Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

J.-A. Serret

Mémoire sur le principe de la moindre action

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 97-124

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__97_0>

MÉLANGES.

MÉMOIRE SUR LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION (¹);

PAR M. J.-A. SERRET.

La première idée de la propriété qui constitue le principe dit *de la moindre action* est due à Euler; ce grand géomètre démontra effectivement, dès 1744, à la fin de son *Traité des isopérimètres*, que, dans les trajectoires décrites par les forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est toujours un *maximum* ou un *minimum*. Lagrange montra ensuite, en 1760 (²), que la même propriété peut être étendue au mouvement d'un système quelconque de corps, pourvu que le *principe des forces vives* ait lieu, et il en développa l'application à la solution d'un assez grand nombre de problèmes. Aussi l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* jugea-t-il plus tard que la propriété dont il s'agit méritait, à raison de son importance, de faire l'objet d'un nouveau principe général de dynamique, qu'il appela *de la moindre action,* sans se dissimuler la défectuosité de cette dénomination, renouvelée de Maupertuis (³).

Pour faire usage du principe de la moindre action dans la solution des problèmes de Mécanique, il suffit d'égaler à zéro la *variation* de l'intégrale dont la valeur est un *maximum* ou un *minimum,* et le résultat qu'on obtient ainsi ne diffère pas, au fond, de la formule générale de la dynamique. Il est donc peu important, à ce point de vue, de savoir si le maximum ou le minimum *a lieu effectivement :* ce qu'il faut, c'est, je le répète, que la variation de l'intégrale soit nulle, et la démonstration que Lagrange a donnée de son principe n'établit pas autre chose.

Mais il n'en est pas moins d'un haut intérêt pour l'Analyse et pour la Mécanique générale qu'une propriété aussi remarquable du mouvement soit connue exactement. Je suis parvenu heureusement à combler la lacune qui existait à cet égard, en calculant la variation

---

(¹) Lu à l'Académie des Sciences, le 12 juin 1871.

(²) *Miscellanea Taurinensia*, t. II, ou *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365.

(³) *Mécanique analytique*, 3ᵉ édition, t. I, p. 229 et 281.

du deuxième ordre de l'intégrale dont la variation du premier ordre est nulle. Cette variation du deuxième ordre est toujours positive, au moins, tant que l'intervalle de temps auquel se rapporte l'intégrale reste inférieur à une certaine limite, et l'on peut affirmer, dès lors, que *le minimum a lieu effectivement, en général.* Mais lorsque la limite dont je viens de parler existe et qu'elle est atteinte ou dépassée, il peut arriver, et il arrive en effet généralement, que *le minimum n'a plus lieu.*

L'analyse que je développe dans ce Mémoire est, je crois, la première application importante qui ait été faite du *Calcul des variations* à la distinction du *maximum* et du *minimum*; aussi mérite-t-elle peut-être, à ce point de vue, d'arrêter un instant l'attention de l'Académie.

§ I.

Démonstration générale du principe de la moindre action.

1. Le principe de la moindre action dont je me propose de présenter ici une démonstration complète peut être énoncé de la manière suivante :

Lorsque le principe des forces vives est applicable à un système de points matériels libres ou liés entre eux et sollicités par des forces données, le mouvement du système est tel, que la somme des quantités de mouvement des divers corps multipliées par les éléments des trajectoires respectives a, entre deux positions quelconques du système, une intégrale minimum; c'est-à-dire que l'intégrale dont il s'agit est moindre dans le mouvement réel que dans le mouvement nouveau qui aurait lieu si, rendant le premier mouvement impossible par l'introduction de liaisons nouvelles, on obligeait les corps à suivre, sous l'action des mêmes forces, des trajectoires infiniment voisines des premières, pour passer de la première position à la seconde, tout en laissant subsister l'équation des forces vives et en conservant la valeur de la constante qui exprime la différence entre la demi-somme des forces vives et la fonction des forces. Il peut arriver cependant que le minimum cesse d'avoir lieu dès que l'intervalle de temps auquel se rapporte l'intégrale atteint ou dépasse une certaine limite.

Comme la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse, et que l'élément de la trajectoire est le produit de la vitesse par l'élément du temps, si l'on désigne par $2\mathrm{T}$ la somme des forces vives des divers corps et par t le temps, l'intégrale V que nous avons à considérer aura pour valeur

$$\mathrm{V} = \int_{t_0}^{t_1} 2\mathrm{T}\,dt, \tag{1}$$

t_0 et t_1 étant les valeurs du temps t qui répondent à deux positions successives du système; et pour établir le principe dont nous nous occupons, il suffit de prouver que l'on a

$$\delta\mathrm{V} = 0, \quad \delta^2\mathrm{V} > 0,$$

δ étant la *caractéristique des variations*.

2. Si l'on rapporte la position des corps à trois axes de coordonnées rectangulaires, et que l'on désigne par x, y, z les coordonnées de la masse m, au bout du temps t, on aura

$$\mathrm{T}\,dt^2 = \frac{1}{2}\sum m(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{2}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les corps du système. Prenons les variations des deux membres, on aura

$$\delta\mathrm{T}\,dt^2 + 2\mathrm{T}\,dt\,\delta\,dt = \sum m(dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z);$$

le premier membre de cette formule est égal à

$$dt\,\delta(2\mathrm{T}\,dt) - \delta\mathrm{T}\,dt^2,$$

et le second membre peut être mis sous la forme

$$d(\Gamma\,dt) - \Psi\,dt^2,$$

en posant

$$\Gamma = \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right), \tag{3}$$

$$\Psi = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right); \tag{4}$$

on a donc

$$\delta(2\mathrm{T}\,dt) = d\Gamma + (\delta\mathrm{T} - \Psi)\,dt, \tag{5}$$

et, en différentiant de nouveau avec la caractéristique δ,

$$(6) \qquad \delta^2(2\,\mathrm{T}\,dt) = d\delta\Gamma + (\delta\mathrm{T} - \Psi)\,\delta dt + (\delta^2\mathrm{T} - \delta\Psi)\,dt.$$

Mais la formule (1) donne, par les principes du calcul des variations,

$$\delta\mathrm{V} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta(2\,\mathrm{T}\,dt)}{dt}\,dt, \quad \delta^2\mathrm{V} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\delta^2(2\,\mathrm{T}\,dt)}{dt}\,dt;$$

si donc on désigne par Γ_0, Γ_1 les valeurs de Γ qui répondent à $t = t_0$, $t = t_1$, on aura

$$(7) \quad \delta\mathrm{V} = (\Gamma_1 - \Gamma_0) + \int_{t_0}^{t_1} (\delta\mathrm{T} - \Psi)\,dt,$$

$$(8) \quad \delta^2\mathrm{V} = (\delta\Gamma_1 - \delta\Gamma_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{(\delta\mathrm{T} - \Psi)\,\delta dt}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} (\delta^2\mathrm{T} - \delta\Psi)\,dt.$$

