BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 353-368

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__353_0>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, herausgegeben von A. CLEBSCH und C. NEUMANN.

T. III, 1870-71 [1].

KÖNIGSBERGER. — *La transformation linéaire des fonctions* φ *de M. Hermite.* (10 p.; all.)

Dans son *Mémoire sur la résolution de l'équation du* 5^e^ *degré* [2], M. Hermite a, le premier, fait ressortir l'extrême importance, dans la théorie des nombres et dans les recherches algébriques, des valeurs trouvées par Jacobi pour la racine quatrième du module d'une intégrale elliptique.

Soient K et K′ les fonctions complètes de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \text{et} \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Jacobi a donné les expressions suivantes pour la racine quatrième du module et de son complément

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots},$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}.$$

En posant $q = e^{i\pi\omega}$, M. Hermite a désigné $\sqrt[4]{k}$ par $\varphi(\omega)$ et $\sqrt[4]{k'}$ par $\psi(\omega)$. Alors $\sqrt[8]{q}$ est remplacée par $e^{\frac{i\pi\omega}{8}}$ et les fonctions sont affranchies de l'ambiguïté qui tient à la présence de $\sqrt[8]{q}$ dans la première. Les propriétés fondamentales de ces fonctions découlent des relations évidentes

$$\varphi^8(\omega) + \psi^8(\omega) = 1, \quad \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \psi(\omega), \quad \psi(\omega+1) = \frac{1}{\psi(\omega)}.$$

Cela posé, M. Hermite a indiqué les valeurs que prennent les

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 173.

[2] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXI.

fonctions φ et ψ quand on effectue sur la fonction elliptique l'une quelconque des 6 transformations fondamentales du 1^{er} ordre. Ces formules, qu'on peut lire à la page 4 du Mémoire de l'illustre analyste, avaient été données sans démonstration. M. Königsberger, qui, dans son Livre ([2]), avait déjà démontré celles qui lui étaient nécessaires, complète ici ses recherches et donne la démonstration de toutes les formules.

WIENER (Chr.). — *De la correspondance multiple entre deux figures planes.* (23 p.; all.)

On a examiné jusqu'ici surtout les modes de transformation dans lesquels à un point de l'une des figures correspond un point de l'autre, et réciproquement. M. Cremona, dans un travail déjà ancien et que nous analyserons, a donné un procédé général par lequel on peut trouver tous les modes de transformation jouissant de la propriété que nous venons d'indiquer. Le plus connu est, comme on sait, la transformation de Magnus, dans laquelle à une droite correspond une conique. M. Wiener examine les cas, beaucoup moins étudiés, dans lesquels à 1 point de chaque figure peuvent correspondre plusieurs points de l'autre. On a ainsi des modes de transformation qui se prêtent naturellement à la démonstration et à l'extension des théorèmes de Géométrie. C'est par de telles applications que se termine le travail de M. Wiener.

WEYR (Em.). — *De la génération des courbes par les involutions projectives.* (11 p.; all.)

La notion des involutions de degré supérieur est, depuis longtemps déjà, acquise à la science. Si l'on désigne par x l'abscisse d'un point sur une droite, l'équation

$$f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$

donnera, quand on fera varier λ, des groupes de points formant une involution de degré supérieur. L'*ordre* de cette involution est le nombre de points correspondant à chaque valeur de λ.

On peut aussi considérer, au lieu des points sur une droite, des droites passant par un point fixe.

([1]) *Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen.* Leipzig, Teubner, 1868.

Soient

$$f - \lambda\varphi = 0, \quad f' - \mu\varphi' = 0$$

les équations de deux involutions; si l'on établit entre λ et μ la relation homographique

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

à chaque valeur de λ correspond une valeur de μ; on a donc un faisceau de rayons (déterminé par λ) pour chaque faisceau de droites (déterminé par μ). Si les deux faisceaux n'ont pas la même origine, les droites homologues se coupent en une série de points formant une courbe dont l'ordre et les propriétés dépendent de celles des deux involutions.

Clebsch (A.). — *Sur la relation entre la bissection des fonctions abéliennes et certaines représentations d'une classe de surfaces algébriques.* (31 p.; all.)

