BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

A. MANNHEIM

Remarques sur une classe générale de surfaces, et en particulier sur la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 119-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__119_1>

© Gauthier-Villars, 1872, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MÉLANGES.

REMARQUES SUR UNE CLASSE GÉNÉRALE DE SURFACES, ET EN PARTICULIER SUR LA SURFACE LIEU DES POINTS DONT LA SOMME DES DISTANCES A DEUX DROITES FIXES EST CONSTANTE;

PAR M. A. MANNHEIM.

Dans son Mémoire *Sur les Surfaces orthogonales*, M. J.-A. Serret a trouvé analytiquement comment ce dernier lieu fait partie d'un système triple de surfaces orthogonales dans le cas particulier où les deux droites se rencontrent à angle droit.

M. Picart est arrivé géométriquement et très-simplement au même résultat. On connaît donc les lignes de courbure de ce lieu particulier.

Il y a quelques années, l'Académie royale de Belgique a proposé la question suivante : *Trouver les lignes de courbure du lieu des points dont la somme des distances à deux droites qui se coupent est constante.*

En réponse à cette question, M. E. Catalan envoya un Mémoire que l'Académie jugea digne d'être inséré dans ses *Mémoires couronnés* et des *Savants étrangers*, t. XXXII.

Mais, comme l'indique M. Catalan lui-même en tête de son travail, il n'a pas résolu la question proposée. On ne connaît donc pas les lignes de courbure de cette surface.

Je vais montrer aujourd'hui qu'une simple remarque conduit non-seulement à la construction, pour un point de la surface, de la direction des lignes de courbure, mais permet aussi de déterminer, pour le même point, les rayons de courbure principaux.

Désignons par (S) la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites quelconques est constante, et par o un de ses points. Considérons les deux droites données comme les axes de révolution de deux cylindres que nous désignerons par (s) et (s'). Nous pouvons remarquer que : *Si l'un de ces cylindres est supposé lumineux, les rayons qui s'échapperont normalement de ce cylindre seront réfléchis par* (S), *de telle façon qu'ils rencontreront normalement* (s'); ou autrement : *Si des rayons lumineux s'échappent normalement d'une des droites données, ils sont réfléchis par* (S), *de telle façon qu'ils rencontrent nécessairement l'autre droite.*

On sait, en effet, qu'au point o de (S) on obtient la normale à cette surface en prenant la bissectrice de l'angle formé par les perpendiculaires abaissées du point o sur les droites données.

Il résulte de notre remarque que les éléments de courbure des trois surfaces (S), (s), (s') sont liés entre eux par les constructions qui ont été données, soit par M. Dupin, dans ses *Applications de Géométrie,* soit par Sturm, dans son *Mémoire sur l'Optique*. Je vais appliquer ici les constructions données par Sturm.

Supposons que nos cylindres de révolution (s) et (s') passent par le point o. Projetons sur le plan tangent en o à (S) l'indicatrice de (s) convenablement choisie au moyen de projetantes parallèles au rayon lumineux qui passe en o. Opérons de même pour (s'). Nous obtiendrons ainsi un losange dont les diagonales sont les tangentes en o aux lignes de courbure de (S) qui passent par ce point.

Les quatre sommets de ce losange appartiennent à l'indicatrice de (S); un autre point de cette courbe suffira donc pour la déterminer. Une fois cette indicatrice construite, on a ses axes et, par suite, les rayons de courbure principaux de (S).

Effectuons maintenant les constructions.

Appelons :

L la droite donnée, axe du cylindre (s);

L' l'autre droite;

N la normale issue du point o à la surface (S).

Élevons au point o une perpendiculaire au plan (o, L), et portons sur cette droite, de part et d'autre du point o, un segment égal à la racine carrée de la projection, faite sur N, de la perpendiculaire op abaissée du point o sur L.

Par les extrémités des segments ainsi mesurés, menons des parallèles à L; ces deux droites constituent l'indicatrice de (s) pour le point o. Projetons ces deux droites sur le plan tangent en o à (S) au moyen de parallèles à op. Nous obtiendrons ainsi deux droites, côtés opposés d'un losange. Les deux autres côtés relatifs à L′ s'obtiendront en suivant une marche analogue.

