_{33} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}, \end{array}\right. \tag{16}$$

puis

$$(16\,bis) \qquad H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{22} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Si $n$ est le degré de l'équation (15) et si l'on a égard au théorème des fonctions homogènes, on trouve, par des transformations faciles et bien connues, en supposant $du$ constant :

$$dv = -\frac{f_1}{f_2}\,du, \quad u\,dv - v\,du = \frac{f_3}{f_2}\,du,$$
$$d^2v = \frac{H\,du^2}{(n-1)^2 f_2^3},$$

la substitution de ces valeurs dans les formules du groupe (I), en y supposant $du$ constant, nous conduit au *troisième groupe* suivant

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{ll}
(1^\circ) & x = \dfrac{-f_1}{f_3}, \quad y = \dfrac{-f_2}{f_3}; \\[2ex]
(2^\circ) & ds = \dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{(n-1)^2}\,\dfrac{H}{f_2 f_3^2}\,du; \\[2ex]
(3^\circ) & R = \dfrac{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}{(n-1)^2}\,\dfrac{H}{f_3^3}; \\[2ex]
(4^\circ) & u_1 = \dfrac{vf_3}{uf_2 - vf_1}, \quad v_1 = \dfrac{-uf_3}{uf_2 - vf_1}; \\[2ex]
(5^\circ) & \left\{\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{u(u^2+v^2)}{(n-1)^2 f_3^3}\,H - \dfrac{f_1}{f_3}, \\[2ex] y_1 = -\dfrac{v(u^2+v^2)}{(n-1)^2 f_3^3}\,H - \dfrac{f_2}{f_3}. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Les quantités $f_r$, $f_{rs}$, H sont définies par les équations (16) et (16 *bis*); $x$, $y$, R, $u_1$, $v_1$, $x_1$, $y_1$ ont la signification indiquée à la fin du n° 3.

6. Faisons quelques applications de ces formules :

Première application. — *Considérons la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante $a$, dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires* O$x$, O$y$.

Si A et B sont les points où la droite mobile rencontre $Ox$ et $Oy$, on a

$$OA = \frac{1}{u}, \quad OB = \frac{1}{v};$$

*l'équation tangentielle* de la courbe enveloppée est donc

$$(1) \qquad \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} - a^2 = 0.$$

On déduit de cette équation

$$f_1 = -\frac{2}{u^3}, \quad f_2 = -\frac{2}{v^3}, \quad f_3 = 2a^2;$$

$$f_{11} = \frac{6}{u^4}, \quad f_{22} = \frac{6}{v^4}, \quad f_{33} = -6a^2; \quad H = \frac{-6^3 a^2}{u^4 v^4}.$$

Les formules du groupe (III) donnent alors, en tenant compte de l'équation (1),

$$(2) \qquad R = \frac{3}{auv};$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{uv^2}{v^2 - u^2}, \\ v_1 &= \frac{-vu^2}{v^2 - u^2}; \end{aligned} \right.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{3u}{a^2 u^2 v^2} + \frac{1}{a^2 u^3}, \\ y_1 &= \frac{3v}{a^2 u^2 v^2} + \frac{1}{a^2 v^3}. \end{aligned} \right.$$

Si $p$ est la distance de l'origine à la tangente $(u, v)$, on a

$$(5) \qquad ap = \frac{1}{uv}; \quad \text{d'où} \quad R = 3p.$$

L'équation de la normale $(u_1, v_1)$ est

$$(6) \qquad vx - uy = \frac{v^2 - u^2}{uv},$$

et les coordonnées $(x_1, y_1)$ du centre de courbure vérifient la relation

$$(7) \qquad ux_1 + vy_1 = 4.$$

Des équations (5), (6), (7) nous tirons les conséquences suivantes :

1° Le rayon de courbure est égal à trois fois la distance du point O à la tangente ;

2° La normale passe par le sommet, opposé à O, du rectangle construit sur AOB ;

3° Le centre de courbure est sur une droite parallèle à la tangente et dont les coordonnées à l'origine sont quadruples de celles de la tangente.

La construction du centre et du rayon de courbure est donc immédiate.

