BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 257-262
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__257_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOÜEL (J.). — COURS DE CALCUL INFINITÉSIMAL, professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — Première partie (Cours autographié); 375 p. in-4°. Paris, Gauthier-Villars, 1870-1871.

Carnot, « cherchant à savoir en quoi consiste le véritable esprit du calcul infinitésimal », résume ainsi sa théorie, dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* : « Qu'il soit difficile ou non d'en donner une démonstration générale, la vraie métaphysique de l'analyse infinitésimale, telle qu'on l'emploie et telle que tous les géomètres conviennent qu'il faut l'employer pour la facilité des calculs, n'en est pas moins le principe des compensations d'erreurs » (p. 47, édition de 1839); et plus loin encore (p. 215) : « Le mérite essentiel, le sublime, on peut le dire, de la méthode infinitésimale, est de réunir la facilité des procédés ordinaires d'un simple calcul d'approximation à l'exactitude des résultats de l'analyse ordinaire. »

S'inspirant de l'idée de Carnot, M. Hoüel fonde le calcul infinitésimal sur la considération des *équations imparfaites*, et il reste fidèle au point de vue adopté, non par Carnot précisément, mais plutôt par M. Duhamel, dans la première édition de son Cours d'Analyse. Sans discuter ici ce point de vue de l'auteur, nous devons cependant reconnaître que toutes les notions relatives aux grandeurs, à la continuité, aux différentielles, etc...., sont présentées avec une grande netteté et une extrême rigueur. Ces développements, qui concernent ce qu'on peut appeler, avec Carnot, la métaphysique du calcul infinitésimal, forment l'objet des cinq premières leçons.

Avant d'aborder le calcul infinitésimal, M. Hoüel consacre une trentaine de pages à l'exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants; c'est là une sage précaution, car ce calcul algorithmique joue un rôle important dans toutes les branches de l'analyse. Nous devons dire ici que l'identité écrite au n° 35 suppose le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & p' & p'' \\ q & 1 & q'' \\ r & r' & 1 \end{vmatrix}$$

égal à l'unité; c'est une condition que l'auteur a oublié de mentionner.

La partie du cours actuellement publiée se compose de 45 leçons : les 26 premières renferment les définitions relatives aux dérivées et aux différentielles, l'étude du mécanisme du calcul différentiel, puis les premiers principes du calcul intégral, et enfin l'application du calcul infinitésimal au développement en série et à la recherche des valeurs maxima et minima des fonctions; les 18 leçons suivantes sont destinées aux applications géométriques; dans la dernière leçon, il est traité des déterminants fonctionnels et du changement de variables dans les intégrales multiples.

Nous nous contenterons de cette indication générale sur la distribution du cours, car la reproduction détaillée des titres des leçons nous fournirait seulement une table de matières semblable à celle qu'on rencontre dans tous les traités de calcul différentiel et ne nous apprendrait absolument rien sur la manière dont est conçu l'ouvrage que nous voulons analyser.

M. Hoüel fait suivre la définition des différentielles de celle des intégrales définies; puis, immédiatement après les applications fondamentales du calcul différentiel au développement en série et à la recherche des maxima et minima, il s'occupe de l'intégration des expressions différentielles et donne : l'intégration des fonctions rationnelles; celle des irrationnelles du second degré, des différentielles binômes; l'intégration par réductions successives; les intégrales définies, les intégrales eulériennes (XX^e, XXI^e,..., XXIV^e leçons). Cet intervertissement de l'ordre habituellement suivi nous semble une heureuse innovation. Nous avons encore remarqué, dans les règles de différentiation, l'introduction systématique des fonctions hyperboliques, au même titre et sur le même pied que les fonctions circulaires ; c'est un bon exemple à suivre.

Nous devons maintenant ajouter que toutes les questions sont développées avec le plus grand soin; les exemples sont variés et parfaitement choisis; et l'on rencontre, soit dans la partie théorique, soit dans les applications analytiques ou géométriques, une grande richesse de détails; il nous faudrait suivre pas à pas, si nous voulions noter tout ce que nous avons remarqué. Signalons cependant la question du changement de variables, la recherche des valeurs maxima et minima des fonctions, le problème des quadratures et des cubatures.