Les diagonales de ce losange sont tangentes en o aux lignes de courbure de (S) *qui passent par ce point.*

Appelons p' le pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur L′, et considérons le plan pop'. Élevons au point o la perpendiculaire ot à ce point.

Le plan pot coupe le cylindre (s) suivant une courbe dont le centre de courbure est, je suppose, le point γ de la ligne op. On trouvera de même un point γ' sur op'. Joignons le point γ au point γ' par une droite, et désignons par δ le point où elle coupe N. Portons sur ot un segment égal à la racine carrée de $o\delta$. L'extrémité de ce segment appartient à l'indicatrice de (S). *Les quatre sommets du losange et ce point permettent de construire cette courbe, ses axes et, par suite, les rayons de courbure principaux de* (S).

La remarque que nous venons de faire s'étend au cas général suivant :

On donne deux surfaces (L), (L′), *et l'on considère le lieu* (S) *d'un point o tel, que*

$$\lambda . op + \mu . op' = \nu^2, \tag{1}$$

λ, μ, ν *étant des constantes, et op, op′ les distances du point o aux surfaces* (L) *et* (L′).

La relation (1) peut s'écrire

$$\frac{\frac{\nu^2}{\mu} - op'}{op} = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2}$$

Construisons le segment $\frac{\nu^2}{\mu}$, et portons-le sur $p'o$ à partir de p' jusqu'au point q. Par le point q faisons passer une surface parallèle à (L′), et désignons-la par (L″). La distance oq du point o à cette surface n'est autre que $\frac{\nu^2}{\mu} - op'$.

En vertu de la relation (2), (S) peut donc être considéré comme le lieu des points tels que o, dont le rapport des distances à (L) et (L″) est un rapport constant.

On voit donc que, si (L) *est une surface lumineuse et* (S) *une surface dirimante, en choisissant convenablement l'indice de réfraction, les rayons réfractés sont normaux à* (L′).

Nous pouvons donc appliquer les constructions données par Sturm, dans le cas général dont nous nous occupons, pour déterminer les éléments de la courbure de (S).

SUR LA SURFACE DES CENTRES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE ET SUR LES COORDONNÉES ELLIPTIQUES;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, en 1870 (*Comptes rendus*, t. LXX, p. 1328), j'ai indiqué des formules très-simples relatives à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde. Ces formules, que je croyais nouvelles, avaient déjà été données par Joachimsthal dans son Mémoire *Sur les normales à l'ellipsoïde,* et par M. Catalan dans ses *Mélanges mathématiques*. Le procédé par lequel je les avais obtenues me paraît mériter d'être reproduit, parce qu'il se rattache à un nouveau mode d'exposition de la théorie des coordonnées elliptiques, et qu'il conduit d'ailleurs, d'une manière naturelle, à plusieurs autres résultats.

Soient

$$\frac{x^2}{a-d}+\frac{y^2}{b-d}+\frac{z^2}{c-d}-1=F=0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface du second degré rapportée à ses axes, et

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=S=0 \tag{2}$$

l'équation d'une sphère quelconque. Cherchons l'équation du 4ᵉ ordre qui détermine les cônes passant par l'intersection de la surface F et de la sphère.

A cet effet, nous formerons l'équation

$$(\lambda - d)F - S = o,$$

qui représente, quand on fait varier λ, toutes les surfaces du second degré contenant l'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde. Si nous exprimons que cette équation représente un cône, nous obtiendrons les équations suivantes

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(\lambda - d)x}{a-d} = x - \alpha, \quad \dfrac{(\lambda - d)y}{b-d} = y - \beta, \quad \dfrac{(\lambda - d)z}{c-d} = z - \gamma, \\ \qquad \lambda - d = \alpha(x-\alpha) + \beta(y - \beta) + \gamma(z-\gamma) + R^2, \end{array}\right.$$

qui devront être, toutes les quatre, vérifiées par les coordonnées du sommet du cône. On devra donc, entre ces équations, éliminer x, y, z; ce qui donnera pour λ l'équation bien connue

$$(4)\qquad 1 = \frac{\alpha^2}{a-\lambda} + \frac{\beta^2}{b-\lambda} + \frac{\gamma^2}{c-\lambda} - \frac{R^2}{d-\lambda}.$$