L'équation (6) est l'équation de la tangente à la développée de la courbe (1) ; si l'on cherche les intersections de cette droite avec les bissectrices de l'angle $y\,O\,x$ et si A′ et B′ sont ces intersections, on trouve

$$\text{OA}' = \sqrt{2}\,\frac{v+u}{uv}, \quad \text{OB}' = \sqrt{2}\,\frac{v-u}{uv},$$

d'où l'on conclut

$$\overline{\text{OA}'}^2 + \overline{\text{OB}'}^2 = 4\,\frac{v^2+u^2}{u^2v^2} = 4a^2.$$

Donc :

4° La développée de la courbe (1) est une courbe enveloppée par une droite de longueur $2a$ s'appuyant sur les bissectrices du système des deux premières droites $Ox$, $Oy$.

Nous retrouvons ainsi, très-simplement, les diverses propriétés bien connues de la courbe définie ci-dessus.

*Remarque I.* — Pour la courbe en question, on voit facilement que

$$(8) \qquad p = \frac{a}{2}\sin 2\alpha;$$

la formule (3°) du groupe (II) donne alors

$$(9) \qquad ds = \frac{3}{2}a\sin 2\alpha\, d\alpha,$$

d'où

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 \alpha.$$

Le quart de la longueur de la courbe est égal à $\frac{3}{2} a$.

*Remarque II.* — Des équations (3), savoir

$$(10) \qquad u_1 = \frac{uv^2}{v^2 - u^2}, \quad v_1 = \frac{-vu^2}{v^2 - u^2},$$

on déduit

$$(11) \qquad u = \frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1}, \quad v = \frac{u_1^2 - v_1^2}{-v_1}.$$

Les relations (10) et (11) établissent une *transformation rationnelle réciproque particulière du 3^e^ ordre*.

Si l'on suppose que $u$ et $v$ soient les coordonnées d'un point et que $u_1$ et $v_1$ soient celles du point correspondant, on voit qu'à un point correspond un point; à une droite quelconque de l'un des systèmes correspond, dans l'autre système, une courbe du 3e ordre ayant l'origine pour point double fixe avec deux tangentes fixes rectangulaires, et pour directions asymptotiques fixes les droites O$x$ et O$y$; la troisième direction asymptotique est perpendiculaire à la droite dont la courbe du 3e ordre est la transformée, etc., etc.

Si l'on suppose que $u$ et $v$ soient les coordonnées d'un point et que $u_1$ et $v_1$ soient celles de la droite correspondante, les équations (10) et (11) définissent une transformation rationnelle réciproque tangentielle, laquelle présente les propriétés suivantes :

1° A une droite du premier système correspond une droite dans le second, et inversement;

2° A un *point* dans l'un des systèmes correspond, dans l'autre, une *courbe* de 3e classe.

Ces courbes, quand le point varie, touchent toutes la droite de l'infini en deux points fixes; elles touchent également les droites O$x$ et O$y$, etc., etc.

7. Deuxième application.

Désignons par $(u, v)$ les coordonnées rectilignes, et par $(p, \alpha)$ les coordonnées polaires d'une tangente à une courbe; par $(u_1, v_1)$ et $(p_1, \alpha_1)$ celles de la tangente correspondante pour la développée;

par $(u_2, v_2)$ et $(p_2, \alpha_2)$ celles de la tangente correspondante pour la développée de la développée ou deuxième développée, et ainsi de suite. Les formules (1°) et (5°) du groupe (II) donnent

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\cos\alpha}{p}, \\ v &= \frac{\sin\alpha}{p}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{-\sin\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}} = \frac{\cos\alpha_1}{p_1}, \\ v_1 &= \frac{\cos\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}} = \frac{\sin\alpha_1}{p_1}, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{dp}{d\alpha}, \\ \cos\alpha_1 &= -\sin\alpha, \\ \sin\alpha_1 &= +\cos\alpha, \\ d\alpha_1 &= d\alpha. \end{aligned}$$