Dans la théorie du maximum et du minimum, l'auteur aurait peut-être dû consacrer au moins une remarque à un cas particulier qui se présente très-fréquemment et pour lequel il est utile d'indiquer la direction qu'il est bon de donner au calcul : c'est celui où la fonction est homogène par rapport aux variables dont elle dépend, ces variables étant liées elles-mêmes par des relations homogènes. On pouvait aussi, dans la question des points multiples (XXXIII^{me} leçon), compléter l'étude des points doubles par l'observation suivante, qui est assez importante : c'est qu'en un point de rebroussement de 1re espèce, le contact effectif de la tangente est, en général, du 1er ordre seulement, tandis qu'il est nécessairement d'un ordre supérieur au premier pour le rebroussement de 2^{e} espèce. Là se présentait aussi, naturellement, la détermination des cercles osculateurs en un point multiple.

M. Hoüel a su, en définitive, donner l'attrait de la nouveauté à un sujet éminemment classique; la part qu'il prend avec nous à la publication de ce Recueil nous empêche d'exprimer librement notre opinion sur son nouvel ouvrage, digne pendant de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*. Nous nous bornerons à demander que notre collaborateur veuille bien nous donner la suite de son cours; cette suite est d'autant plus désirable qu'on est obligé d'aller chercher dans des Mémoires disséminés, dans les collections les plus variées, les traces des progrès récents de l'analyse, et la publication de M. Hoüel sera certainement accueillie avec reconnaissance.

L. P.

ЧЕБЫШЕВЪ (П.). — *Теорія сравненій*. — Санктпетербургъ, въ типографіи Императорской Академіи Наукъ. 1849 (1).

Nous croyons utile de signaler à nos lecteurs, malgré sa date déjà ancienne, cet excellent Traité élémentaire de Théorie des nombres, qui se distingue de la plupart de ceux que nous connaissons par une exposition assez claire et assez développée pour rendre accessible à quiconque possède les éléments d'algèbre les principes de cette branche des Mathématiques, où les commençants rencontrent souvent tant de difficultés.

L'auteur a facilité notablement l'intelligence de diverses proposi-

(1) Tchebychef (P.), *Théorie des congruences*. Saint-Pétersbourg; typographie de l'Académie impériale des Sciences, 1849. — 1 vol. in-8°, x-280 pages.

tions, en les faisant suivre toujours d'exemples numériques. Nous allons indiquer brièvement le contenu de cet ouvrage, dont il serait bien à désirer que l'on publiàt une traduction dans une des langues de l'Europe occidentale.

L'Introduction traite des propriétés des nombres premiers entre eux et de la décomposition des nombres en facteurs premiers; elle se termine par d'importantes propositions sur les nombres en progression arithmétique.

Chapitre I. *De la congruence en général.* — Définition. Propriété d'une congruence. Solution des congruences. Résidus minima. Nombre des solutions d'une congruence.

Chapitre II. *Congruence du premier degré.* — Résolution dans le cas d'un module premier avec le coefficient de l'inconnue. Théorèmes de Fermat et d'Euler. Application de ces théorèmes à la résolution des congruences du premier degré. Congruences où le module n'est pas premier avec le coefficient de l'inconnue.

Chapitre III. *Des congruences de degré supérieur en général.* — Réduction à l'unité du coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue. Limite supérieure du nombre des solutions. Théorème de Wilson, etc. Évanouissement des termes dont le degré est supérieur ou égal au module. Caractère auquel on reconnaît si l'équation a autant de solution qu'il y a d'unités dans son degré.

Chapitre IV. *Des congruences du second degré.* — Réduction à la forme $x^2 \equiv q \pmod{p}$. Nombre des solutions de cette congruence. Du symbole $\left(\frac{q}{p}\right)$. Expressions pour la détermination de ce symbole. Valeur de $\left(\frac{2}{p}\right)$. Loi de réciprocité de deux nombres premiers. Méthode pour calculer la valeur de $\left(\frac{q}{p}\right)$. Résolution des équations $\left(\frac{x}{p}\right) = \pm 1$. Résolution de la congruence $z^2 \equiv q \pmod{p}$ pour p premier et $= 4n + 3$. Cas où le module est un nombre composé.