Les surfaces qui ont été jusqu'ici représentées sur le plan se divisent en 2 classes bien distinctes. Les unes, pour lesquelles la représentation s'effectue sans difficulté préalable, ne peuvent être représentées que d'une seule manière sur le plan. A cette classe appartiennent, par exemple, les surfaces d'ordre n ayant un point multiple d'ordre $n-1$, les surfaces gauches du 3ᵉ ordre, celles du 4ᵉ ayant une courbe double du 3ᵉ ordre, les surfaces du 5ᵉ ordre ayant une courbe double du 3ᵉ ou composée de 2 droites ne se rencontrant pas.

D'autres surfaces, au contraire, sont susceptibles de représentations qui s'offrent ensemble; on ne peut effectuer de telles représentations qu'après avoir résolu une équation de degré supérieur, dont les racines déterminent des éléments géométriques remarquables de la surface. Par exemple, dans le cas des surfaces du 3ᵉ ordre, on a à résoudre l'équation aux 27 droites. On a vu de même [1] que, pour représenter la surface du 4ᵉ ordre ayant une droite double, il est indispensable de connaître certaines coniques, en nombre limité, se trouvant sur la surface, etc.

Le but du travail important de M. Clebsch est de démontrer que les surfaces de cette dernière classe possèdent une propriété com-

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 221.

mune. Elles sont toutes susceptibles d'être représentées sur un plan double, et la détermination de ces éléments géométriques singuliers qui doit être faite pour effectuer la représentation (droites, coniques, etc.), est ainsi ramenée à la division des fonctions abéliennes. On aperçoit toute l'importance de ces résultats.

Sturm (R.). — *Sur la surface romaine de Steiner.* (48 p.; all.)

On sait qu'il y a quelques années parurent une série de travaux sur cette surface remarquable, la plus simple après les surfaces du 2e degré. M. Kummer présenta, en juillet 1868, à l'Académie de Berlin, un travail sur les surfaces du 4e ordre qui peuvent être engendrées par des coniques. Parmi ces surfaces s'en trouvait une ayant 3 droites doubles concourant en un point triple, et qui, par suite, avait la propriété d'être coupée suivant 2 coniques par chacun de ses plans tangents. Steiner avait étudié cette surface vingt-cinq années auparavant, et avait communiqué à M. Weierstrass les résultats de ses recherches, demeurées inédites. MM. Schröter (1), Cremona (2), Cayley (3) ont publié, après MM. Kummer et Weierstrass, une première série de travaux importants sur la surface de Steiner. Depuis, MM. Clebsch (4), Cremona (5) ont publié sur cette question de nouvelles recherches analytiques et géométriques. Citons encore, pour être complet, MM. Reye (6), Moutard, Cremona (7) qui ont donné de nouvelles propriétés de la surface et l'ont rencontrée dans d'intéressantes recherches géométriques.

M. Sturm publie, à son tour, une étude intéressante et détaillée de la surface *romaine*, où il la considère plus spécialement comme étant de la 3e classe. Son Mémoire contient, en particulier, l'étude des courbes du 4e ordre qui se trouvent sur la surface. L'auteur emploie les méthodes de la Géométrie pure.

---

(1) *Journal de Borchardt*, t. 64, p. 66.

(2) *Id.*, t. 63, p. 315.

(3) *Id.*, t. 64, p. 172.

(4) *Id.*, t. 67, p. 1.

(5) *Rappresentazione della superficie di Steiner, ecc., sopra un piano.* Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1867.

(6) *Geometrie der Lage*, 2e partie, p. 247.

(7) *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du 3e ordre.* (*Journal de Borchardt*, t. 68, p. 1 et 49.)

LÜROTH (J.). — *Résolution de quelques problèmes sur les coniques dans l'espace.* (10 p.; all.)

L'auteur se propose le problème principal suivant :

Déterminer le nombre des coniques qui coupent en 3 points une courbe gauche de 4^e ordre et de 1^{re} espèce, et en un point 5 cordes de cette courbe, sans passer par les points communs à chaque corde et à la courbe.

Il y a 2 coniques satisfaisant à ces conditions. Dans la recherche difficile de cette question l'auteur rencontre quelques propositions intéressantes, telles que les suivantes :

Les plans des coniques rencontrant 3 cordes données de la courbe, et la coupant en 3 points enveloppent une surface de la 6^e classe.