En examinant cette équation, j'avais reconnu ce fait important, qu'elle est tout à fait semblable à celle des surfaces homofocales. Il y a seulement une variable de plus : R^2 est prise avec le signe —. D'après cela, j'avais été conduit à prendre comme variables indépendantes les quatre racines de cette équation, et à exprimer α, β, γ, R en fonction de ces quatre racines, de même que, dans les coordonnées elliptiques, on exprime les coordonnées rectangulaires en fonction des paramètres des surfaces homofocales. Ces quatre racines sont des paramètres au moyen desquels on déterminera une sphère quelconque, comme un point est déterminé par ses coordonnées elliptiques.

Appelons ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 les quatre racines de l'équation précédente, et posons, pour abréger,

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} f(u) = (u-a)(u-b)(u-c)(u-d), \\ \varphi(u) = (u-\rho)(u-\rho_1)(u-\rho_2)(u-\rho_3). \end{array}\right.$$

On trouvera, par un calcul analogue à celui des coordonnées elliptiques,

$$(6)\quad \alpha^2 = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \quad \beta^2 = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad \gamma^2 = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \quad R^2 = -\frac{\varphi(d)}{f'(d)}.$$

Notons encore la formule

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2=a+b+c+d-\rho-\rho_1-\rho_2-\rho_3,$$

et l'équation différentielle

$$(7)\qquad d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2-dR^2=\sum\frac{\varphi'(\rho_i)\,d\rho_i^2}{f(\rho_i)},$$

analogue à la formule qui, dans la théorie des coordonnées elliptiques, donne la distance de deux points infiniment voisins.

Les formules qui précèdent suffisent pour les différentes questions que nous allons proposer.

D'abord, si la sphère S se réduit à un point, $R=0$, une des racines de l'équation (4), ρ_3 par exemple, devient égale à d, et l'on retrouve les formules connues de la théorie des coordonnées elliptiques.

En second lieu, supposons que R ne soit pas nul, et que la sphère soit simplement ou doublement tangente à l'ellipsoïde. Alors l'équation en λ aura une racine double : on devra supposer, par exemple, $\rho_3=\rho_2$, et les formules précédentes deviendront

$$(8)\qquad \alpha=\frac{(a-\rho_2)\sqrt{(a-\rho)(a-\rho_1)}}{\sqrt{f'(a)}},\qquad R=\frac{(d-\rho_2)\sqrt{(d-\rho)(d-\rho_1)}}{\sqrt{-f'(d)}},$$

$$(9)\qquad d\alpha^2+d\beta^2+d\gamma^2=dR^2+\frac{\varphi'(\rho)}{f(\rho)}\,d\rho^2+\frac{\varphi'(\rho_1)}{f(\rho_1)}\,d\rho_1^2.$$

Les premières de ces formules donnent le centre de la sphère tangente (α,β,γ), la dernière donne le rayon R, enfin la formule (9) définit un système de coordonnées curvilignes formé des surfaces parallèles à l'ellipsoïde, et des surfaces développables orthogonales à celles-ci.

Si l'on fait varier ρ_2, en laissant ρ, ρ_1 constants, on obtient une suite de sphères; mais comme les coordonnées du centre et le rayon sont des fonctions linéaires de ρ_2, toutes ces sphères demeurent tangentes au même point de l'ellipsoïde, et leur centre décrit la normale en ce point. Si l'on fait, par exemple, $\rho_2=d$, le rayon devient nul et la sphère se réduit à un point. Alors les formules (8) deviennent les formules relatives aux coordonnées elliptiques ordinaires du point de contact; d'où l'on voit que ρ, ρ_1, dans les formules précédentes, sont les *coordonnées elliptiques ordinaires du point de contact de la sphère.*

