BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 75-89

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__75_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. GERONO, professeur de Mathématiques, et J. BOURGET, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université, Dr ès sciences. 2e série, t. IX; 1870. Paris, Gauthier-Villars (1).

LAGUERRE. — *Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre.* (8 p.)

Démonstration d'une propriété complexe qui comprend comme cas particulier les théorèmes suivants :

Le long d'une même ligne géodésique, tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale (Joachimsthal);

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

RÉALIS (S.). — *Démonstration d'une formule de trigonométrie.* (8 p.)

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Étude de la sphère.* (3 p.)

Transformation des courbes sphériques équivalente à plusieurs transformations successives par rayons vecteurs réciproques.

ALLÉGRET. — *Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes.* (2 p.)

Les courbes étudiées ont pour équation

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

BELLAVITIS (G.). — *Application du calcul des équipollences à la solution de deux problèmes.* (2 p.)

(1) Publication fondee en 1842 par MM. Gerono et Terquem, continuée à partir de 1863 par MM. Gerono et Prouhet. Paraît tous les mois par cahiers in-8° de 3 feuilles. La première serie se compose de 20 volumes et se termine en 1861; la deuxième comprend 9 volumes. Prix, par an : 15 fr.

Brisse (Ch.). — *Démonstration d'un théorème relatif aux séries* (2 p.).

Il s'agit d'un théorème de Gauss relatif au cas douteux dans lequel

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Jouanne. — *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal.* (1 p.)

Lucas (Éd.). — *Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.* (4 p.)

Note intéressante par la nature des procédés de démonstration.

Neuberg. — *Triangles et coniques combinés.* (12 p.)

Francoise (Ém.). — *Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de Géométrie élémentaire.* (8 p.)

Construire un polygone connaissant les sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur ses côtés.

Serret (Paul). — *Sur un théorème de Ferrers.* (10 p.)

Enveloppe de la pédale d'un point du cercle circonscrit à un triangle.

Surface enveloppe du plan tangent au sommet des paraboloïdes inscrits à l'hexaèdre.

Hoüel (J.). — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles.* (3 p.)

Painvin. — *Note sur la transformation homographique.* (10 p.)

L'auteur démontre que deux figures de l'espace homographiques ne peuvent pas en général être amenées à être homologiques.

Pour que cette transformation réussisse, il faut et il suffit que la courbe, qui dans l'une d'elles correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle.

Cette condition étant remplie, il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.

Anonyme. — *Note relative à quelques cas de convergence ou de divergence des séries.* (5 p.)

L'auteur examine le cas douteux dans lequel

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Il donne une démonstration simple de la règle connue par laquelle on voit si la série est convergente ou divergente.

Il déduit ensuite de sa démonstration la règle de Gauss.

CAMPOUX (P. DE). — *Des invariants au point de vue des Mathématiques spéciales* (*suite et fin*). (10 p.)

L'auteur s'occupe de l'équation du second degré à trois variables, ramenée à la forme

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F = 0.$$

Il démontre que cette équation a trois invariants, et seulement trois,

$$P = -(S + S' + S''), \quad Q = S'S'' + S''S + SS', \quad R = -SS'S''.$$

Il en donne l'interprétation géométrique.

WELSCH (J.). — *Démonstration élémentaire d'un théorème de Monge.* (1 p.)

Il s'agit de ce théorème : La sphère est la seule surface dont tous les points sont des ombilics.

BÉZIAT (L.). — *Solutions de quelques problèmes célèbres par la méthode des équipollences du professeur Giusto Bellavitis.* (12 p.)

Les problèmes résolus sont les suivants :

Inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés ou aient des longueurs données;

Circonscrire à un cercle un polygone dont les sommets soient situés sur des droites données ou aient des angles de grandeurs données;

Étant donnés trois points, trouver la base commune des triangles dont les sommets sont ces trois points, dont les différences des angles au sommet sont données et dont les rapports des quotients des côtés sont aussi donnés;

On donne un cercle et deux points : inscrire dans le cercle un triangle isoscèle, dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés.

LAGUERRE. — *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie.* (12 p.)

Reproduction de la première leçon d'un cours fort intéressant professé à la salle Gerson.

LAGUERRE. — *Sur la règle des signes en Géométrie.* (5 p.)