Les plans des coniques rencontrant 4 cordes en un point et la courbe en 3 points enveloppent une développable de la 4^e classe.

SCHLAEFLI (L.). — *Remarques sur les recherches de M. Neumann relatives aux fonctions de Bessel.* (10 p.; all.)

L'auteur part de la formule suivante

$$F(a, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}$$

qui définit une fonction satisfaisant à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

ZEUTHEN (H.-G.). — *Nouvelles démonstrations de théorèmes sur des séries de points correspondants sur 2 courbes.* (7 p.; fr.)

Dans cette Note, M. Zeuthen se propose d'établir par la Géométrie plusieurs théorèmes relatifs aux courbes qui se correspondent point par point. Seulement il généralise la question en supposant qu'à un point de l'une correspondent plusieurs points de l'autre. Soient (C_1), (C_2) les 2 courbes. Si à un point de l'une correspond un seul point de l'autre, les *genres* des 2 courbes sont les mêmes. C'est le théorème de Riemann. L'auteur donne des théorèmes très-intéressants relatifs à des cas plus difficiles et ces propositions peuvent être considérées comme une extension des théorèmes de Riemann.

MEYER (G.-F.). — *Note sur deux intégrales définies qui se présentent dans la théorie de la chaleur.* (3 p.; all.)

Ces intégrales sont celles qu'on détermine par les formules

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\cos}{\sin} \frac{\alpha^2}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \frac{\cos}{\sin} \alpha\sqrt{2}.$$

Noether (M.). — *Sur les surfaces qui possèdent des séries de courbes rationnelles.* (67 p.; all.)

Weyr (Em.). — *Construction des rayons de courbure et des directions principales en un point d'une surface quelconque.* (7 p.; all.)

Weyr (Em.). — *Sur les courbes à point double du 3e ordre.* (3 p.; all.)

Le but de l'auteur est de démontrer d'une manière simple, pour ces courbes, les théorèmes sur les polygones inscrits donnés par Steiner (*Journal de Crelle*, t. 32, p. 182) pour les courbes générales du 3e degré.

Clebsch (A.). — *Sur le mouvement d'un corps dans un fluide.* (25 p.; all.)

La première idée de déterminer le mouvement d'un corps dans un fluide en mouvement est due à Dirichlet. Il donna la solution relative à une sphère en 1852 (dans les *Monatsberichte* et les *Mémoires* de l'Académie de Berlin). A la suite de ce travail, M. Clebsch traita le problème général dans le t. 52 du *Journal de Crelle*. La question a été examinée par MM. Hoppe (*Ann. de Pogg.*, t. LXIII), Thomson et Tait.

Récemment, dans le t. 71 du *Journal de Borchardt*, M. Kirchhoff a donné aux équations différentielles une forme très-élégante qui est le point de départ des recherches de M. Clebsch.

Les équations principales de M. Kirchhoff sont les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, T représente la force vive totale et une fonction du 2^e degré de u, v, w, p, q, r avec des coefficients constants. Après ces équations, on a à en intégrer d'autres, qui se présentent dans tous les problèmes relatifs aux corps solides, et que M. Clebsch examine tout d'abord, pour montrer que leur intégration ne présente pas de difficulté essentielle.

M. Clebsch commence par transformer les équations précédentes, en prenant comme inconnues les 6 dérivées de la fonction T. La fonction T qui exprime la force vive en fonction des nouvelles variables est encore du 2^e degré, et les équations prennent la forme remarquable

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial y_3},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_3}.$$

On obtient quatre autres équations en effectuant une permutation des indices.

Cela posé, on a les trois intégrales données par M. Kirchhoff,

$$2T = L,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = M,$$
$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = N.$$

Comme le temps ne figure pas dans les équations différentielles, on obtiendra par une quadrature la quatrième intégrale. D'ailleurs, on reconnaît facilement que le multiplicateur des équations différentielles est égal à l'unité. On voit donc que si l'on connaît une quatrième intégrale le problème pourra être considéré comme complétement résolu.