Remarquons encore les valeurs particulières $\rho_2 = a, b, c$ pour lesquelles, la sphère ayant son centre dans l'un des plans principaux, devient doublement tangente. Si l'on fait $\rho_2 = a$, la coordonnée α devient nulle : on a les sphères ayant leur centre dans le plan des xy. Si l'on ajoute à cette hypothèse la suivante, $\rho_1 = d$, on obtient les sphères de rayon nul doublement tangentes à l'ellipsoïde, et situées dans le plan des xy; les formules deviennent

$$\beta^2 = \frac{(b-a)(b-\rho)}{b-c}, \quad \gamma^2 = \frac{(c-a)(c-\rho)}{c-b},$$

et, par suite, on trouve

$$\alpha = 0, \quad \frac{\beta^2}{b-a} + \frac{\gamma^2}{c-a} - 1 = 0;$$

ce sont les équations de la focale située dans le plan des yz.

Remarquons que sur chaque normale on obtient le pied de la normale, les points de rencontre avec les plans principaux, et le point à l'infini, en donnant à ρ_2 les valeurs constantes

$$0, \quad a, \quad b, \quad c, \quad +\infty.$$

Donc, les portions de normales terminées aux trois plans principaux sont dans un rapport constant, etc. On voit avec quelle simplicité se présentent les propriétés des surfaces homofocales.

Examinons maintenant le cas où trois des quantités ρ_i deviennent égales. Dans cette hypothèse, la sphère aura généralement avec l'ellipsoïde un contact stationnaire, son centre sera sur la surface des centres de courbure, et les formules fondamentales deviendront, en y faisant

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3,$$

$$(10) \quad \alpha^2 = \frac{(a-\rho)^3(a-\rho_1)}{f'(a)}, \quad \beta^2 = \frac{(b-\rho)^3(b-\rho_1)}{f'(b)}, \quad \gamma^2 = \frac{(c-\rho)^3(c-\rho_1)}{f'(c)},$$

$$(11) \quad \mathrm{R}^2 = -\frac{(d-\rho)^3(d-\rho_1)}{f'(d)}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\mathrm{R}^2 + \frac{(\rho-\rho_1)^3 d\rho_1^2}{f(\rho_1)}.$$

Ces formules, sauf la dernière, sont celles qui ont été données dans les *Comptes rendus,* et qui sont dues à Joachimsthal. La dernière donne pour la surface des centres de courbure la distance de deux points infiniment voisins, et elle met en évidence le système de lignes géodésiques qu'on peut déterminer pour toute surface des centres de courbure.

Quant aux formules (10), qui donnent les coordonnées du centre de courbure en fonction des coordonnées elliptiques ρ, ρ_1 du pied de la normale, elles mettent en évidence deux faits importants dans la théorie de cette surface.

D'abord on en saura déterminer les lignes asymptotiques, en vertu d'une remarque faite, t. I, p. 355 du *Bulletin*, et l'équation différentielle de ces lignes sera

$$(12) \qquad \frac{3\,d\rho^2}{(a-\rho)(b-\rho)(c-\rho)} + \frac{d\rho_1^2}{(a-\rho_1)(b-\rho_1)(c-\rho_1)} = 0,$$

équation qui s'intègre sans difficulté.

En second lieu, la ligne double de la surface des centres de courbure (nécessairement imaginaire) peut être étudiée et déterminée; mais, comme on est ainsi conduit à un problème intéressant se rapportant aux équations du 4e degré, je ne développe pas cette remarque pour le moment.

Passons maintenant au cas où les quantités ρ_i seraient égales 2 à 2. On sait alors (cela résulte d'un excellent Mémoire de M. Painvin dans les *Nouvelles Annales;* voir *Bulletin,* t. I, p. 57) que la sphère coupera l'ellipsoïde suivant une droite et une cubique gauche. Les formules générales, en y faisant

$$\rho_3 = \rho, \quad \rho_2 = \rho_1,$$

deviennent

$$(13) \qquad \alpha = \frac{(a-\rho)(a-\rho_1)}{\sqrt{f'(a)}}, \quad \beta = \frac{(b-\rho)(b-\rho_1)}{\sqrt{f'(b)}}, \quad \gamma = \frac{(c-\rho)(c-\rho_1)}{\sqrt{f'(c)}},$$

$$(14) \qquad \mathrm{R} = \frac{(d-\rho)(d-\rho_1)}{\sqrt{-f'(d)}}, \quad d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = d\mathrm{R}^2.$$