Ces formules (7) et (8) sont générales, et elles subsistent, quelles que soient les forces qui agissent sur les corps et les liaisons du système. Mais si, comme nous le supposons essentiellement, le principe des forces vives a lieu, on a

$$(9) \qquad \mathrm{T} - \mathrm{U} = \mathrm{C},$$

en désignant par U la fonction des forces et par C une constante arbitraire. Nous supposons encore que la constante C ne varie pas dans la différentiation avec la caractéristique δ, en sorte que l'on a aussi

$$(10) \qquad \delta\mathrm{T} = \delta\mathrm{U}, \quad \delta^2\mathrm{T} = \delta^2\mathrm{U}.$$

En outre, pour tous les déplacements *virtuels* compatibles avec les liaisons du système, on a, par la formule générale de la dynamique,

$$(11) \qquad \Psi - \delta\mathrm{U} = 0;$$

et enfin, comme les coordonnées aux limites de l'intégration sont, par hypothèse, constantes, leurs variations de tous les ordres sont nulles, ce qui donne

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = 0, \quad \delta\Gamma_0 = 0, \quad \delta\Gamma_1 = 0.$$

Il suit de là que la formule (7) se réduit à

$$\delta\mathrm{V} = 0,$$

résultat connu, et que la formule (8) devient

$$(12) \qquad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} (\delta^2 U - \delta\Psi) dt.$$

3. Pour calculer la variation du deuxième ordre $\delta^2 V$, je ferai usage des formules de la dynamique mises sous la forme générale que Lagrange leur a donnée. Ainsi les coordonnées ayant été exprimées en fonction d'un nombre quelconque n de variables

$$q_1, q_2, \ldots, q_n,$$

si l'on fait généralement

$$dq_i = q'_i\, dt,$$

la force vive $2T$ deviendra une fonction des variables q et q', laquelle sera homogène et du deuxième degré par rapport aux q', et l'on aura

$$(13) \qquad \Psi = \sum_i \left(\frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad \delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i,$$

d'où

$$(14) \qquad \Psi - \delta U = \sum_i \left(\frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ de l'indice i.

Si, en faisant usage des liaisons entre les coordonnées rectangulaires, on a réduit les variables q au plus petit nombre possible, les variations δq seront toutes arbitraires, et la formule (11) donnera les n équations du mouvement

$$(15) \qquad \frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0,$$

lesquelles subsisteront tant qu'on n'introduira pas de liaisons nouvelles. Je supposerai que l'on ait procédé de cette manière. Quant à l'équation (9) des forces vives, elle persiste, ainsi que sa différentielle $dT = dU$, malgré l'introduction de liaisons nouvelles indépendantes du temps. Cette différentielle peut se déduire de l'équation (11), en remplaçant la caractéristique δ par d, et l'on a, en conséquence,

$$(16)\qquad o = \sum_i \left(\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) q'_i .$$

Différentiant avec la caractéristique δ les équations (14) et (16), il viendra, après la suppression des termes nuls en vertu des formules (15),

$$(17)\qquad \delta\Psi - \delta^2 U = \sum_i \left(\delta\,\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \delta\frac{\partial T}{\partial q_i} - \delta\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \delta q_i,$$

$$(18)\qquad o = \sum_i \left(\delta\,\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \delta\frac{\partial T}{\partial q_i} - \delta\frac{\partial U}{\partial q_i} \right) q'_i .$$

Il faut remarquer que nous pourrions éliminer de nos formules l'élément dt du temps, en faisant usage de l'équation des forces vives; mais il est préférable ici de conserver le temps comme variable indépendante et d'exécuter seulement l'élimination de la variation δdt; c'est en vue de cette élimination que nous avons formé l'équation (18).

Je poserai

$$(19)\qquad \omega = \frac{1}{2T} \sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\,\delta q_k,$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ de l'indice k, et je ferai aussi, quel que soit l'indice k,

$$(20)\qquad \alpha_k = \delta q_k - \omega q'_k ;$$

alors, si l'on retranche, de l'équation (17), l'équation (18) multipliée par ω, on aura

$$(21)\qquad \delta\Psi - \delta^2 U = \sum_i \alpha_i \left(\delta\,\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} - \delta\frac{\partial T}{\partial q_i} - \delta\frac{\partial U}{\partial q_i} \right).$$

4. Les n quantités α que nous substituerons aux δq ne sont pas, comme celles-ci, toutes arbitraires; il existe entre elles une relation

linéaire. Effectivement, la formule (20) donne

$$\delta q_k = \alpha_k + \omega q'_k, \tag{22}$$

et, en portant cette valeur de δq_k dans la formule (19), on obtient

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} \alpha_k = 0, \tag{23}$$

à cause de l'équation

$$2T = \sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k, \tag{24}$$

qui résulte du théorème des *fonctions homogènes*.

La différentiation de l'équation (19) donne

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = &- \frac{1}{2T^2}\frac{dT}{dt}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q_k \\ &+ \frac{1}{2T}\sum_k \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_k}}{dt}\delta q_k + \frac{1}{2T}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k + \frac{1}{2T}\frac{\delta dt}{dt}\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum_k \frac{\partial T}{\partial q'_k}\delta q'_k = \delta T - \sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k}\delta q_k;$$

le deuxième et le troisième terme du second membre de la formule précédente ont donc pour somme

$$\frac{1}{2T}\left[\delta T + \sum_k \left(\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_k}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] = \frac{1}{2T}(\delta T + \Psi) = \frac{\delta U}{T},$$

ou encore, à cause de la formule (22),

$$\frac{1}{T}\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_k + \frac{\omega}{T}\frac{dU}{dt};$$

mais, par les formules (19) et (24), le premier et le dernier terme de l'expression de $\frac{d\omega}{dt}$ se réduisent respectivement à $-\frac{\omega}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{\omega}{T}\frac{dU}{dt}$

et à $\frac{\delta dt}{dt}$; faisant donc, pour abréger l'écriture,

$$\theta = \frac{1}{T}\sum_k \frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_k, \tag{25}$$

on aura

$$\frac{d\omega}{dt} = \theta + \frac{\delta dt}{dt}. \tag{26}$$

Si l'on pose généralement

$$dq'_i = q''_i\, dt,$$

la différentiation de l'équation (22) donnera ensuite

$$\delta q'_k = \frac{d\alpha_k}{dt} + \theta q'_k + \omega q''_k. \tag{27}$$

Cela posé, on a

$$\delta\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\delta q'_k + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q_k}\delta q_k\right),$$

et, à cause des formules (22), (27), en remarquant que $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$ est une fonction linéaire et homogène des quantités q',

$$\delta\frac{\partial T}{\partial q'_i} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q_k}\alpha_k\right) + \theta\frac{\partial T}{\partial q'_i} + \omega\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}. \tag{28}$$