Les cas examinés par M. Kirchhoff correspondent à ceux où cette quatrième intégrale est linéaire par rapport aux quantités x_i, y_i. M. Clebsch examine une question plus générale et détermine les cas dans lesquels cette intégrale est du 2^e degré par rapport aux mêmes quantités. Ces cas sont au nombre de trois.

Dans le premier, la fonction T doit avoir la forme

$$T = T_1 + \tfrac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

où T_1 est une fonction arbitraire de x_i.

Dans le second, l'intégrale est un carré parfait; c'est à cette hypothèse que se rapportent les intégrations effectuées par M. Kirchhoff.

Enfin, dans le troisième cas, la fonction 2T peut être ramenée à la forme

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2,$$

où l'on a, entre les constantes, l'unique équation

$$\frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0.$$

Clebsch (A.). — *Sur la signification d'un invariant simultané d'une forme binaire quadratique et d'une forme binaire biquadratique.* (2 p.; all.)

Clebsch (A.). — *Sur la théorie des formes binaires algébriques.* 3 p.; all.)

L'auteur fait remarquer, que si l'on considère l'ensemble des formes binaires adjointes à une forme donnée, on peut se proposer de les ramener au plus petit nombre possible, en partant de deux points de vue essentiellement distincts.

On peut d'abord chercher le système le moins étendu de formes dont tous les invariants et covariants peuvent être considérés comme des fonctions entières avec des fonctions numériques. C'est là le but des travaux de M. Gordan, indiqués antérieurement dans ce *Bulletin*. La seule difficulté qui se présente ici consiste dans la détermination des formes qui sont suffisantes pour exprimer toutes les autres.

La seconde manière d'effectuer la réduction des formes à un nombre limité d'entre elles a déjà été développée par M. Hermite. Il s'agit alors d'exprimer *rationnellement* les invariants et les covariants par un nombre limité d'entre eux, de manière que dans le dénominateur il ne figure que des puissances d'un seul et même covariant ou invariant. La théorie des formes associées de M. Hermite conduit à l'examen de cette question. On obtient un système simple de formes associées (c'est-à-dire de formes telles que toutes les autres s'expriment rationnellement par celles-là) de la manière suivante.

Soit $f = f(x_1, x_2)$ la forme donnée; soit d'ailleurs

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$
$$\eta = x_1 y_2 - y_1 x_2;$$

on pourra exprimer les y linéairement en fonction des ξ, η et l'on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} f^{n-1} f(y_1, y_2) = \xi^n + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi_2 \xi^{n-2}\eta^2 \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\varphi_3 \xi^{n-3}\eta^3 + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Si l'on forme maintenant, au moyen de cette équation, les invariants et les covariants de $f(y_1, y_2)$, et que l'on fasse dans ces expressions $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ($\eta = 0$, $\zeta = f$), on obtient toutes les formes adjointes à f comme fonctions rationnelles de n formes $f, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, et dans le dénominateur figure simplement une puissance de f.

Cela posé, on reconnaît qu'il ne peut exister entre les covariants f, φ_2, φ_3 aucune relation avec des coefficients purement numériques. Mais on peut se demander s'il n'est pas possible d'exprimer ces covariants par une série de covariants plus simples, de telle manière qu'il n'apparaisse de nouveau dans les dénominateurs que des puissances de f. Et cela est, en effet, possible : on peut démontrer le théorème suivant, qui est l'objet du travail de M. Clebsch.

Soient

$$\psi_1 = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2},$$
$$\psi_2 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}$$

les représentations symboliques des covariants de f qui sont du 2e degré par rapport aux coefficients de f; on peut exprimer les formes $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ (et, par suite, tous les invariants et covariants) rationnellement en fonction de f, des ψ et des déterminants fonctionnels des ψ et de f, et il n'apparaît dans les dénominateurs des expressions rationnelles que les puissances de f.

Cayley (A.). — *Note sur la théorie des invariants.* (4 p.; angl.)

Gundelfinger (S.). — *Remarques sur la résolution des équations du 3e degré.* (4 p.; all.)

Götting (R.). — *Sur les dérivées successives de l'expression x^k, où x désigne une fonction quelconque d'une variable indépendante.* (10 p.; all.)