D'après cela, on aura, pour déterminer les développées successives, les formules suivantes

$$(\mathrm{IV})\left\{\begin{array}{lll}
(1^\circ)\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\cos\alpha}{p}, \\ v &= \frac{\sin\alpha}{p}, \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{-\sin\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}}, \\ v_1 &= \frac{\cos\alpha}{\dfrac{dp}{d\alpha}}, \end{aligned}\right. & \dfrac{1}{p_1^2} = u_1^2 + v_1^2; \quad \mathrm{R} = p + \dfrac{dp_1}{d\alpha}, \\[2ex]
(2^\circ)\left\{\begin{aligned} p_1 &= \frac{dp}{d\alpha}, \\ \cos\alpha_1 &= -\sin\alpha, \\ \sin\alpha_1 &= \cos\alpha, \\ d\alpha_1 &= d\alpha, \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} u_2 &= \frac{-\sin\alpha_1}{\dfrac{dp_1}{d\alpha_1}}, \\ v_2 &= \frac{\cos\alpha_1}{\dfrac{dp_1}{d\alpha_1}}, \end{aligned}\right. & \dfrac{1}{p_2^2} = u_2^2 + v_2^2; \quad \mathrm{R}_1 = p_1 + \dfrac{dp_2}{d\alpha_1}, \\[2ex]
(3^\circ)\left\{\begin{aligned} p_2 &= \frac{dp_1}{d\alpha_1}, \\ \cos\alpha_2 &= -\sin\alpha_1, \\ \sin\alpha_2 &= \cos\alpha_1, \\ d\alpha_2 &= d\alpha_1, \end{aligned}\right. & \left\{\begin{aligned} u_3 &= \frac{-\sin\alpha_2}{\dfrac{dp_2}{d\alpha_2}}, \\ v_3 &= \frac{\cos\alpha_2}{\dfrac{dp_2}{d\alpha_2}}, \end{aligned}\right. & \dfrac{1}{p_3^2} = u_3^2 + v_3^2; \quad \mathrm{R}_2 = p_2 + \dfrac{dp_3}{d\alpha_2}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}\right.$$

Appliquons ces dernières formules à l'ellipse; l'équation tangentielle de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$(1)\qquad a^2u^2+b^2v^2-1=0,$$

et l'on a ici

$$(2)\qquad p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha,$$

d'où

$$(2\ bis)\qquad \cos^2\alpha=\frac{p^2-b^2}{c^2},\quad \sin^2\alpha=\frac{a^2-p^2}{c^2}.$$

On déduit de là

$$(3)\qquad p_1=\frac{dp}{d\alpha}=-\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{p},$$

$$(4)\qquad p_2=\frac{dp_1}{d\alpha}=-p+\frac{a^2b^2}{p^3},$$

après avoir éliminé $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ à l'aide des relations (2 *bis*);

$$(5)\qquad p_3=\frac{dp_2}{d\alpha}=-p_1-\frac{3a^2b^2}{p^4}p_1,$$

$$(6)\qquad p_4=\frac{dp_3}{d\alpha}=p+\frac{2a^2b^2}{p^3}-\frac{3a^4b^4}{p^7}+\frac{12a^2b^2}{p^5}p_1^2;$$

..................................

Maintenant, on a, d'après les équations (1°) groupe (IV) et la valeur (3),

$$u_1=\frac{p}{c^2\cos\alpha},\quad v_1=\frac{-p}{c^2\sin\alpha};$$

en substituant ces valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ dans la relation (2), il vient

$$(\mathrm{I})\qquad c^4u_1^2v_1^2=a^2v_1^2+b^2u_1^2,$$

1^re^ *développée* (courbe de 4^e^ classe).