L'auteur arrive à cette conclusion :

Lorsqu'un théorème relatif à des segments et à des angles, situés d'une façon quelconque dans un plan, est convenablement et complétement énoncé, il doit toujours comporter la règle des signes.

HERMANN. — *Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques ou transcendantes.* (8 p.)

Perfectionnement de la méthode de Cauchy pour le calcul par approximations successives des racines d'une équation.

TRANSON (A.). — *Lois des coniques surosculatrices dans les surfaces* (6 p.)

Une conique osculatrice a généralement cinq points infiniment voisins, communs avec la surface; on nomme *conique osculatrice* celle qui a plus de cinq points communs. L'auteur démontre que, dans l'ensemble des sections planes contenant une même droite normale ou oblique, mais non tangente à la surface, il y a toujours neuf de ces sections qui admettent des coniques surosculatrices (ellipses ou hyperboles), et que, dans l'ensemble des sections menées par une même tangente, il y en a toujours trois qui jouissent de cette propriété.

CATALAN (E.). — *Sur quelques développements en séries.* (3 p.)

L'auteur somme quelques séries curieuses au moyen du théorème suivant, si l'on a

$$f(x) = af(bx) + \alpha\varphi(x),$$

on en déduit

$$f(x) = \lambda + \alpha \lim.[\varphi(x) + a\varphi(bx) + \ldots + a^{n-1}\varphi(b^{n-1}x)],$$

où

$$\lambda = \lim_{n=\infty}. [a^n f(b^n x)],$$

et où a, b, α sont des constantes données.

PAINVIN (L.). — *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.* (25 p.)

M. Painvin démontre, par l'analyse, les propriétés diverses de cette courbe dont Cremona a fait antérieurement une étude géométrique dans le *Journal de Crelle*, t. XLIV.

LINDELÖF (L.). — *Problème de Géométrie.* (5 p.)

Dans un triangle, plan ou sphérique, donné, inscrire un autre triangle de périmètre minimum.

LAISANT (A.) et BEAUJEUX (É.). — *Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques.* (25 p.)

Cette étude renferme des résultats intéressants sur les caractères de divisibilité et sur les fractions périodiques.

LAGUERRE. — *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie.* (13 p.)

Cet article est la suite de celui que nous avons signalé ci-dessus. M. Laguerre indique une nouvelle méthode de représentation par deux points réels d'un point imaginaire, et il fait quelques applications de son système.

CAYLEY. — *Sur la construction de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de Soleil.* (3 p.).

Cet article est suivi d'une Note de M. Laguerre, indiquant que le théorème de Casey, sur lequel Cayley appuie la solution du problème précédent, avait été énoncé, en 1862, par M. Moutard.

ALEXANDRE (R). — *Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième degré.* (6 p.)

Simplification de la méthode de Tschirnhaus.

LUCAS (Éd.). — *Note sur les coefficients du binôme de Newton.* (3 p.)

Somme des coefficients pris de trois en trois dans le cas où la puissance a l'une des formes $6n$, $6n+3$, $6n+1$, $6n+4$, $6n+5$.

LEMOINE (E.). — *Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle.* (5 p.)

NEUBERG (J.). — *Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre.* (33 p.)

Ce travail, remarquable par l'élégance des calculs, renferme des résultats importants et la démonstration de plusieurs théorèmes énoncés pour la première fois par le capitaine Faure.

LECLERT (Ém.). — *Propriétés de la parabole.* (3 p.)

CARNOY. — *Note sur le triangle circonscrit à une conique.* (2 p.)

LAGUERRE. — *Sur l'équation du troisième degré.* (6 p.)

Painvin. — *Note sur la construction géométrique des normales à une conique.* (6 p.)

Lemoine (L.). — *Note sur une question d'Arithmétique.* (3 p.)

Toute puissance entière μ d'un nombre entier l peut être obtenue en prenant la somme de l^k termes consécutifs des nombres impairs μ, k, l étant entiers et positifs et $\mu \geqq 2k$.

Gilbert (Ph.). — *Sur les courbes planes à équations trinômes.* (2 p.)

Hoüel (J.). — *Article bibliographique sur le* Compendium der höheren Analysis *de M. Schlömilch.* (7 p.).

Cet article renferme des considérations fort justes sur les principes fondamentaux de la méthode infinitésimale.

Gerono. — *Note sur une application de la méthode des déterminants.* (7 p.)