L'auteur démontre des formules intéressantes relatives aux dérivées d'une puissance. Une de ces formules est la suivante :

$$\frac{d^n(y^k)}{y^k} = \sum \frac{P_k}{P_\lambda P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots} \left(\frac{d_0 y}{y}\right)^\lambda \left(\frac{d_1 y}{y}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{d_2 y}{y}\right)^{\lambda_2} \ldots,$$

où l'on a

$$P_\alpha = 1.2.3\ldots\alpha,$$

$$\lambda + \lambda_1 + \ldots = k,$$

$$1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \ldots = n.$$

Schlaefli. — *Sur la série hypergéométrique de Gauss.* (10 p.; all.)

Dans un important Mémoire sur cette théorie, Riemann indique qu'il y a deux méthodes pour arriver aux propriétés de la fonction définie par cette série. On peut employer soit l'équation différentielle, à laquelle satisfait la fonction, soit sa représentation par des intégrales définies. Riemann laisse de côté ces deux méthodes pour définir la fonction par ses singularités, et, à la fin seulement de son Mémoire, il montre qu'il y a une fonction jouissant des propriétés posées *a priori*, et que cette fonction est précisément celle qui est définie par la série hypergéométrique. M. Schläfli étudie cette fonction en la considérant comme une intégrale définie.

Schröder (E.). — *Sur les opérations répétées.* (27 p.; all.)

Il s'agit de la répétition des opérations analytiques effectuées sur une variable indépendante. On considère les fonctions

$$F(z), \quad FF(z) = F^2(z), \ldots, \quad F^\gamma(z) = F[F^{\gamma-1}(z)].$$

Le premier cas examiné se rapporte à la fonction

$$F(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1},$$

qui a été traitée à ce point de vue par MM. Hoppe et J.-A. Serret.

L'auteur donne ensuite deux théorèmes généraux, dont il fait des applications à des fonctions rationnelles, elliptiques, circulaires, etc.

Zeuthen (H.-G.). — *Addition au Mémoire sur les séries de points correspondants sur 2 courbes.* (2 p.; fr.)

NEUMANN (C.). — *Révision de quelques théorèmes généraux sur la théorie du potentiel logarithmique.* (25 p.; all.)

L'auteur fait remarquer que, par suite des découvertes récentes, il est nécessaire, pour un grand nombre de recherches, de reprendre la théorie du potentiel, soit pour établir les différents théorèmes avec toute la rigueur nécessaire, soit pour les étendre à certains points de vue. Il commence par la théorie du potentiel logarithmique.

NEUMANN (C.). — *Recherches sur le mouvement d'un corps solide.* (5 p.; all.)

Dans cet article, l'auteur communique les résultats qu'il a obtenus sur des problèmes de Mécanique, tel que le suivant :

On donne un pendule ordinaire qui oscille sous l'influence de la pesanteur autour de son axe fixe et horizontal. Ce pendule est formé d'un corps à l'intérieur duquel se trouve un espace vide; dans ce vide on a placé un corps homogène de révolution, dont l'axe de révolution est attaché au corps; à l'origine du mouvement, ce noyau extérieur a reçu un choc, et il tourne autour de son axe. Quelle est l'influence que ce noyau tournant à l'intérieur du corps exerce sur les oscillations du pendule?

GORDAN (S.). — *Sur la formation de la résultante de deux équations.* (60 p.; all.)

Ce travail contient de nombreux résultats sur la théorie des invariants et covariants et sur les expressions remarquables de la résultante de deux formes binaires soit du même degré, soit de degré différent. Le Mémoire contient, par exemple, le tableau développé des opérations à faire pour trouver la résultante de deux formes du 5^e degré, de deux formes l'une du 5^e et l'autre du 4^e, etc.

Le problème de l'élimination d'une inconnue entre deux équations a été, comme on sait, étudié par plusieurs géomètres. M. Cayley a donné (*Philosophical Transactions*, t. CXLVII, p. 703, et t. CLVIII, p. 173) des tableaux très-complets contenant les résultantes des équations de degré inférieur. M. Clebsch, dans un Mémoire du *Journal de Borchardt,* t. 58, p. 273, a donné, sous la forme d'un produit symbolique, la résultante d'une équation de degré n et d'une équation du 2^e degré. Dans le Mémoire actuel, M. Gordan indique une série d'opérations très-simples par lesquelles peuvent se former les résultantes; enfin, il donne les covariants simultanés qui s'évanouissent dès que les équations ont plus d'une racine commune. L'auteur emploie les méthodes du calcul symbolique sous la forme que leur a donnée M. Aronhold.