Différentions cette équation (28) et divisons ensuite par dt; on aura après la suppression des termes en δdt, qui se détruisent,

$$\left\{\begin{aligned}\delta\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} &= \frac{d}{dt}\sum_k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt} + \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q_k}\alpha_k\right)\\ &\quad + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} + 2\theta\frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} + \omega\frac{d^2\frac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt^2}.\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Enfin on a aussi, par les formules (22) et (27), en faisant usage du théorème des fonctions homogènes,

$$(30)\qquad \delta\frac{\partial T}{\partial q_i}=\sum_k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q'_k}\frac{d\alpha_k}{dt}+\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}\alpha_k\right)+2\theta\frac{\partial T}{\partial q_i}+\omega\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_i}}{dt},$$

$$(31)\qquad \delta\frac{\partial U}{\partial q_i}=\sum_k\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}\alpha_k+\omega\frac{d\frac{\partial U}{\partial q_i}}{dt}.$$

Portons dans l'équation (21) les valeurs fournies par les formules (29), (30), (31). Les termes multipliés par ω disparaissent en vertu des équations (15), et le terme en $\frac{d\theta}{dt}$ s'évanouit aussi, en vertu de l'équation (23). Quant aux termes multipliés par θ, ils se réduisent à $2\theta\sum_i\frac{\partial U}{\partial q_i}\alpha_i$, à cause des formules (15), c'est-à-dire à

$$\frac{2}{T}\sum_i\sum_k\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k}\alpha_i\alpha_k.$$

D'après cela, si l'on fait, pour abréger,

$$(32)\quad H_{i,k}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}+\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}\right)}{dt}-\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{2}{T}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k},$$

on aura, après une transformation facile, et parce qu'il est permis d'intervertir les indices i et k sous le double signe $\sum$,

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}\delta\Psi-\delta^2 U=\frac{d}{dt}\left(\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\alpha_i\frac{d\alpha_k}{dt}\right)-\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt}\\ +\sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}\left(\alpha_i\frac{d\alpha_k}{dt}-\alpha_k\frac{d\alpha_i}{dt}\right)+\sum_i\sum_k H_{i,k}\alpha_i\alpha_k.\end{aligned}\right.$$

Cette expression de $\delta\Psi-\delta^2 U$ ne renferme, comme on voit, que les variations δq et leurs différentielles; elle est indépendante de la variation $\delta\, dt$ de l'élément du temps.

5. D'après la formule (23), parmi les n quantités α, $n-1$ seulement sont arbitraires, et l'on peut exprimer ces n quantités en fonction de $n-1$ indéterminées nouvelles. Je poserai, en conséquence,

quel que soit i,

$$\alpha_i = X_{i,1}\varpi_1 + X_{i,2}\varpi_2 + \ldots + X_{i,n-1}\varpi_{n-1},$$

ou, pour abréger,

$$\alpha_i = \sum_\lambda X_{i,\lambda}\varpi_\lambda; \tag{34}$$

l'indice λ doit recevoir les $n-1$ valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$; les $n-1$ fonctions ϖ demeurent arbitraires, tandis que je me réserve la faculté de choisir à volonté les $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$. J'établis dès à présent entre ces fonctions les $n-1$ relations comprises dans la formule

$$\sum_i \frac{\partial T}{\partial q'_i} X_{i,\lambda} = 0, \tag{35}$$

et en vertu desquelles les équations (23) se trouvent vérifiées.

Je ferai aussi

$$\alpha'_i = \sum_\lambda \frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\varpi_\lambda, \quad \alpha''_i = \sum_\lambda \frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}\varpi_\lambda, \tag{36}$$

et

$$\beta_i = \sum_\lambda X_{i,\lambda}\frac{d\varpi_\lambda}{dt}, \quad \gamma_i = \sum_\lambda \frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\frac{d\varpi_\lambda}{dt}, \tag{37}$$

en sorte que l'on aura

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \alpha'_i + \beta_i, \quad \frac{d\alpha'_i}{dt} = \alpha''_i + \gamma_i. \tag{38}$$

Alors si l'on pose

$$2A = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}(\alpha_i\beta_k + \alpha_k\beta_i), \tag{39}$$

$$2B = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\beta_i\beta_k, \tag{40}$$

puis

$$M = \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}(\alpha_i\gamma_k - \alpha'_k\beta_i) + \sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q_k}(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i), \tag{41}$$

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{N} = &\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_i \partial q'_k}\alpha_i\alpha''_k \\ &+\sum_i\sum_k \left[\frac{d\dfrac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial q'_i\partial q'_k}}{dt} + \frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial q'_i\partial q_k} - \frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial q'_k\partial q_i}\right]\alpha_i\alpha'_k \\ &+\sum_i\sum_k \mathrm{H}_{i,k}\alpha_i\alpha_k, \end{aligned}\right.$$

la formule (33) deviendra

$$(43)\qquad \delta\Psi - \delta^2\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{A}}{dt} - 2\mathrm{B} + \mathrm{M} + \mathrm{N}.$$

6. On a, par les formules (34), (36) et (37),

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_i\gamma_k - \alpha'_k\beta_i &= \sum_\lambda\sum_\mu \mathrm{X}_{i,\lambda}\frac{d\mathrm{X}_{k,\mu}}{dt}\left(\varpi_\lambda\frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu\frac{d\varpi_\lambda}{dt}\right), \\ \alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i &= \sum_\lambda\sum_\mu \mathrm{X}_{i,\lambda}\mathrm{X}_{k,\mu}\left(\varpi_\lambda\frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu\frac{d\varpi_\lambda}{dt}\right), \\ \alpha_i\alpha''_k &= \sum_\lambda\sum_\mu \mathrm{X}_{i,\lambda}\frac{d^2\mathrm{X}_{k,\mu}}{dt^2}\varpi_\lambda\varpi_\mu, \\ \alpha_i\alpha'_k &= \sum_\lambda\sum_\mu \mathrm{X}_{i,\lambda}\frac{d\mathrm{X}_{k,\mu}}{dt}\varpi_\lambda\varpi_\mu, \\ \alpha_i\alpha_k &= \sum_\lambda\sum_\mu \mathrm{X}_{i,\lambda}\mathrm{X}_{k,\mu}\varpi_\lambda\varpi_\mu. \end{aligned}\right.$$

Il s'ensuit que M est une fonction linéaire et homogène des $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ quantités $\varpi_\lambda\frac{d\varpi_\mu}{dt} - \varpi_\mu\frac{d\varpi_\lambda}{dt}$, et que N est une fonction homogène du deuxième degré des $n-1$ quantités ϖ, laquelle renferme, en conséquence, $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Je me propose de disposer des fonctions indéterminées $\mathrm{X}_{i,\lambda}$ de manière que l'on ait identiquement

$$(45)\qquad \mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0,$$

et l'on voit, par ce qui précède, qu'il suffit, pour remplir cet objet, d'établir entre les $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$, un nombre de relations égal à

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=(n-1)^2.$$

Ces $(n-1)^2$ équations, jointes aux $n-1$ qui sont comprises dans la formule (35) constituent un système de $n(n-1)$ équations simultanées qui déterminent, comme je vais le démontrer, les valeurs des $n(n-1)$ fonctions $X_{i,\lambda}$ dont nous avons besoin.