Démonstration élégante des conséquences connues que l'on tire des six équations liant entre eux les neuf cosinus a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' des angles que trois axes rectangulaires font avec trois autres axes rectangulaires.

Durrande (H.). — *Note sur les surfaces du quatrième ordre.* (14 p.)

Les surfaces étudiées par l'auteur sont considérées comme lieux des intersections successives des surfaces correspondantes de deux faisceaux de surfaces du second degré, liées par une relation homographique.

Ruchonnet (Ch.). — *Expression de la distance d'une courbe à la sphère osculatrice.* (14 p.)

En nommant :

ε l'angle de contingence,
η l'angle de torsion,
ds l'élément de l'arc de la courbe,
dS l'élément de l'arête de rebroussement,
R le rayon de la sphère osculatrice,

l'auteur trouve

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24R}.$$

Saltel (L.). — *Sur la détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre.* (6 p.)

Gerono. — *Note sur la résolution, en nombres entiers et positifs, de l'équation*

$$x^m = y^n + 1.$$

(2 p.).

Moutier (J.). — *Sur la fonction potentielle et le potentiel.* (22 p.)

Étude géométrique élémentaire avec applications, destinée aux élèves de Mathématiques spéciales.

Joachimsthal. — *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point à un ellipsoïde.* (9 p.)

Cette étude, qui jouit d'une juste célébrité, est un excellent exercice sur la théorie générale des équations algébriques.

Bourget (J.). — *Note sur la théorie des racines carrées et cubiques.* (8 p.)

Dans cette Note l'auteur montre comment on peut généraliser le procédé habituellement suivi, en partageant la racine en deux parties quelconques, mille et unités, centaines et unités, dizaines et unités, etc.. Il tire, comme corollaire, les méthodes abrégées que l'on donne pour l'extraction de la racine carrée et de la racine cubique.

Lemonnier (H.). — *Étude analytique sur la cyclide.* (14 p.)

Le Besgue (V.-A.). — *Sur l'équation du troisième degré.* (2 p.)

Lemonnier (H.). — *Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion.* (2 p.)

Lemonnier (H.). — *Solution d'une question géométrique.* (5 p.)

Un cône du second degré étant donné par son sommet et une section plane, en construire les axes au moyen de coniques.

Bourget (J.). — *Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin.* (3 p.)

$\varpi(x)$ désignant une fonction arbitraire assujettie à la seule condition de $\varpi(0) = 0$, la formule de Maclaurin se met sous la forme

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(0) + R,$$

$$R = \frac{\varpi(x)}{\varpi'[(1-\theta)x]}\,\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^n(\theta x).$$

Cette forme, du reste, comprend toutes les formes connues et pourrait en donner d'autres.

Bourget (J.). — *Note sur la racine carrée de nombres approchés.* (5 p.)

Dostor (Georges). — *Propriété des bissectrices des angles d'un triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole.* (4 p.)

Lemonnier (H.). — *Problèmes de Géométrie analytique.* (4 p.)

ATTI dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei [1].

T. XXI, 1868.

Respighi (L.). — *Sur la latitude de l'Observatoire romain, au Capitole.* (44 p.)

Par une discussion approfondie de ses observations, l'auteur arrive à une valeur moyenne générale de $41°53'33'',72$, qui ne s'écarte que de quelques dixièmes de seconde des moyennes partielles, ainsi que des déterminations obtenues par Calandrelli et par le P. Secchi.

Secchi (A.). — *Sur les spectres prismatiques des étoiles fixes.* (3 p.)

Ces spectres se réduisent à trois types correspondant à trois classes d'étoiles : 1° étoiles blanches (Sirius, Wéga, Altaïr, etc.); 2° étoiles jaunes (le Soleil, la Chèvre, etc.); 3° étoiles fortement colorées (α d'Orion, Aldébaran, etc.).

Respighi (L.). — *Sur la vitesse de la lumière, déduite des éclipses des satellites de Jupiter et de l'aberration des étoiles.* (17 p.)

Discussion des théories proposées par Klinkerfues et par Hoek pour expliquer la différence des résultats obtenus par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter et par l'aberration.

Respighi (L.). — *Sur le cratère lunaire de* Linné. (4 p.)

L'auteur n'admet pas comme prouvés les changements signalés par plusieurs astronomes dans la forme de ce cratère.