KORNDÖRFER (G.). — *Sur les courbes gauches pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions rationnelles d'un paramètre.* (9 p.; all.)

L'auteur étend aux courbes gauches plusieurs des résultats donnés par M. Clebsch, dans son Mémoire sur les courbes planes rationnelles.

NEUMANN (C.). — *Révision de quelques théorèmes généraux relatifs à la théorie du potentiel newtonien.* (11 p.; all.)

MAYER (A.). — *Sur la méthode d'intégration de Jacobi pour les équations différentielles partielles du 1er ordre.* (18 p.; all.)

Le but de ce travail remarquable est de perfectionner en plusieurs points essentiels la première méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles du 1er ordre que Jacobi a donnée dans le *Journal de Crelle*, t. **17**, et qu'il avait déduite des découvertes de Hamilton. On sait que le théorème de Jacobi peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

pour en trouver une intégrale complète, on y remplace les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ par p_i et l'on intègre complétement le système suivant d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}. \tag{2}$$

On introduit à la place des constantes amenées par l'intégration les suivantes

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \quad b_1, b_2, \ldots, b_n,$$

qui sont les valeurs des quantités

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad p_1, p_2, \ldots, p_n,$$

pour une valeur initiale a de x, et l'on calcule l'intégrale

$$(3)\qquad V=\int_a^x dx\left(\sum_{k=1}^{k=n} p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H\right),$$

qu'on exprime en fonction des seules quantités x, $x_1,\ldots, x_n$, $a_1,\ldots, a_n$. On a alors les $2n$ équations

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_k}=p_k,\quad \frac{\partial V}{\partial a_k}=-b_k,$$

qui sont les intégrales complètes des équations (2), et la fonction V, augmentée d'une constante, donne une intégrale complète de l'équation (1).

M. Mayer fait remarquer que ce théorème est sujet à des exceptions nombreuses. Toutes les fois que H, par exemple, sera homogène et du 1^{er} degré par rapport aux dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ (ce qui arrivera toutes les fois qu'on aura éliminé la fonction antérieurement par la méthode de M. Bertrand), on aura $V=0$, et le théorème ne pourra rien donner.

L'auteur reprend donc la question, qu'il traite d'une manière rigoureuse, et il substitue à la fonction V de Jacobi la suivante

$$V=\sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k+\int_a^x dx\left(\sum_{k=1}^{k=n} p_k\frac{\partial H}{\partial p_k}-H\right).$$

Alors, en exprimant cette fonction V en x, $x_1,\ldots, x_n$, $b_1,\ldots, b_n$, et en la désignant alors par (V), la formule

$$V=(V)+\text{const.}$$

donnera une solution complète de l'équation aux dérivées partielles (1), et les intégrales des équations (2) seront

$$\frac{\partial (V)}{\partial x_k}=p_k,\quad \frac{\partial (V)}{\partial b_k}=a_k.$$

M. Mayer étend ces théorèmes au cas où la fonction figure dans l'équation; il examine ensuite comment on peut simplifier la méthode de Cauchy en l'employant au calcul d'une intégrale complète et non de l'intégrale générale, et enfin comment, étant donnée une intégrale complète, on peut avec elle résoudre le problème de Cauchy, c'est-à-dire trouver une intégrale se réduisant, pour une valeur donnée de l'une des variables indépendantes, à une fonction connue *a priori* des autres.

Spitzer (S.). — *Intégration par des intégrales définies de l'équation différentielle linéaire*

$$y^{(n)} = \mathrm{A}x^2y'' + \mathrm{B}xy' + \mathrm{C}y,$$

dans laquelle n désigne un nombre entier positif et A, B, C *des nombres constants.* (3 p.; all.)

Brill (A.). — *Sur les points doubles des courbes rationnelles.* (3 p.; all.)

Brill (A.). — *Sur celles des courbes d'un réseau qui ont un contact de* 2^e^ *ordre avec une courbe donnée.* (9 p.; all.)