Les équations (2°) du groupe (IV) donnent

$$u_2=\frac{-\cos\alpha}{p_2},\quad v_2=\frac{-\sin\alpha}{p_2},\quad \frac{1}{p_2^2}=u_2^2+v_2^2;$$

substituant les valeurs de $\cos\alpha$ et de $\sin\alpha$ dans l'équation (2), et multipliant l'égalité (4) par $\frac{p^3}{p_2^4}$, on a

$$\left(\frac{p}{p_2}\right)^2=a^2u_2^2+b^2v_2^2,$$

$$\left(\frac{p}{p_2}\right)^3=-\left(\frac{p}{p_2}\right)^4+a^2b^2(u_2^2+v_2^2)^2;$$

l'élimination de $\frac{p}{p_2}$ conduit à

$$\text{(II)} \qquad c^4(a^2u_2^4 - b^2v_2^4)^2 = (a^2u_2^2 + b^2v_2^2)^3,$$

2^e^ *développée* (courbe de 8^e^ classe).

Les équations (3°) du groupe (IV) donnent

$$u_3 = \frac{\sin\alpha}{p_3}, \quad v_3 = \frac{-\cos\alpha}{p_3}, \quad \frac{1}{p_3^2} = u_3^2 + v_3^2;$$

substituons les valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ dans les équations (2) et (3), et multipliant l'égalité (5) par $\frac{p^4}{p_3^5}$, il vient

$$\left(\frac{p}{p_3}\right)^2 = a^2v_3^2 + b^2u_3^2,$$

$$\frac{p_1}{p_3}\frac{p}{p_3} = c^2u_3v_3,$$

$$\left(\frac{p}{p_3}\right)^4 = -\frac{p_1}{p_3}\left(\frac{p}{p_3}\right)^4 - 3a^2b^2\frac{p_1}{p_3}(u_3^2 + v_3^2)^2,$$

l'élimination de $\frac{p_1}{p_3}$ et $\frac{p}{p_3}$ conduit à

$$\text{(III)} \quad c^4u_3^2v_3^2[(b^2u_3^2 + a^2v_3^2)^2 + 3a^2b^2(u_3^2 + v_3^2)^2]^2 = (b^2u_3^2 + a^2v_3^2)^5,$$

3^e^ *développée* (courbe de 12^e^ classe).

Les équations (4°) du groupe (IV) donneraient

$$u_4 = \frac{\cos\alpha}{p_4}, \quad v_4 = \frac{\sin\alpha}{p_4}, \quad \frac{1}{p_4^2} = u_4^2 + v_4^2;$$

substituons les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ dans les équations (2) et (3), puis multipliant l'égalité (6) par $\frac{p^7}{p_4^8}$, il vient

$$\left(\frac{p}{p_4}\right)^2 = a^2u_4^2 + b^2v_4^2,$$

$$\frac{p}{p_4}\frac{p_1}{p_4} = -c^2u_4v_4,$$

$$\left(\frac{p}{p_4}\right)^7 = \left(\frac{p}{p_4}\right)^8 + 2a^2b^2(u_4^2 + v_4^2)^2\left(\frac{p}{p_4}\right)^2 - 3a^4b^4(u_4^2 + v_4^2)^4$$
$$+ 12a^2b^2(u_4^2 + v_4^2)^2\left(\frac{p_1}{p_4}\right)^2\left(\frac{p}{p_4}\right)^2;$$

l'élimination de $\frac{p}{p_4}$ et $\frac{p_1}{p_4}$ conduit à

$$\text{(IV)}\quad \left[\begin{array}{l}(a^2u_4^2+b^2v_4^2)^4+a^2b^2(u_4^2+v_4^2)^4\\ \quad +2a^2b^2c^2(u_4^2+v_4^2)^2(a^2u_4^2+6c^2u_4^2v_4^2-b^2v_4^2)^2\end{array}\right]^2=(a^2u_4^2+b^2v_4^2)^7;$$

c'est la $4^e$ *développée* (courbe de $16^e$ classe).

On conclurait de là, par analogie, que la $m^{\text{ième}}$ développée est de la classe $4m$.

Les formules du groupe (IV) permettent aussi de calculer facilement les rayons de courbure des développées successives.