Secchi (A.). — *Seconde série de mesures micrométriques faites à l'équatorial de Merz, au Collége romain, de* 1863 *à* 1866 *inclusivement. Étoiles doubles et nébuleuses.* (15 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 19.

Spina (C.). — *Sur le nombre des valeurs des fonctions algébriques rationnelles qui contiennent un nombre donné de lettres; et comment on peut former les fonctions algébriques rationnelles, pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs, quand on permute les lettres entre elles.* (57 p.)

Les méthodes employées par les géomètres qui ont travaillé jusqu'ici sur ce sujet manquaient de la généralité nécessaire pour embrasser le problème dans toute son étendue. L'auteur a eu l'idée de voir si, en reprenant la question au point où l'avait laissée Lagrange (*Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1770 et 1771. — *Œuvres*, t. III, p. 205-421), il ne serait pas possible d'obtenir par une voie plus directe des conclusions plus générales et plus fécondes. Il ne s'est occupé, dans ce travail, que des fonctions algébriques rationnelles, réservant pour un second Mémoire l'application de sa méthode aux fonctions algébriques irrationnelles.

En partant de la théorie générale des combinaisons, il en déduit le nombre des valeurs d'une fonction algébrique rationnelle; il développe, d'après Poinsot, la théorie des périodes cycliques, en la rattachant à celle des polygones. Passant ensuite de la solution directe de la question à la solution inverse, c'est-à-dire à la recherche de la fonction de m lettres données qui admet un nombre donné N de valeurs, il démontre d'une manière tout à fait élémentaire le théorème de Bertrand, que si la fonction a moins de m valeurs, elle n'en a pas plus de 2, et la nouvelle démonstration ne repose sur aucun *postulatum*.

Respighi (L.). — *Sur la scintillation des étoiles.* (17 p.)

ANNALEN der Physik und Chemie, herausgegeben von J.-C. Poggendorff. Bd. CXL, 1870. — Leipzig, Ambr. Barth [1].

Ketteler (Ed.). — *Sur les constantes qui entrent dans les formules de dispersion.*

En traitant d'une manière très-générale le mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, Cauchy est parvenu à établir une relation entre

---

[1] *Annales de Physique et de Chimie*, publiées par M. Poggendorff, 1870.

l'indice de réfraction n et la longueur d'onde l d'un rayon lumineux qui traverse un milieu isotrope. Cette relation est contenue dans la formule

$$\frac{1}{n^2} = \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{l^2} + \frac{\mathrm{C}}{l^4} + \frac{\mathrm{D}}{l^6} + \ldots.$$

En désignant par λ la longueur d'ondulation dans le vide, on a $\lambda = nl$, et, en remplaçant l par sa valeur,

$$\frac{1}{n^2} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{n^2}{\lambda^2} + \mathrm{C}\frac{n^4}{\lambda^4} + \ldots.$$

Pour obtenir n en fonction de λ, Cauchy renverse la série et arrive à la formule bien connue

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \ldots.$$

Toutefois, ce renversement n'est justifié que par une hypothèse sur la décroissance rapide des coefficients A, B, C,.... M. Christoffel [1] s'est efforcé de combler la lacune que présentait le raisonnement de Cauchy; il a montré que, dans la plupart des cas, on peut attribuer aux deux coefficients A, B des valeurs finies du même ordre, et négliger tous les suivants. En outre, il établit que A est une quantité toujours positive, et B toujours négative, ce qui permet d'exprimer n en fonction de λ à l'aide de l'équation

$$\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0,$$

où n_0, λ_0 sont deux constantes qui caractérisent le milieu réfringent. On tire de là

$$\frac{n_0}{n}\sqrt{2} = \sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}.$$

M. Briot a repris la question dans ses *Essais sur la théorie mathématique de la lumière* (1864); il adopte en définitive une formule qui coïncide avec celle de Christoffel. M. Redtenbacher [2] a proposé, de son côté, la formule suivante :

$$\frac{1}{n^2} = a + \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2.$$

---

(1) *Monatsberichte der Berl. Akad.*, octobre 1861.

(2) *Dynamiden System*. Mannheim, 1857

Mise à l'épreuve par Verdet et par M. Mascart, qui l'ont comparée aux observations, elle n'a donné que des résultats peu satisfaisants, tandis que la formule de Christoffel représente assez bien les indices observés, lorsqu'on a déterminé convenablement les constantes n_0, λ_0.