Cayley (A.). — *Sur la transformation des surfaces unicursales.* (6 p.; angl.)

L'éminent géomètre examine dans cette Note une question très-importante : il donne des formules servant à déterminer l'ordre et les singularités de la ligne double d'une surface unicursale (c'est-à-dire qui peut être représentée sur le plan). Ces formules se vérifient pour celles de ces surfaces qui ont été examinées jusqu'ici.

Lommel (E.). — *Sur la théorie des fonctions de Bessel.* (13 p.; all.)

Stahl (H.). — *Sur la théorie des lignes de courbure et des systèmes triples orthogonaux.* (8 p.; all.)

L'auteur indique un système de variables dont le choix permet d'intégrer facilement, et d'une manière uniforme, des lignes de courbure dans les cas déjà examinés par les géomètres.

Kondörfer (G.). — *De la représentation d'une surface du* 4^e^ *ordre à coniques doubles, dans le cas où celles-ci se décomposent en* 2 *droites.* (27 p.; all.)

Les résultats obtenus par l'auteur montrent que les propriétés de la surface ne diffèrent pas essentiellement de celles qu'on obtient dans le cas général.

Meissel. — *Calcul de la totalité des nombres premiers qui sont inférieurs à un million.* (3 p.; all.)

Cayley (A.). — *Sur le déficient (ou genre) de certaines surfaces.* (4 p.; angl.)

Cette courte Note se rapporte à la question difficile du genre d'une surface. L'auteur donne quelques formules qui tiennent compte d'un très-grand nombre de singularités de la surface.

Geiser (C.-F.). — *Note sur les surfaces minima algébriques.* (5 p.; all.)

L'auteur obtient les théorèmes suivants : L'intersection d'une surface minimum algébrique avec le plan de l'infini ne peut se composer que de droites et du cercle de l'infini. En un point singulier, le cône des tangentes se réduit toujours à des plans et au cône contenant le cercle de l'infini.

Le cône ou les plans peuvent subsister séparément ou être multiples.

Rosanes (J.). — *Sur les équations différentielles algébriques.* (12 p.; all.)

Étant donnée une équation

$$A\,dx + B\,dy = 0,$$

où A et B sont des fonctions de x et de y, algébriques et entières, l'auteur examine dans quel cas une telle équation a une intégrale algébrique.

Un premier théorème, généralisé dans la suite par l'auteur, montre que cette intégrale doit être de la forme $C = R$, où R est une fonction rationnelle de x et de y. Il faudra donc qu'il y ait une fraction rationnelle $\frac{Z}{N}$, telle que l'expression

$$\frac{Z}{N}(A\,dx + B\,dy) = 0$$

soit une différentielle exacte. L'auteur développe des propriétés des polynômes Z, N, en supposant que N ne contienne aucun facteur multiple et de degré plus élevé que ZA, ZB. Le Mémoire ne contient d'ailleurs aucune application.

Noether (M.). — *Sur les transformations rationnelles de l'espace et* *leur application à la représentation des surfaces algébriques.* (34 p.; all.)

NEUMANN (C.). — *Sur le développement d'une fonction suivant les carrés et les produits des fonctions de Fourier et de Bessel.* (30 p.; all.)

L'auteur donne les propositions suivantes :

1°
$$[J^n(z)]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi J^{2n}(2z\sin\omega)\,d\omega.$$

2° Si l'on a le développement suivant de z^{2p}, au moyen des fonctions de Bessel

$$z^{2p} = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_2 J^2(z) + \alpha_4 J^4(z) + \ldots,$$

on aura aussi

$$z^{2p} = \frac{\Pi_p\,\Pi_p}{\Pi_{2p}}\left\{\alpha_0\,[J_0(z)]^2 + \alpha_2\,[J^1(z)]^2 + \alpha_4\,[J^2(z)]^2 + \ldots\right\},$$

les nombres n, p étant entiers positifs.

3° Si une fonction est synectique à l'intérieur d'un cercle, elle pourra être développée en une série de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\,[J^n(z)]^2.$$

NEUMANN (C.). — *Sur les intégrales elliptiques et hyperelliptiques.* (20 p.; all.)

GORDAN (P.). — *Sur les courbes du 3e ordre avec 2 points doubles.* (2 p.; all.)

G. D.