7. Les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations qu'il faut établir entre les fonctions $X_{i,\lambda}$ pour que M soit nulle sont comprises dans la formule suivante :

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\left(X_{i,\lambda}\frac{dX_{k,\mu}}{dt}-X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\right)\\ &\quad+\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}\right)X_{i,\lambda}X_{k,\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

formule que l'on peut employer, même dans le cas de $\lambda=\mu$, parce qu'alors elle se réduit à une identité.

Quant aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations nécessaires pour que N s'évanouisse, elles sont comprises dans la formule

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \partial q'_k}\left(X_{i,\lambda}\frac{d^2X_{k,\mu}}{dt^2}+X_{k,\mu}\frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}\right)\\ &\quad+\sum_i\sum_k\left(G_{i,k}X_{i,\lambda}\frac{dX_{k,\mu}}{dt}+G_{k,i}X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}\right)\\ &\qquad\qquad+2\sum_i\sum_k H_{i,k}X_{i,\lambda}X_{k,\mu}=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on fait, pour abréger,

$$(48)\qquad G_{i,k}=\frac{d\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q'_k}}{dt}+\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}.$$

Ainsi le système simultané qui détermine les fonctions $X_{i,\lambda}$ est composé des équations comprises dans les formules (35), (46) et

(47), où les indices λ, μ doivent recevoir les valeurs 1, 2,..., $(n-1)$. Mais la formule (47) peut être simplifiée; si, en effet, on en retranche l'équation (46) différentiée, on obtient la formule nouvelle

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_i\sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k} X_{k,\mu}\frac{d^2 X_{i,\lambda}}{dt^2}\\&+\sum_i\sum_k G_{k,i}X_{k,\mu}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\sum_k L_{k,i}X_{k,\mu}X_{i,\lambda}=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on a fait

$$(50)\qquad L_{k,i}=\frac{d\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_k\partial q_i}}{dt}-\frac{\partial^2 T}{\partial q_i\partial q_k}-\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\partial q_k}+\frac{2}{T}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

D'un autre côté, en différentiant deux fois l'équation (35), on a

$$(51)\qquad \sum_i \frac{\partial T}{\partial q'_i}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}X_{i,\lambda}=0,$$

$$(52)\quad \sum_i\sum_k\frac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}q'_k\frac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}+2\sum_i\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt}\frac{dX_{i,\lambda}}{dt}+\sum_i\frac{d^2\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt^2}X_{i,\lambda}=0.$$

Considérons λ comme constant et donnons à μ les valeurs 1, 2,..., $(n-1)$; les $n-1$ équations (49) et l'équation (52) pourront être résolues par rapport aux dérivées du second ordre $\dfrac{d^2X_{i,\lambda}}{dt^2}$. D'après un théorème connu, le déterminant formé avec les coefficients de ces dérivées est égal au produit de deux autres déterminants dont le premier formé avec les n^2 dérivées du deuxième ordre $\dfrac{\partial^2 T}{\partial q'_i\,\partial q'_k}$ n'est autre chose que l'*invariant* Δ de la force vive considérée comme fonction des seules variables q', et dont le second X a pour valeur

$$(53)\qquad X=\begin{vmatrix} X_{1,1} & X_{2,1} & \dots & X_{n,1}\\ X_{1,2} & X_{2,2} & \dots & X_{n,2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ X_{1,n-1} & X_{2,n-1} & \dots & X_{n,n-1}\\ q'_1 & q'_2 & \dots & q'_n\end{vmatrix}.$$

On aura donc des équations résultantes de la forme

$$(54) \qquad \frac{d^2 X_{i,\lambda}}{dt^2} = \frac{Z_{i,\lambda}}{\Delta X},$$

$Z_{i,\lambda}$ étant une fonction entière relativement aux $X_{k,\mu}$ et linéaire par rapport aux dérivées du premier ordre $\frac{dX_{k,\mu}}{dt}$. Quant aux coefficients, ils sont des fonctions déterminées de t, ainsi que l'invariant Δ, lequel ne peut jamais se réduire à zéro.

Si l'on donne à i les valeurs $1, 2, \ldots, n$, et à λ les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$, la formule (54) représentera un système de $n(n-1)$ équations différentielles auxquelles répondra certainement un système intégral renfermant $2n(n-1)$ constantes arbitraires. Ces arbitraires seront, si l'on veut, les valeurs que prennent les fonctions $X_{i,\lambda}$ et leurs premières dérivées pour $t = t_0$; mais, comme ces valeurs initiales doivent satisfaire aux équations (35), (51) et (46) après qu'on y a fait $t = t_0$, et que le nombre de ces équations est

$$2(n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

il s'ensuit que les expressions cherchées de nos fonctions $X_{i,\lambda}$ renfermeront seulement $\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$ constantes arbitraires.

On peut établir au surplus ce dernier point avec une entière rigueur. A cet effet, posons

$$(55) \qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} X_{k,\mu} \frac{dX_{i,\lambda}}{dt} + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_k \, \partial q_i} X_{i,\lambda} X_{k,\mu} = Y_{\lambda,\mu},$$

ce qui réduit l'équation (46) à

$$(56) \qquad Y_{\mu,\lambda} = Y_{\lambda,\mu},$$

et écrivons la formule (51) sous la forme suivante :

$$(57) \qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} q'_k \frac{dX_{i,\lambda}}{dt} + \sum_i \frac{d \dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} X_{i,\lambda} = 0.$$

Si l'on suppose λ constant, et que l'on donne à μ les valeurs 1,

$2, \ldots, (n-1)$, la formule (55) comprendra $n-1$ équations, qui, jointes à la formule (57) constitueront un système de n équations, dans lequel les coefficients des n dérivées $\frac{dX_{\iota,\lambda}}{dt}$ auront évidemment pour déterminant le produit ΔX, en sorte qu'on aura des résultats de la forme

$$\frac{dX_{\iota,\lambda}}{dt} = \frac{P_{\iota,\lambda}}{\Delta X}, \tag{58}$$

$P_{\iota,\lambda}$ désignant une fonction entière des quantités $Y_{\lambda,\mu}$ et $X_{k,\mu}$.

Cela posé, parmi les valeurs initiales des $n(n-1)$ fonctions $X_{\iota,\lambda}$, il y en a $n-1$ qui sont déterminées par les équations (35) en fonction des $(n-1)^2$ autres, et celles-ci demeurent arbitraires. En outre, à cause de la formule (56), les quantités $Y_{\lambda,\mu}$ sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$, et leurs valeurs initiales peuvent être regardées comme arbitraires; la formule (58) détermine alors les valeurs initiales des dérivées $\frac{dX_{\iota,\lambda}}{dt}$ en fonction des arbitraires choisies, lesquelles sont au nombre de

$$(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}.$$

Les intégrales générales du système (54) ne peuvent pas vérifier l'équation $X = 0$, et il est évident que l'on peut même, si l'on veut, choisir pour l'une des arbitraires la valeur de X qui répond à $t = t_0$. Il s'ensuit que les seconds membres des équations (58) auront, pour $t = t_0$, des valeurs finies et déterminées.