M. Ketteler s'est donné pour tâche de vérifier à fond la formule primitive de Cauchy, en conservant d'abord deux, puis successivement trois, quatre et cinq termes de la série ordonnée suivant les puissances négatives de la longueur d'ondulation l, et en introduisant finalement des termes en l^2 et l^4. Les valeurs des longueurs d'onde λ qu'il emploie sont, pour la partie visible du spectre, les moyennes des déterminations d'Ångström, Van der Willigen, Ditscheiner et Mascart; pour le spectre ultra-violet, il adopte les résultats des mesures de M. Mascart (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. I). Les déterminations d'indices de réfraction que M. Ketteler choisit pour les faire servir de pierre de touche à la théorie sont les suivantes : indices du spath d'Islande et d'un flint de Rossette, mesurés par M. Mascart pour les principales raies, depuis le rouge jusqu'à l'extrémité ultra-violette du spectre; indices de l'eau et d'un flint de Merz à forte dispersion, mesurés par M. Van der Willigen (les indices du flint sont donnés pour 52 raies de Fraunhofer dans la partie visible du spectre).

La formule de Christoffel peut s'écrire comme il suit :

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{l^2} = A - B\frac{n^2}{\lambda^2}.$$

Pour l'appliquer au calcul des indices du rayon ordinaire du spath, M. Ketteler détermine les constantes A, B par les raies B et O; M. Mascart avait fait usage des raies D et N, M. Christoffel avait fait concourir au même but toutes les observations à la fois. Les résultats diffèrent peu :

	K.	M.	Ch.
A =	0,371875,	0,371944,	0,371956;
B =	0,0010518,	0,0010552,	0,0010551.

Les valeurs de n, calculées au moyen de ces constantes, s'accordent assez bien avec les valeurs observées à partir de la raie D (les écarts dépassent rarement l'unité de la quatrième décimale); mais, pour les raies A, B, C, l'accord est beaucoup moins satisfaisant, les écarts atteignent ici 2, 3, 4 et 5 unités de la quatrième décimale. Avec la formule de Redtenbacher, des écarts de cet ordre se présentent partout, quoiqu'elle renferme une constante de plus que celle de Christoffel. La formule de Redtenbacher est donc à rejeter; quant à celle de Christoffel, M. Ketteler la juge au moins insuffisante, l'incertitude des indices observés n'étant, selon lui, que de 2 ou 3 unités de la *cinquième* décimale (c'est trop présumer, croyons-nous, de la perfection actuelle des moyens d'observation).

Il introduit donc, à titre d'essai, d'abord une troisième constante C, puis une quatrième D et une cinquième E. Il se trouve que les termes de la série sont alternativement positifs et négatifs

$$\frac{1}{n^2} = A - \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} - \frac{D}{l^6} + \frac{E}{l^8}.$$

En augmentant ainsi pas à pas le nombre de ses constantes, M. Ketteler obtient nécessairement, pour les indices calculés, des valeurs qui se rapprochent de plus en plus des valeurs observées; mais l'accord s'améliore très-lentement, et cinq termes ne suffisent pas encore pour rejeter tous les écarts sur la cinquième décimale. Les valeurs des coefficients B, C, D grandissent à mesure que la série s'allonge, et la convergence diminue plutôt qu'elle n'augmente. Voici les valeurs des coefficients pour chaque phase du calcul [1] :

A	B	C	D	E
0,371944,	0,10552,			
0,372192,	0,10917,	0,0108,		
0,372516,	0,11609,	0,0542,	0,0825,	
0,372833,	0,12672,	0,1732,	0,6081,	0,794.

L'auteur ne donne que les logarithmes des constantes B, C, D,..., et il ne paraît pas être bien au courant de la manière usuelle de les écrire; il donne le signe — au logarithme d'un *nombre négatif* et écrit, par exemple,

$$\log D = -0,9168761 - 8, \quad \text{au lieu de} \quad \overline{8},9168761_n.$$

---

(1) Pour éviter les zéros, nous supposerons les longueurs d'onde exprimées en dix-millièmes de millimètre : $\lambda = 7,6013$, pour la raie A, etc.; M. Ketteler les donne en millièmes de millimètre.

Dans tout son travail, il transcrit, avec *sept* décimales, les logarithmes des constantes pour lesquelles deux ou trois décimales suffiraient amplement.