La sphère contient alors une des 8 droites de l'ellipsoïde qui vont rencontrer le cercle de l'infini. Son centre α, β, γ décrit un plan : le plan mené par cette génératrice, tangentiellement au cercle de l'infini. Ce plan a pour équation

$$(15) \qquad \frac{\alpha\sqrt{f'(a)}}{(a-b)(a-c)} + \frac{\beta\sqrt{f'(b)}}{(b-a)(b-c)} + \frac{\gamma\sqrt{f'(c)}}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

et l'on peut vérifier sur cette équation qu'il est tangent à la fois à l'ellipsoïde et au cercle le l'infini. On voit, comme cela doit être, que, dans ce plan, la distance ds de deux plans infiniment voisins est rationnelle, $ds^2 = d\,\mathrm{R}^2$ ([1]).

Le cas où les quatre quantités ρ_i sont égales est compris dans celui qui nous occupe. Dans ce cas, la sphère coupe encore suivant une cubique gauche et une droite; mais la cubique gauche, au lieu de couper la droite, lui est tangente en un point. Les formules deviennent

$$(16)\qquad \alpha = \frac{(a-\rho)^2}{\sqrt{f'(a)}}, \quad \beta = \frac{(b-\rho)^2}{\sqrt{f'(b)}}, \quad \gamma = \frac{(c-\rho)^2}{\sqrt{f'(c)}},$$
$$\mathrm{R} = i\,\frac{(d-\rho)^2}{\sqrt{f'(d)}};$$

alors les sphères ont leurs centres sur 8 coniques situées dans les 8 plans, qu'on déduit de l'équation (15) en prenant les signes de toutes les manières possibles. Ces coniques sont des paraboles tangentes aux plans coordonnés, et se touchant deux à deux aux centres de courbure correspondants aux ombilics. Elles appartiennent à la surface des centres de courbure, sur laquelle elles sont des lignes de rebroussement, comme l'a démontré M. Clebsch. J'ajoute qu'on peut déduire avec la plus grande facilité, des remarques qui précèdent, la solution complète du problème des normales à l'ellipsoïde.

Enfin, il est bien essentiel d'ajouter, et je développerai dans un travail ultérieur cette remarque, que la théorie complète des surfaces homofocales se présente avec une plus grande simplicité, si au lieu de prendre, comme nous l'avons fait, des sphères, on considère une surface du second degré inscrite à l'une des surfaces homofocales, et qu'on la détermine encore par les quatre racines de l'équation en λ, comme nous l'avons fait pour les sphères. En effet, au point de vue de la Géométrie projective, le cercle de l'infini ne se distingue pas des autres focales, et, par suite, aux sphères, on pourrait substituer des surfaces assujetties à contenir une des trois focales. On obtiendra tous les résultats précédents comme cas-limites

([1]) On sait que, sur toutes les développables circonscrites au cercle imaginaire de l'infini, le carré de la distance de deux points infiniments voisins est de la forme

$$(a\,du + b\,dv)^2.$$

en considérant, au lieu de sphères, les surfaces

$$\frac{x^2}{a-d}+\frac{y^2}{b-d}+\frac{z^2}{c-d}-1+(mx+ny+pz+q)^2=0,$$

tangentes à l'une des surfaces homofocales, et en déterminant ces surfaces, non par m, n, p, q, mais par les racines de l'équation du 4ᵉ degré, qui donne les cônes passant par leur intersection avec toute autre surface homofocale fixe. On rattache ainsi à un même point de vue les propriétés relatives aux coordonnées elliptiques, aux sphères, aux cônes circonscrits, et même des propriétés plus générales relatives, soit aux surfaces inscrites, soit aux surfaces doublement tangentes à un des ellipsoïdes homofocaux.