8. Il est nécessaire pour notre objet que les $n(n-1)$ fonctions $X_{\iota,\lambda}$, déterminées comme on vient de le dire, conservent des valeurs finies pour toutes les valeurs de t comprises entre t_0 et t_1. Il faut, en outre, que ces fonctions soient telles, qu'ayant fixé à volonté les variations δq, on puisse tirer des équations (34) des valeurs finies et déterminées pour les $n-1$ fonctions ϖ; car, s'il en était autrement, le système des arbitraires ϖ, que nous avons substitué au système des α, n'aurait pas la même généralité que celui-ci. Je dis que la condition dont je parle sera toujours remplie, tant que le déterminant X ne se réduira pas à zéro.

En effet, à cause des formules (23) et (35), les n équations contenues dans la formule (34) se réduisent à $n-1$ distinctes. Mais, pour en déduire les valeurs des $n-1$ quantités ϖ, on peut les employer toutes, en remplaçant les α par leurs valeurs tirées des formules (20), et laissant ω indéterminée ; la valeur qu'on obtiendra de cette manière pour ω devra coïncider avec celle que donne la formule (19). En procédant ainsi, la formule (34) devient

$$(59)\qquad \delta q_\iota = \sum_\lambda X_{\iota,\lambda}\varpi_\lambda + q'_\iota\,\omega,$$

et le déterminant formé avec les coefficients des variables ϖ_λ et ω dans les n équations que cette formule comprend est précisément X. La valeur de ϖ_λ restera donc finie tant que l'on n'aura pas $X=0$. Soit $X^{(k)}$ le déterminant obtenu en supprimant dans X la dernière ligne horizontale et la k^{ieme} colonne verticale, la valeur de ω tirée des équations (59) sera

$$\omega = \frac{1}{X}\sum_k X^{(k)}\delta q_k;$$

et, en la comparant avec celle que donne l'équation (19), on obtiendra la formule

$$(60)\qquad X^{(k)} = \frac{\partial T}{\partial q'_k}\,\frac{X}{2T},$$

laquelle est effectivement identique.

9. Nous sommes actuellement en mesure de procéder à la démonstration générale du principe que nous avons en vue.

Les fonctions $X_{\iota,\lambda}$ ayant été déterminées de manière que les équations (45) soient satisfaites, la formule (43) se réduit à

$$(61)\qquad \delta\Psi - \delta^2 U = \frac{dA}{dt} - 2B.$$

Si donc les fonctions $X_{\iota,\lambda}$ conservent des valeurs finies, et que le déterminant X ne se réduise pas à zéro, quand t varie de t_0 à t_1, la formule (12) pourra se mettre sous la forme

$$(62)\qquad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} 2B\,dt;$$

car A est une fonction homogène et linéaire des variations δq, lesquelles s'évanouissent, par hypothèse, pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$, avec les variations des coordonnées rectangulaires.

Or, par la propriété des fonctions homogènes dont nous avons déjà fait usage, on a

$$2T = \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 T}{\partial q'_i \, \partial q'_k} q'_i q'_k ;$$

donc la quantité $2B$ est précisément ce que devient la force vive $2T$ quand on remplace $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; il s'ensuit que $2B$ est essentiellement positive et que l'on a, en conséquence,

$$(63) \qquad \delta^2 V > 0,$$

comme nous l'avions annoncé.

A la vérité, la quantité $2B$ s'évanouirait si les quantités β étaient identiquement nulles; mais le déterminant X étant différent de zéro, cela ne peut arriver, d'après la première des formules (37), que si les dérivées $\frac{d\varpi_\lambda}{dt}$ sont toutes nulles, auquel cas les quantités ϖ_λ seraient constantes, et par conséquent nulles, puisqu'elles se réduisent à zéro pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$; les arbitraires α se réduiraient donc elles-mêmes à zéro, et les déplacements qui répondent à la caractéristique δ auraient lieu suivant les trajectoires mêmes des corps, hypothèse qui doit évidemment être écartée.

Le déterminant X est une fonction déterminée du temps t, ou, plus généralement, de la variable indépendante qu'on voudra choisir, et l'on a vu que cette fonction renferme dans son expression, comme les fonctions $X_{i,\lambda}$, $\frac{(n-1)(3n-2)}{2}$ constantes arbitraires. Au moyen de ces arbitraires, on peut faire en sorte, comme nous l'avons déjà dit, que X ait une valeur quelconque donnée pour $t = t_0$, limite inférieure de l'intégrale considérée V. Mais, quelles que soient les valeurs que l'on suppose aux arbitraires, le temps croissant à partir de t_0, il arrivera généralement que l'on aura $X = 0$ pour une certaine valeur de t, et il pourra se faire aussi que, pour une certaine valeur de t, quelqu'une des fonctions $X_{i,\lambda}$ cesse d'être finie. La plus petite valeur de t pour laquelle l'une ou l'autre de ces circonstances se présentera sera plus ou moins grande selon les valeurs attribuées aux arbitraires, mais elle pourra avoir une limite supérieure $t_0 + \tau$.

C'est donc alors seulement, pour les valeurs de t comprises entre t_0 et $t_0+\tau$, qu'on peut assigner aux fonctions $X_{i,\lambda}$ des valeurs finies qui ne réduisent pas à zéro le déterminant X; et, en conséquence, pour être en droit d'affirmer que l'inégalité (63) subsiste, il faut supposer

$$t_1 < t_0 + \tau.$$

L'existence du minimum est assurée tant que t_1 est inférieur à $t_0+\tau$; mais il peut arriver que, pour $t_1 = t_0+\tau$, il n'y ait plus de minimum. On sait que diverses questions de maximum et de minimum conduisent à des conclusions analogues.

§ II.

Examen du cas particulier des systèmes à liaisons complètes.

10. Le principe de la moindre action ne concerne que les systèmes dans lesquels le nombre des liaisons est inférieur de deux unités au moins au nombre des coordonnées des corps. Le cas de $n=2$, que je me propose d'examiner ici, peut donc être regardé comme celui des *systèmes à liaisons complètes*, au point de vue des propriétés relatives à la moindre action.