Chapitre V. *Des congruences binômes.* — De la congruence $x^m - A \equiv 0 \pmod{p}$, p étant un nombre soit premier, soit composé.

Chapitre VI. *Des congruences de la forme $a^x \equiv A \pmod{p}$.* — De la congruence $a^x \equiv A \pmod{p}$ en général, et en particulier de la congruence $a^x \equiv 1 \pmod{p}$. Des solutions de la congruence $a^x \equiv A \pmod{p}$. Des indices. Résolution des congruences binômes à l'aide d'une table d'indices. Théorèmes pour la détermination des racines primitives. Exemple de cette détermination. Autre méthode. Nombre des racines primitives.

Chapitre VII. *Des congruences du second degré à deux inconnues.* — De la congruence $x^2 + Ay^2 + B \equiv 0 \pmod{p}$. Diviseurs de $x^2 \pm Ay^2$. Détermination de ces diviseurs dans le cas de A premier. Propriétés des formes quadratiques. Expression des diviseurs de $x^2 \pm ay^2$ à l'aide de ces propriétés. Détermination des diviseurs linéaires au moyen des formes quadratiques.

Chapitre VIII. *Application de la théorie des congruences à la décomposition des nombres en facteurs premiers.* — Cette décomposition se ramène à la détermination des diviseurs de la forme $a^m \pm 1$. Détermination des diviseurs des nombres fondée sur la théorie des diviseurs de $x^2 \pm ay^2$.

Appendice. I. Sur les résidus quadratiques. — II. Sur la détermination des racines primitives. — III. Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée.

Dans cette dernière Note, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

1° Si $\varphi(x)$ désigne le nombre des nombres premiers moindres que x, n un nombre entier quelconque, et ρ une quantité > 0, la somme

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x}\right] \frac{(\log x)^n}{x^{1+\rho}}$$

sera une fonction qui, pour ρ tendant vers zéro, convergera vers une limite finie.

2° De $x = 2$ à $x = \infty$, la fonction $\varphi(x)$ satisfait un nombre infini de fois à l'inégalité

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{ax}{(\log x)^n}$$

et à l'inégalité

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{ax}{(\log x)^n},$$

quelque petite que soit la quantité positive a, et quelque grand que soit le nombre n.

3° L'expression $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$, pour $x = \infty$, ne peut avoir d'autre limite que -1.

4° Si l'expression

$$\frac{(\log x)^n}{x}\left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x}\right),$$

pour $x = \infty$, a pour limite une quantité finie ou l'infini, $f(x)$ ne pourra représenter $\varphi(x)$ aux quantités près de l'ordre $\frac{x}{(\log x)^n}$.

5° Si la fonction $\varphi(x)$ peut s'exprimer aux quantités près de l'ordre de $\frac{x}{(\log x)^n}$ en fonction algébrique de x, $\log x$, e^x, son expression sera

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1\,x}{(\log x)^2} + \frac{1.2.x}{(\log x)^3} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1).x}{(\log x)^n}.$$

L'ouvrage est terminé par plusieurs tables numériques, savoir :

I. Table des nombres premiers inférieurs à 6000.

II. Racines primitives et indices pour les modules premiers inférieurs à 200.

III. Diviseurs linéaires de la forme quadratique $x^2 + ay^2$ pour toutes les valeurs de a depuis 1 jusqu'à 101.

IV. Diviseurs linéaires de la forme quadratique $x^2 - ay^2$ pour toutes les valeurs de a depuis 1 jusqu'à 101.

On voit que l'Ouvrage de l'éminent mathématicien russe contient une riche collection de matériaux importants, et qu'une étude plus approfondie et une traduction complète de cet excellent Traité sur la théorie des nombres mériteraient de trouver place dans une de nos collections mathématiques. J. H.