Ainsi l'on a

$$R_0 = p + \frac{d\dfrac{dp}{d\alpha}}{d\alpha} = p + \frac{dp_1}{d\alpha} = p + p_2,$$

$$R_1 = p_1 + \frac{d\dfrac{dp_1}{d\alpha_1}}{d\alpha_1} = p_1 + \frac{dp_2}{d\alpha_1} = p_1 + p_3,$$

$$R_2 = p_2 + \frac{d\dfrac{dp_2}{d\alpha_2}}{d\alpha_2} = p_2 + \frac{dp_3}{d\alpha_2} = p_2 + p_4.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

En ayant égard aux valeurs (2), (3), (4), (5), (6), on trouve

(V)

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha,$$

$$R_0 = \frac{a^2b^2}{p^3},$$

rayon de courbure de l'ellipse;

$$R_1 = \frac{3a^2b^2c^2\sin\alpha\cos\alpha}{p^5},$$

rayon de courbure de la première développée;

$$R_2 = -\frac{9a^2b^2}{p^3} + \frac{12a^2b^2(a^2+b^2)}{p^5} - \frac{15a^4b^4}{p^7},$$

rayon de courbure de la deuxième développée;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nous pouvons conclure de là les relations suivantes, entre les rayons de courbure de la courbe et des développées successives,

$$
(\mathrm{VI})\qquad \left\{
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{9}\frac{R_1^2}{R_0^2}=\left(\frac{R_0}{a^2b^2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[a^2+b^2-(ab\,R_0)^{\frac{2}{3}}\right],\\
&\frac{R_2}{3R_0}+R_0\left(\frac{R_0}{a^2b^2}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\left(\frac{2R_1}{3R_0}\right)^2,\\
&\frac{R_3}{R_1}+\frac{40}{9}\frac{R_1^2}{R_0^2}+4=\frac{5R_2}{R_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

8. Troisième application. — *Trouver la courbe plane dans laquelle le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur issu d'un point fixe.*

C'est le problème traité par M. J.-A. Serret dans son *Traité de Calcul différentiel,* t. II, p. 501.

Les formules (2°) et (4°) du groupe (II) nous donnent immédiatement, pour l'équation différentielle du problème,

$$
(1)\qquad p+\frac{d^2p}{d\alpha^2}=m\sqrt{p^2+\left(\frac{dp}{d\alpha}\right)^2};
$$

c'est l'équation écrite par M. Serret, à la différence près des notations.

Si $m<1$, on a, p. 503,

$$
(2)\qquad p=-a\sqrt{1-\mu^2}+a\sin\mu(\alpha-\alpha_0),
$$

où

$$
a=\frac{mC}{1-m^2},\quad \mu=\sqrt{1-m^2}.
$$

Si $m>1$, on a

$$
(3)\qquad p=a\sqrt{1+\mu^2}+\frac{a}{2}\left[e^{\mu(\alpha-\alpha_0)}+e^{-\mu(\alpha-\alpha_0)}\right],
$$

où

$$
a=\frac{mC}{m^2-1},\quad \mu=\sqrt{m^2-1}.
$$

Si $m=1$, on a

$$
4)\qquad p=a\left[1-(\alpha-\alpha_0)^2\right].
$$

D'ailleurs, d'après les formules ($1^{\circ}$ *bis*) du groupe (II), on a

$$(5)\qquad u=\frac{\cos\alpha}{p},\quad v=\frac{\sin\alpha}{p};$$

nous connaissons donc l'équation tangentielle de la courbe.

Premier cas : $m<1$.

On peut, en changeant la direction des axes autour du point O, et en choisissant convenablement le sens positif de l'axe des $x$, écrire

$$(6)\qquad p=am+a\sin\mu\alpha,\quad \mu=+\sqrt{1-m^2},$$

alors

$$(7)\qquad u=\frac{\cos\alpha}{a(m+\sin\mu\alpha)},\quad v=\frac{\sin\alpha}{a(m+\sin\mu\alpha)};$$

l'élimination de $\alpha$ n'offre aucune difficulté, et l'*équation tangentielle* de la courbe est

$$(8)\qquad \frac{1}{a\sqrt{u^2+v^2}}=m+\sin\left(\mu\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{u}\right).$$

Mais il est visible que les équations (7), qui définissent $u$ et $v$ en fonction du paramètre arbitraire $\alpha$, suffiront parfaitement pour l'étude complète de la courbe, soit pour sa forme, soit pour ses propriétés; l'équation (8) est inutile, et même fort incommode.