Dans ce cas, le nombre des fonctions $X_{i,\lambda}$ se réduit à deux, et, comme λ est toujours égal à 1, je supprimerai ce deuxième indice. Ainsi, en conservant toutes les notations dont j'ai fait usage, on aura

$$(1) \qquad \alpha_1 = X_1\varpi, \quad \alpha_2 = X_2\varpi,$$

et les fonctions X_1, X_2 seront liées entre elles par l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_1} X_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} X_2 = 0.$$

Le déterminant X a pour valeur

$$(3) \qquad X = q'_2 X_1 - q'_1 X_2,$$

et, à cause de la formule (2), on trouve, en faisant usage de la propriété des fonctions homogènes,

$$(4) \qquad X_1 = \frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q'_2} X, \quad X_2 = -\frac{1}{2T}\frac{\partial T}{\partial q'_1} X.$$

Quant à l'invariant Δ de la force vive, il a pour expression

$$(5)\qquad \Delta = \frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'}\right)^2,$$

et, si l'on pose

$$(6)\qquad \Theta = \sqrt{\frac{\Delta}{2T}}X,$$

la quantité que j'ai désignée par $2B$ aura pour valeur

$$2B = \left(\Theta \frac{d\varpi}{dt}\right)^2,$$

en sorte que l'expression de la variation du deuxième ordre de l'intégrale V est, dans le cas qui nous occupe,

$$(7)\qquad \delta^2 V = \int_{t_0}^{t_1} \left(\Theta \frac{d\varpi}{dt}\right)^2 dt.$$

L'équation différentielle qu'il faut joindre à l'équation (2) pour déterminer les fonctions X_1, X_2 est fournie par la formule (47) ou par la formule (49) du § I; cette équation est la suivante :

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2}X_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'}X_2\right)\frac{d^2 X_1}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_1' \partial q_2'}X_1 + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2}X_2\right)\frac{d^2 X_2}{dt^2} \\ &\quad + (G_{1,1}X_1 + G_{2,1}X_2)\frac{dX_1}{dt} + (G_{1,2}X_1 + G_{2,2}X_2)\frac{dX_2}{dt} \\ &\quad + [L_{1,1}X_1^2 + (L_{1,2} + L_{2,1})X_1X_2 + L_{2,2}X_2^2] = 0; \end{aligned}\right.$$

mais on a, par les formules (4) et (6),

$$(9)\qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{2T\Delta}}\frac{\partial T}{\partial q_2'}\Theta, \quad X_2 = -\frac{1}{\sqrt{2T\Delta}}\frac{\partial T}{\partial q_1'}\Theta,$$

et, en transportant ces valeurs de X_1, X_2 dans l'équation (8), on obtient, après la suppression du facteur Θ commun à tous les termes, l'équation différentielle du deuxième ordre en Θ

$$(10)\qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2} + K\Theta = 0.$$

Cette équation détermine Θ en fonction du temps et de deux constantes arbitraires; on en conclut immédiatement ensuite, par les équations (6) et (9), le déterminant X et les fonctions X_1, X_2. Quant au coefficient K, en faisant usage des équations différentielles du mouvement, il est facile de lui donner la forme suivante :

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{K} = & -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\frac{d^2\sqrt{\Delta}}{dt^2} + \frac{1}{2\mathrm{T}\Delta}\frac{d\left(\mathcal{L}_1\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1} + \mathcal{L}_2\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\right)}{dt} \\
& - \frac{1}{2\mathrm{T}\Delta}\left(\mathcal{L} + 2\mathcal{L}_1\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1} + 2\mathcal{L}_2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_2}\right) + \frac{3}{4\mathrm{T}^2\Delta}\mathfrak{M}^2 - \frac{1}{2\mathrm{T}\Delta}\mathfrak{N},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on a fait, pour abréger l'écriture,

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'^2_1}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'^2_2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}\right)^2 \\
& + 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} - 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} \\
& - 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_2\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_2\partial q_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} \\
& + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q^2_1}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q_1\partial q_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q^2_2}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right)^2, \\
\mathcal{L}_1 = & -\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'^2_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_2\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_2\partial q_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}, \\
\mathcal{L}_2 = & \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'^2_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2} - \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial q'_1\partial q_2}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}, \\
\mathfrak{M} = & \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_2} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q_1}, \\
\mathfrak{N} = & \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\right)^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q^2_2} - 2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q_1\partial q_2} + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}\right)^2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial q^2_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

§ III.

Application de la théorie précédente au mouvement elliptique des corps célestes.

11. Pour éclaircir la théorie que je viens de présenter, j'en ferai l'application au cas très-simple du mouvement elliptique des planètes, qui a été déjà l'objet des recherches de quelques géomètres.

Si l'on désigne par q_1 et q_2 deux coordonnées rectangulaires d'une planète, situées dans le plan même de l'orbite, on pourra poser

$$(1) \qquad 2T = q_1'^2 + q_2'^2;$$

et l'on aura

$$\frac{\partial T}{\partial q_1'} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial q_2'} = q_2', \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0,$$

puis

$$\Delta = 1,$$

et

$$\mathfrak{L} = 0, \quad \mathfrak{L}_1 = 0, \quad \mathfrak{L}_2 = 0.$$

La formule (11) du § II donne en conséquence la valeur suivante du coefficient K :

$$(2) \qquad K = \frac{3\left(q_1'\frac{\partial U}{\partial q_2} - q_2'\frac{\partial U}{\partial q_1}\right)^2}{(q_1'^2 + q_2'^2)^2} - \frac{q_1'^2\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} - 2q_1'q_2'\frac{\partial^2 U}{\partial q_1\,\partial q_2} + q_2'^2\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}}{q_1'^2 + q_2'^2}.$$

Soient r le rayon vecteur de la planète, e l'excentricité de l'orbite elliptique, a le demi-grand axe, et n le moyen mouvement; on aura

$$(3) \qquad U = \frac{n^2 a^3}{r},$$

puis

$$(4) \qquad q_1 q_2' - q_2 q_1' = na^2\sqrt{1 - e^2}, \quad q_1'^2 + q_2'^2 = \frac{n^2 a^2(2a - r)}{r}.$$

Au moyen de ces formules, l'expression (2) de K se réduit à

$$(5) \qquad K = n^2\frac{a^3}{r^3} - 3n^2\frac{a^5(1 - e^2)(a - r)}{r^4(2a - r)^2}.$$

12. L'objet que nous avons ici en vue est l'intégration de l'équation (10) du § II, savoir :

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + K\Theta = 0;$$

mais, pour exécuter cette intégration, il est nécessaire de transformer l'équation. Soient v l'*anomalie vraie* de la planète, et ψ l'*anomalie vraie* du point de l'ellipse diamétralement opposé au lieu de la planète; c'est l'angle ψ qu'il convient de choisir pour variable indépendante. On a, par la théorie du mouvement elliptique ou par les formules (4),

$$(6) \qquad dt = \frac{r^2\,dv}{na^2\sqrt{1-e^2}}, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v};$$

on a aussi

$$(7) \qquad 2a - r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi},$$

et

$$(8) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}v\operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi = -\frac{1+e}{1-e};$$

d'où l'on conclut

$$(9) \qquad dv = \frac{2a-r}{r}\,d\psi, \quad dt = \frac{2ar-r^2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,d\psi.$$