Le calcul de l'indice de la raie Q par la série poussée à quatre et à cinq termes donne respectivement

$$\frac{1}{n^2} = 0,37252 - 0,03130 + 0,00394 - 0,00162,$$

$$\frac{1}{n^2} = 0,37283 - 0,03417 + 0,01260 - 0,01192 + 0,00420.$$

Il saute aux yeux que toute cette queue de termes nouveaux dont on peut allonger la formule de Christoffel ne procure pas un avantage qui compense la longueur du calcul.

M. Ketteler se décide alors à remplacer le cinquième terme $\frac{E}{l^8}$ par un terme en l^2; puis, voyant que la convergence devient meilleure, il supprime encore le terme $\frac{D}{l^6}$, et s'arrête à la formule suivante :

$$\frac{1}{n^2} = Kl^2 + A - \frac{B}{l^2} - \frac{C}{l^4}.$$

En prenant

$$K = 0,00003293, \quad A = 0,371412, \quad B = 0,10373, \quad C = 0,00034,$$

on a, par exemple, pour la raie Q,

$$\frac{1}{n^2} = 0,00012 + 0,37141 - 0,02797 - 0,00003.$$

Cette formule donne un résultat à peu près satisfaisant. L'adjonction d'un nouveau terme Ll^4 ne l'améliore en rien; M. Ketteler est donc d'avis qu'elle possède toutes les qualités d'une bonne formule d'interpolation, et qu'on peut s'y arrêter définitivement. Le coefficient C, qui est presque sans influence dans le cas du spath, prend des valeurs plus sensibles pour d'autres substances.

M. Mascart était arrivé, de son côté, à une formule empirique renfermant une puissance positive de la longueur d'onde

$$n = k\lambda^2 + a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}.$$

M. Ketteler préfère, pour des raisons théoriques, réunir en un seul les deux derniers termes de sa formule, en l'écrivant comme il suit :

$$\frac{1}{n^2} = Kl^2 + A - \frac{B}{l^2 - c}.$$

Pour le spath, il trouve finalement

$$K = 0,00004910, \quad A = 0,370994, \quad B = 0,10074, \quad c = 0,0641;$$

les écarts entre les indices calculés et les indices observés ne dépassent plus cinq unités de la cinquième décimale.

Des calculs analogues, exécutés sur les indices de réfraction d'un flint lourd de Rossette, paraissent confirmer la formule à laquelle M. Ketteler donne la préférence; les constantes sont ici

$$K = 0,00004214, \quad A = 0,391381, \quad B = 0,1349, \quad c = 0,4738.$$

Les indices de l'eau, mesurés par M. Van der Willigen, conduisent à un résultat analogue; les constantes sont

$$K = 0,00008030, \quad A = 0,567118, \quad B = 0,11334, \quad c = 0,4969.$$

Le même observateur avait déterminé les indices d'un flint de Merz, pour 52 raies du spectre visible. Ces mesures sont très-mal représentées par la formule de Christoffel et par la seconde série de Cauchy, qui donne n en fonction de λ; la formule de M. Ketteler les représente à 2 ou 3 unités près de la cinquième décimale. Une application assez bizarre de la méthode des moindres carrés le conduit finalement à rejeter tout à fait les séries de Cauchy et à justifier l'introduction du terme Ll^2. La formule empirique par laquelle les observations sont le mieux représentées peut donc s'écrire, en réunissant le terme Kl^2 au terme constant A,

$$\frac{1}{n^2} = \frac{A}{1 - kl^2} - \frac{B}{l^2 - c}.$$

M. Ketteler s'efforce ensuite de trouver à ses constantes une interprétation analogue à celle des constantes de la formule de Christoffel; enfin, s'appuyant sur les théories de M. Briot, il démontre que le terme Kl^2 provient de l'influence directe que les molécules pondérables exercent sur l'éther en mouvement, tandis que les termes $\frac{B}{l^2}$,

$\frac{C}{l^4}, \ldots$ sont dus aux changements de densité du fluide éthéré dans le voisinage des molécules pondérables. Ces deux influences seraient plus ou moins sensibles, suivant la nature particulière à chaque milieu réfringent.

En résumé, ces recherches prouvent que la théorie de la dispersion est encore loin de fournir l'explication complète des phénomènes élémentaires que l'observation permet de constater.

R. R.