Ainsi $u$, $v$ [équations (7)] sont donc les coordonnées d'une tangente quelconque à la courbe en question; en appliquant ici les formules du groupe (I), on trouve

$$(9)\qquad \begin{cases} x=a(m\cos\alpha+\cos\alpha\sin\mu\alpha-\mu\sin\alpha\cos\mu\alpha)\\ \quad =p\cos\alpha-a\mu\sin\alpha\cos\mu\alpha,\\ y=a(m\sin\alpha+\sin\alpha\sin\mu\alpha+\mu\cos\alpha\cos\mu\alpha)\\ \quad =p\sin\alpha+a\mu\cos\alpha\cos\mu\alpha,\end{cases}$$

d'où

$$(9\ bis)\qquad x^2+y^2=a^2(1+m\sin\mu\alpha)^2:$$

ce sont les coordonnées du point de contact de la tangente $(u, v)$.

On trouve ensuite

$$(10)\qquad \mathrm{R}=am(1+m\sin\mu\alpha),$$

ce qui, avec la valeur (9 *bis*), fournit une vérification de l'exactitude des calculs.

On a encore

$$(11)\qquad ds = am(1 + m\sin\mu\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$s = am\alpha - \frac{am^2}{\mu}\cos\mu\alpha + \text{const.};$$

la courbe est rectifiable.

Les coordonnées $x_1, y_1$ du centre de courbure seront

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= a\mu(\mu\cos\alpha\sin\mu\alpha - \sin\alpha\cos\mu\alpha),\\ y_1 &= a\mu(\mu\sin\alpha\sin\mu\alpha + \cos\alpha\cos\mu\alpha),\end{aligned}\right.$$

$$\mu = \sqrt{1 - m^2}.$$

Les coordonnées de la normale sont

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sin\alpha}{a\mu\cos\mu\alpha},\\ v_1 &= \frac{\cos\alpha}{a\mu\cos\mu\alpha},\end{aligned}\right.$$

d'où

$$p_1 = a\mu\cos\mu\alpha,$$

$p_1$ étant la distance du point O à la normale, etc., etc.

*Observation.* — Je ne pousserai pas plus loin l'étude et la discussion de cette courbe; je ferai cependant remarquer que, si l'on veut obtenir facilement les formules que je viens de transcrire, on y arrivera immédiatement en dirigeant le calcul comme il suit :

On a

$$(1^\circ)\qquad pu = \cos\alpha,\quad pv = \sin\alpha,\quad p = am + a\sin\mu\alpha,$$

par suite,

$$(2^\circ)\qquad \left\{\begin{aligned} p\,du &= -\sin\alpha\,d\alpha - u\,dp,\\ p\,dv &= \phantom{-}\cos\alpha\,d\alpha - v\,dp,\end{aligned}\right.$$

$$dp = a\mu\cos\mu\alpha\,d\alpha,$$

d'où

$$(3^\circ)\qquad u\,dv - v\,du = \frac{d\alpha}{p^2},$$

ou

$$-du\sin\alpha + dv\cos\alpha = \frac{d\alpha}{p}.$$

On a ensuite, en différentiant les équations $(2^\circ)$,

$$(4^\circ)\qquad \begin{cases} p\,d^2u = -\,2\,du\,dp - \cos\alpha\,d\alpha^2 - u\,d^2p,\\ p\,d^2v = -\,2\,dv\,dp - \sin\alpha\,d\alpha^2 - v\,d^2p,\end{cases}$$

$$d^2p = -\,a\mu^2\sin\mu\alpha\,d\alpha^2.$$

On déduit de là, eu égard aux valeurs $(3^\circ)$,

$$p(dv\,d^2u - du\,d^2v) = (\sin\alpha\,du - \cos\alpha\,dv)\,d\alpha^2 - (u\,dv - v\,du)\,d^2p,$$

d'où

$$(5^\circ)\qquad dv\,d^2u - du\,d^2v = \frac{-\,am}{p^3}(1 + m\sin\mu\alpha)\,d\alpha^3.$$