Cela posé, je ferai

$$(10) \qquad \Theta = \sqrt{2ar-r^2}\,\Omega,$$

d'où il résulte

$$(11) \qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{n^2a^4(1-e^2)}{2ar-r^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}\frac{d^2\Omega}{d\psi^2} - \Omega\frac{d^2\dfrac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}}{d\psi^2}\right];$$

on trouve d'ailleurs, par les formules précédentes,

$$(12) \qquad \sqrt{2ar-r^2}\,\frac{d^2\dfrac{1}{\sqrt{2ar-r^2}}}{d\psi^2} = \frac{(2a-r)^2}{a(1-e^2)r} - \frac{3a(a-r)}{r^2} - 1,$$

et en portant les valeurs que nous venons de trouver dans l'équation en Θ, celle-ci devient

$$(13) \qquad \frac{d^2\Omega}{d\psi^2} + \Omega = 0.$$

Soit ψ_0 la valeur de l'anomalie ψ à l'époque $t = t_0$, limite inférieure de l'intégrale que nous voulons considérer; l'intégrale générale de l'équation (13) sera

$$(14) \qquad \Omega = \frac{\Omega_0}{\sin g}\sin(\psi - \psi_0 + g),$$

Ω_0 et g étant les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration; la première de ces arbitraires est évidemment la valeur de à l'époque t_0. Comme on a

$$(15) \qquad X = na(2a - r)\Omega,$$

si l'on veut revenir au déterminant X, et que l'on désigne par X_0, r_0 les valeurs de X, r pour $t = t_0$, on aura, au lieu de la formule (14),

$$(16) \qquad X = \frac{X_0}{\sin g} \frac{2a - r}{2a - r_0} \sin(\psi - \psi_0 + g).$$

Il est évident qu'on peut toujours ramener l'angle arbitraire g entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, π désignant la demi-circonférence dont le rayon est 1. D'après cela, si g est négatif et égal à $-\gamma$, le temps croissant à partir de t_0, le déterminant X s'annulera pour $\psi = \psi_0 + \gamma$, γ étant $< \frac{\pi}{2}$. Mais si l'on donne à g une valeur positive, X ne s'évanouira qu'à l'instant où l'on aura

$$\psi = \psi_0 + \pi - g.$$

Et, puisque g est arbitraire, on peut lui supposer une valeur aussi petite que l'on voudra, pourvu cependant que cette valeur ne soit pas zéro. Si donc on désigne par $t_0 + \tau$ la valeur du temps t lorsque l'anomalie ψ devient égale à $\psi_0 + \pi$, on pourra assigner aux fonctions X_1, X_2 des valeurs finies qui n'annulent le déterminant X pour aucune valeur de t comprise entre t_0 et t_1, pourvu que l'on ait $t_1 < t_0 + \tau$, et, en conséquence, l'intégrale V sera un minimum. Cette conclusion s'accorde avec les considérations générales que j'ai présentées à la fin du § I.

L'intervalle de temps τ, pendant lequel le principe de la moindre action subsiste certainement d'après mon analyse, répond à un arc d'ellipse qui peut être inférieur, égal ou supérieur à la moitié de l'orbite. L'origine a de cet arc ayant été choisie à volonté, pour avoir son extrémité α il suffit de mener la corde $a\alpha$ par le *deuxième* foyer de l'ellipse, car il est évident que relativement à ce deuxième foyer, pris pour origine, les coordonnées de la planète analogues à r et v sont $2a - r$ et $\psi - \pi$.

13. Si l'on a

$$t_1 = t_0 + \tau, \quad \text{ou} \quad t_1 > t_0 + \tau,$$

le minimum n'a plus lieu. En toute rigueur, cette proposition ne résulte pas de l'impossibilité de déterminer des fonctions X_1, X_2 répondant à un déterminant X qui ne s'annule pas quand t varie de t_0 à t_1; mais on peut l'établir très-simplement par le moyen de nos formules.

Dans le cas qui nous occupe, la formule (61) du § I donne

$$\delta\Psi - \delta^2 U = \frac{d(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)}{dt} - (\beta_1^2 + \beta_2^2), \tag{17}$$

et l'on a

$$\alpha_1 = X_1\varpi, \quad \alpha_2 = X_2\varpi, \quad \beta_1 = X_1\frac{d\varpi}{dt}, \quad \beta_2 = X_2\frac{d\varpi}{dt}.$$

On a aussi

$$\frac{X}{2T} = \frac{r}{na}\Omega,$$

et, par suite,

$$X_1 = \frac{q'_2 r}{na}\Omega, \quad X_2 = -\frac{q'_1 r}{na}\Omega.$$

Si donc on fait

$$\Omega\varpi = \theta, \tag{18}$$

il viendra

$$\alpha_1 = \frac{q'_2 r}{na}\theta, \quad \alpha_2 = -\frac{q'_1 r}{na}\theta, \tag{19}$$

puis, en remplaçant dt par sa valeur tirée de la seconde des formules (9),

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= q'_2\frac{a\sqrt{1-e^2}}{2a-r}\left(\frac{d\theta}{d\psi} - \theta\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right), \\ \beta_2 &= -q'_1\frac{a\sqrt{1-e^2}}{2a-r}\left(\frac{d\theta}{d\psi} - \theta\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right), \end{aligned}\right. \tag{20}$$

et, à cause de la seconde des formules (4),

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = na^2\sqrt{1-e^2}\left(\theta\frac{d\theta}{d\psi} - \theta^2\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right).$$

On conclut de là, en faisant usage des mêmes formules,

$$\frac{d(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)}{dt} = na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\left(\theta\frac{d\theta}{d\psi}\right)}{d\psi} - 2\theta\frac{d\theta}{d\psi}\frac{d\log\Omega}{d\psi} - \theta^2\frac{d^2\log\Omega}{d\psi^2}\right]\frac{d\psi}{dt},$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - 2\theta\frac{d\theta}{d\psi}\frac{d\log\Omega}{d\psi} + \theta^2\left(\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right)^2\right]\frac{d\psi}{dt};$$

on a d'ailleurs, par la formule (13),

$$\frac{d^2\log\Omega}{d\psi^2}+\left(\frac{d\log\Omega}{d\psi}\right)^2=-1;$$

en sorte que la formule (17), multipliée par dt, devient

$$(21)\quad (\delta\Psi-\delta^2\mathrm{U})dt=na^2\sqrt{1-e^2}\left[\frac{d\left(\theta\frac{d\theta}{d\psi}\right)}{d\psi}-\frac{d\theta^2}{d\psi^2}+\theta^2\right]d\psi.$$

Cette formule ne renferme plus la fonction Ω, et elle coïncide avec celle qu'aurait donnée la formule générale (33) du § I.

Comme on a

$$(q'_2\alpha_1-q'_1\alpha_2)dt=dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2;$$

les formules (19) et (6) donnent

$$\theta=a\sqrt{1-e^2}\,\frac{dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2}{r^2(2a-r)dv};$$

mais, à cause de

$$q_1=r\cos v,\quad q_2=r\sin v,$$

on a

$$dq_2\delta q_1-dq_1\delta q_2=r(\delta r dv-dr\delta v);$$

donc

$$(22)\qquad \theta=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r(2a-r)}\left(\delta r-\frac{dr}{dv}\delta v\right),$$

ou, à cause de $\frac{\delta v}{dv}=\frac{\delta\psi}{d\psi}$,

$$(23)\qquad \theta=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r(2a-r)}\left(\delta r-\frac{dr}{d\psi}\delta\psi\right).$$

La quantité θ s'annulant aux limites, c'est-à-dire pour $\psi=\psi_0$ et pour $\psi=\psi_1$, la formule (12) du § I et notre formule (21) donneront

$$(24)\qquad \delta^2\mathrm{V}=na^2\sqrt{1-e^2}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2}-\theta^2\right)d\psi.$$

Cette expression de la variation $\delta^2\mathrm{V}$ subsiste, quelles que soient les limites ψ_0, ψ_1; elle nous permettra de justifier l'assertion que nous avons émise. Si l'on a $\psi_1<\psi_0+\pi$, on pourra poser $\theta=\Omega\varpi$, Ω ayant la valeur donnée par la formule (14), et l'on ramènera ainsi la formule (24) à la forme suivante :

$$\delta^2 V = na^2\sqrt{1-e^2}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\Omega\,\frac{d\varpi}{d\psi}\right)^2 d\psi,$$

que nous avions d'abord obtenue.

14. Le résultat auquel nous venons de parvenir peut se traduire en un théorème d'analyse qui mérite d'être remarqué, savoir :

Si θ désigne une fonction qui reste continue quand la variable ψ croît de ψ_0 à ψ_1, et qui s'annule pour $\psi = \psi_0$ ainsi que pour $\psi = \psi_1$, l'intégrale

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi \tag{25}$$

ne peut jamais être nulle ni négative lorsqu'on a

$$\psi_1 < \psi_0 + \pi,$$

à moins que la fonction θ ne se réduise identiquement à zéro.

J'ajoute que :

1° *Si l'on a*

$$\psi_1 = \psi_0 + \pi,$$

la même intégrale peut être nulle, mais non négative;

2° *Si l'on a*

$$\psi_1 > \psi_0 + \pi,$$

l'intégrale peut être positive, nulle ou négative.

Considérons d'abord le cas de $\psi_1 = \psi_0 + \pi$, et désignons par ε une quantité infiniment petite. L'intégrale (25) pourra se décomposer en deux parties, savoir :

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi + \int_{\psi_1-\varepsilon}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi. \tag{26}$$

Comme θ s'annule pour $\psi - \psi_1$ et qu'elle est fonction continue de ψ, elle prendra une valeur infiniment petite pour $\psi = \psi_1 - \varepsilon$; je représenterai cette valeur par $\eta(\psi_1 - \psi_0 - \varepsilon)$ ou $\eta(\pi - \varepsilon)$, et je transformerai la première de nos deux intégrales en posant

$$\theta = \lambda + \eta(\psi - \psi_0), \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{d\psi} = \frac{d\lambda}{d\psi} + \eta.$$

Alors l'intégrale (25) ou la somme (26) se trouvera décomposée comme il suit :

$$(27) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} \left(\frac{d\lambda^2}{d\psi^2} - \lambda^2\right) d\psi + 2\eta \int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} \frac{d\lambda}{d\psi}\, d\psi \\ \displaystyle + \int_{\psi_0}^{\psi_1-\varepsilon} [\eta^2 - 2\eta\lambda(\psi-\psi_0) + \eta^2(\psi-\psi_0)^2]\, d\psi \\ \displaystyle + \int_{\psi_1-\varepsilon}^{\psi_1} \left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2} - \theta^2\right) d\psi. \end{cases}$$

La variable nouvelle λ s'annule pour $\psi = \psi_0$ et pour $\psi = \psi_1 - \varepsilon$; d'ailleurs $\psi_1 - \varepsilon < \psi_0 + \pi$; donc la première partie de la somme (27) ne peut être ni nulle ni négative, mais elle peut être infiniment petite. La deuxième partie est nulle, puisque λ s'évanouit aux limites, et la troisième partie, qui peut avoir un signe quelconque, est infiniment petite, à cause du facteur η qui multiplie tous ses termes. Quant à la dernière partie de la somme (27), elle ne peut être négative que si elle est infiniment petite, puisque θ est infiniment petit entre les limites $\psi_1 - \varepsilon$ et ψ_1. Il résulte de là que la somme (27) ou l'intégrale (25) peut être nulle, mais qu'elle ne saurait être négative.

En particulier l'intégrale (25) sera nulle si l'on prend

$$\theta = c \sin(\psi - \psi_0),$$

c étant une constante arbitraire.

15. Si l'on a $\psi_1 > \psi_0 + \pi$, l'intégrale (25) peut être positive, nulle ou négative; c'est ce qu'il est facile d'établir par un exemple. Soit

$$\theta = c \sin^m\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right),$$

c étant une constante; l'intégrale (25) aura pour valeur

$$c^2 m^2 \frac{\pi^2}{(\psi_1 - \psi_0)^2} \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m-2}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) \cos^2\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi$$
$$- c^2 \int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m}\left(\pi \frac{\psi - \psi_0}{\psi_1 - \psi_0}\right) d\psi.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m}\left(\pi\,\frac{\psi-\psi_0}{\psi_1-\psi_0}\right) d\psi = \mathrm{H}_m,$$

on trouvera aisément, en supposant $m > \frac{1}{2}$,

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sin^{2m-2}\left(\pi\,\frac{\psi-\psi_0}{\psi_1-\psi_0}\right)\cos^2\left(\pi\,\frac{\psi-\psi_0}{\psi_1-\psi_0}\right) d\psi = \frac{1}{2m-1}\,\mathrm{H}_m,$$

et il s'ensuit que l'on a

$$(28)\quad \int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2}-\theta^2\right) d\psi = \frac{c^2\pi^2}{(2m-1)(\psi_1-\psi_0)^2}\,\mathrm{H}_m(m-m')(m-m''),$$

en posant

$$m' = \left(\frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\right)^2 - \frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\right)^2-1},$$

$$m'' = \left(\frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\right)^2 + \frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{\pi}\right)^2-1};$$

il est facile de s'assurer que m' est $> \frac{1}{2}$. La formule (28) montre que l'intégrale

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1}\left(\frac{d\theta^2}{d\psi^2}-\theta^2\right) d\psi$$

est positive si l'on prend $m < m'$ ou $m > m''$; elle est nulle si l'on fait $m = m'$ ou $m = m''$; enfin elle est négative si l'on donne à m une valeur comprise entre m' et m''.

Si l'on suppose $\psi_1 = \psi_0 + \pi$, on a $m' = m'' = 1$; alors l'intégrale s'annule pour $m = 1$, et elle est positive pour toute autre valeur de m. Enfin, lorsque $\psi_1 < \psi_0 + \pi$, les quantités m', m'' sont des imaginaires conjuguées, et l'intégrale est constamment positive, ce qui s'accorde avec la proposition du n° 14.

On peut conclure de ces développements que, dans le cas du mouvement elliptique des planètes, le principe de la moindre action ne s'applique pas au delà de la limite que nous avons assignée.